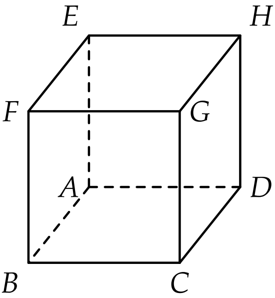
QCM d'autoévaluation, exercice 107 page 327

Sésamath

Maths TS obligatoire

On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 ci-contre.
On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.



Le point d'intersection de (FD) et de plan (BGE) a pour coordonnées :

a) $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$ b) $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$ c) $\left(\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$

Méthode

Soient (d) une droite dirigée par $\vec{u}$ et $(\mathscr{P})$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

1. Tester le parallélisme de (d) et $(\mathscr{P})$ en calculant $\vec{u} \cdot \vec{n}$:
   1. si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, alors (d) est parallèle, strictement ou non, à $(\mathscr{P})$;
   2. si $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$, alors (d) et $(\mathscr{P})$ se coupent en un point M.
2. Si l'intersection existe, résoudre le système composé des équations décrivant (d) et $(\mathscr{P})$ afin de calculer les coordonnées de M.

correction

Un vecteur directeur de (FD) est :

$$\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

correction

Un vecteur directeur de (FD) est :

$$\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

D'après **106 p327** ,un vecteur normal de (BGE) est :

$$\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Un vecteur directeur de (FD) est :

$$\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

D'après **106 p327** ,un vecteur normal de (BGE) est :

$$\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

On a alors

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{FD} = -1\times(-1)+1\times 1+(-1)\times(-1) = 3 \neq 0$$

Un vecteur directeur de (FD) est :

$$\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

D'après **106 p327** ,un vecteur normal de (BGE) est :

$$\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

On a alors

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{FD}=-1\times(-1)+1\times1+(-1)\times(-1)=3\neq0$$

Ainsi,

(FD) et (BGE) se coupent en un point M.

Rappel

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$.

$M(x;y;z) \in \mathscr{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$.

On dit que ce système d'équations est une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Rappel

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$.

$M(x;y;z) \in \mathscr{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$.

On dit que ce système d'équations est une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Une représentation paramétrique de (FD) est :

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Rappel

Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.

- Si M appartient à un plan $(\mathscr{P})$, alors ses coordonnées vérifient une relation du type :
$$ax+by+cz+d=0,$$
avec a, b et c des réels non simultanément nuls.
- Réciproquement : L'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ de l'espace vérifiant une relation du type $ax+by+cz+d=0$, avec a, b et c non simultanément nuls est un plan, que l'on note $(\mathscr{P})$.

On dit que $(\mathscr{P})$ a pour équation $ax+by+cz+d=0$, appelée équation cartésienne du plan et de plus, $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(\mathscr{P})$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (BGE) donc une équation cartésienne de (BGE) est de la forme :

$$-1x+1y-1z+d=0.$$

$\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (BGE) donc une équation cartésienne de (BGE) est de la forme :

$$-1x+1y-1z+d=0.$$

Or, $B(1\,;0\,;0)$ est un point de (BGE) donc :

$$-x_E+y_E-z_E+d=0.$$

correction

$\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (BGE) donc une équation cartésienne de (BGE) est de la forme :

$$-1x+1y-1z+d=0.$$

Or, $B(1\,;0\,;0)$ est un point de (BGE) donc :

$$-x_E+y_E-z_E+d=0.$$

Ainsi,

$$-x_E+y_E-z_E+d=0 \Leftrightarrow -1+0-0+d=0$$

$\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (BGE) donc une équation cartésienne de (BGE) est de la forme :

$$-1x+1y-1z+d=0.$$

Or, $B(1\,;0\,;0)$ est un point de (BGE) donc :

$$-x_E+y_E-z_E+d=0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}-x_E+y_E-z_E+d=0 &\Leftrightarrow -1+0-0+d=0\\ &\Leftrightarrow d=1\end{aligned}$$

$\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (BGE) donc une équation cartésienne de (BGE) est de la forme :

$$-1x+1y-1z+d=0.$$

Or, $B(1\,;0\,;0)$ est un point de (BGE) donc :

$$-x_E+y_E-z_E+d=0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}-x_E+y_E-z_E+d=0 &\Leftrightarrow -1+0-0+d=0\\ &\Leftrightarrow d=1\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (BGE) est donc :

$$-x+y-z+1=0.$$

Par conséquent, (FD) et (BGE) se coupent en un point M dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ satisfont le système :

correction

Par conséquent, (FD) et (BGE) se coupent en un point M dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ satisfont le système :

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = -t \\ -x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, (FD) et (BGE) se coupent en un point M dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ satisfont le système :

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = -t \\ -x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = -t \\ -x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, (FD) et (BGE) se coupent en un point M dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ satisfont le système :

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = -t \\ -x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = -t \\ -x + y - z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = -t \\ t + 1 + t + t + 1 = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, (FD) et (BGE) se coupent en un point M dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ satisfont le système :

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1+t \\ z = -t \\ -x+y-z+1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1+t \\ z = -t \\ -x+y-z+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 1+t \\ z = -t \\ t+1+t+t+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} \\ z = \dfrac{2}{3} \\ t = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Par conséquent, (FD) et (BGE) se coupent en un point M dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ satisfont le système :

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = -t \\ -x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = -t \\ -x + y - z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = -t \\ t + 1 + t + t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} \\ z = \dfrac{2}{3} \\ t = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

réponse **b)**