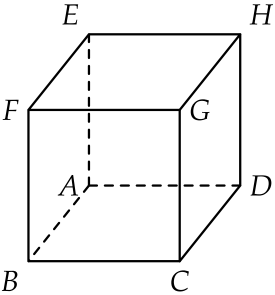
QCM d'autoévaluation, exercice 109 page 327

Sésamath

Maths TS obligatoire

On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 ci-contre.
On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.



Le volume du tétraèdre $BGED$ est :

a) $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ b) $\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

correction

Rappel

Le volume d'un tétraèdre régulier d'arête a est donné par la formule :

$$\mathscr{V} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

correction

Rappel

Le volume d'un tétraèdre régulier d'arête a est donné par la formule :

$$\mathscr{V} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

ici

$$a = \sqrt{2}$$

Rappel

Le volume d'un tétraèdre régulier d'arête a est donné par la formule :

$$\mathscr{V} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

ici

$$a = \sqrt{2}$$

Par conséquent,

$$\mathscr{V} = \frac{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{12} = \frac{1}{3}$$

correction

Rappel

Le volume d'un tétraèdre régulier d'arête a est donné par la formule :

$$\mathscr{V} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

ici

$$a = \sqrt{2}$$

Par conséquent,

$$\mathscr{V} = \frac{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{12} = \frac{1}{3}$$

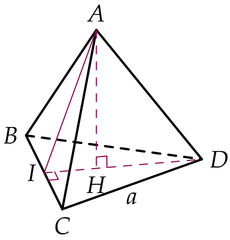
réponse **b)**

Démonstration de la formule du rappel :

Rappel

Le volume d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$\mathscr{V} = \frac{(\text{ aire de base }) \times \text{ hauteur}}{3}$$



Soit I le milieu de $[BC]$ et H, le projeté orthogonal du sommet A sur le plan (BCD), centre du triangle équilatéral BCD.

Calcul de l'aire de base

Calcul de ID hauteur du triangle équilatéral BCD : (on utilise le théorème de Pythagore)

$$CD^2 = IC^2 + ID^2$$

donc

$$ID^2 = CD^2 - IC^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$$

Ainsi :

$$ID = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Calcul de l'aire de base $\mathscr{A}$:

$$\mathscr{A} = \frac{BC \times ID}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Calcul de la hauteur h du tétraèdre

On a $h = AH$.

Or, d'après le théorème de Pythagore dans AIH rectangle en H,

$$AH^2 = IA^2 - IH^2$$

Valeur de IA : IA vaut comme ID,

$$IA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Valeur de IH :

H est le centre du triangle équilatéral BCD. Il est donc, en particulier , le centre de gravité du triangle BCD et est donc situé au tiers de la médiane ID en partant de I.

$$IH = \frac{1}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Retour au calcul AH :

$$AH^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{2a^2}{3} \text{ donc } AH = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Calcul du volume du tétraèdre

$$\mathscr{V} = \frac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \times \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$