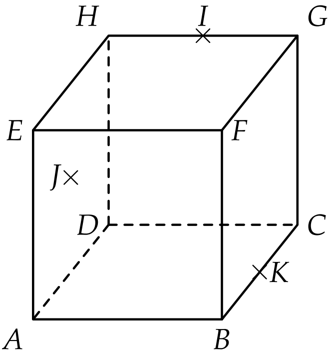
QCM d'autoévaluation, exercice 100 page 326

Sésamath

Maths TS obligatoire

On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 2 ci-contre.
On note I le milieu de $[HG]$, K celui de $[BC]$ et J le centre de la face $ADHE$.
Lorsque cela sera nécessaire, on se placera dans le repère orthonormé $\left(A\,;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$.



L'intersection de la droite (EK) et du plan (BJI)

a) est $M\left(\frac{4}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$ b) est $M(4\,;2\,;2)$ c) est la droite (EK) d) n'existe pas

correction

Méthode

Soient (d) une droite dirigée par $\vec{u}$ et $(\mathscr{P})$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

1. Tester le parallélisme de (d) et $(\mathscr{P})$ en calculant $\vec{u} \cdot \vec{n}$:
   1. si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, alors (d) est parallèle, strictement ou non, à $(\mathscr{P})$;
   2. si $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$, alors (d) et $(\mathscr{P})$ se coupent en un point M.
2. Si l'intersection existe, résoudre le système composé des équations décrivant (d) et $(\mathscr{P})$ afin de calculer les coordonnées de M.

Dans le repère orthonormé $\left(A\,;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$, d'après le **98 p326** , un vecteur normal au plan (BJI) est : $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$

Dans le repère orthonormé $\left(A\,;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$, d'après le **98 p326** , un vecteur normal au plan (BJI) est : $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$

De plus, on a : $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ vecteur directeur de la droite (EK)

correction

Dans le repère orthonormé $\left(A\,;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$, d'après le **98 p326** , un vecteur normal au plan (BJI) est : $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$

De plus, on a : $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ vecteur directeur de la droite (EK)

Alors,

$$\vec{v}\cdot\overrightarrow{EK}=0\times 2+(-2)\times 1+2\times(-2)=-6\neq 0$$

La droite (EK) et le plan (BJI) sont donc sécants.

Rappel

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$.

$M(x;y;z) \in \mathscr{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$.

On dit que ce système d'équations est une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Rappel

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$.

$M(x;y;z) \in \mathscr{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$.

On dit que ce système d'équations est une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Une représentation paramétrique de (EK) est :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}.$$

correction

Ainsi, (EK) et (BJI) se coupent en un point M dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$

satisfont le système :

Ainsi, (EK) et (BJI) se coupent en un point M dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$

satisfont le système : $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \\ -y + z = 0 \end{cases}$

correction

Ainsi, (EK) et (BJI) se coupent en un point M dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$

satisfont le système : $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \\ -y + z = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

correction

Ainsi, (EK) et (BJI) se coupent en un point M dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ satisfont le système : $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \\ -y + z = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \\ -y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \\ -t + (2 - 2t) = 0 \end{cases}$$

correction

Ainsi, (EK) et (BJI) se coupent en un point M dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$

satisfont le système : $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \\ -y + z = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \\ -y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \\ -t + (2 - 2t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \\ z = \dfrac{2}{3} \\ t = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Ainsi, (EK) et (BJI) se coupent en un point M dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$

satisfont le système : $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \\ -y + z = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \\ -y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \\ -t + (2 - 2t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \\ z = \dfrac{2}{3} \\ t = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

réponse **a)**