Exercice ex 58 page 288

Sésamath

Maths TS obligatoire

Soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Dans chacun des cas suivants, étudier la position de la droite Δ avec la droite d de représentation paramétrique :

1 $\begin{cases} x = -k \\ y = 3 + 2k \\ z = 4 - k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

2 $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2k \\ z = 3 - k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

3 $\begin{cases} x = k - 2 \\ y = 7 - 3k \\ z = 2 - k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

Méthode

Pour étudier la position relative de deux droites (D) et (D') données par leurs représentations paramétriques :

correction

Méthode

Pour étudier la position relative de deux droites (D) et (D') données par leurs représentations paramétriques :

1. On détermine un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (D) et un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite (D').

Méthode

Pour étudier la position relative de deux droites (D) et (D') données par leurs représentations paramétriques :

1. On détermine un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (D) et un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite (D').
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Autrement dit, leurs coordonnées sont-elles proportionnelles ?

correction

Méthode

Pour étudier la position relative de deux droites (D) et (D') données par leurs représentations paramétriques :

1. On détermine un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (D) et un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite (D').
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Autrement dit, leurs coordonnées sont-elles proportionnelles ?
   - Si oui, on en déduit que les droite (D) et (D') sont parallèles. Il reste à préciser si elle sont strictement parallèles ou confondues. Pour cela, on prend un point quelconque de l'une et on teste son appartenance à l'autre.

Méthode

Pour étudier la position relative de deux droites (D) et (D') données par leurs représentations paramétriques :

1. On détermine un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (D) et un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite (D').
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Autrement dit, leurs coordonnées sont-elles proportionnelles ?
   - Si oui, on en déduit que les droite (D) et (D') sont parallèles. Il reste à préciser si elle sont strictement parallèles ou confondues. Pour cela, on prend un point quelconque de l'une et on teste son appartenance à l'autre.
   - Sinon, on en déduit que les droites (D) et (D') sont sécantes en un point A ou bien non coplanaires.

correction

Méthode

Pour étudier la position relative de deux droites (D) et (D') données par leurs représentations paramétriques :

1. On détermine un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (D) et un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite (D').
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Autrement dit, leurs coordonnées sont-elles proportionnelles ?
   - Si oui, on en déduit que les droite (D) et (D') sont parallèles. Il reste à préciser si elle sont strictement parallèles ou confondues. Pour cela, on prend un point quelconque de l'une et on teste son appartenance à l'autre.
   - Sinon, on en déduit que les droites (D) et (D') sont sécantes en un point A ou bien non coplanaires.
     On recherche deux paramètres qui donneraient le même triplet $(x\,;y\,;z)$ dans les deux représentations, en résolvant un système à trois équations et deux inconnues.

Méthode

Pour étudier la position relative de deux droites (D) et (D') données par leurs représentations paramétriques :

1. On détermine un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (D) et un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite (D').
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Autrement dit, leurs coordonnées sont-elles proportionnelles ?
   - Si oui, on en déduit que les droite (D) et (D') sont parallèles. Il reste à préciser si elle sont strictement parallèles ou confondues. Pour cela, on prend un point quelconque de l'une et on teste son appartenance à l'autre.
   - Sinon, on en déduit que les droites (D) et (D') sont sécantes en un point A ou bien non coplanaires.

     On recherche deux paramètres qui donneraient le même triplet $(x\,;y\,;z)$ dans les deux représentations, en résolvant un système à trois équations et deux inconnues. S'il a une solution, on reporte dans l'une ou l'autre de ces représentations pour trouver le triplet $(x\,;y\,;z)$ de coordonnées du point A.

Méthode

Pour étudier la position relative de deux droites (D) et (D') données par leurs représentations paramétriques :

1. On détermine un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (D) et un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite (D').
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Autrement dit, leurs coordonnées sont-elles proportionnelles ?
   - Si oui, on en déduit que les droite (D) et (D') sont parallèles. Il reste à préciser si elle sont strictement parallèles ou confondues. Pour cela, on prend un point quelconque de l'une et on teste son appartenance à l'autre.
   - Sinon, on en déduit que les droites (D) et (D') sont sécantes en un point A ou bien non coplanaires.
     On recherche deux paramètres qui donneraient le même triplet $(x\,;y\,;z)$ dans les deux représentations, en résolvant un système à trois équations et deux inconnues. S'il a une solution, on reporte dans l'une ou l'autre de ces représentations pour trouver le triplet $(x\,;y\,;z)$ de coordonnées du point A.
     S'il n'a pas de solution, les droites (D) et (D') ne sont pas coplanaires.

correction

2. Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

correction

2. Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de d est $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

2 Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de d est $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, le système suivant :

$$\begin{cases} -1 = 1k \\ 3 = -2k \\ 1 = -1k \end{cases}$$ admet une unique solution.

2 Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de d est $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, le système suivant :

$$\begin{cases} -1 = 1k \\ 3 = -2k \\ 1 = -1k \end{cases}$$ admet une unique solution.

$$\begin{cases} -1 = -1k \\ 3 = 2k \\ -1 = -1k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 1,5 \\ k = -1 \end{cases}$$

correction

2 Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de d est $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, le système suivant :

$$\begin{cases} -1 = 1k \\ 3 = -2k \\ 1 = -1k \end{cases}$$ admet une unique solution.

$$\begin{cases} -1 = -1k \\ 3 = 2k \\ -1 = -1k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 1,5 \\ k = -1 \end{cases}$$

Le système n'ayant pas de solution, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

2 Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de d est $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, le système suivant :

$$\begin{cases} -1 = 1k \\ 3 = -2k \\ 1 = -1k \end{cases}$$ admet une unique solution.

$$\begin{cases} -1 = -1k \\ 3 = 2k \\ -1 = -1k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 1,5 \\ k = -1 \end{cases}$$

Le système n'ayant pas de solution, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

Les droites Δ et d ne sont donc pas parallèles, elles sont soit sécantes soit non coplanaires.

1. Les droites Δ et d sont sécantes si, et seulement si, le système suivant

   d'inconnues t et k admet une unique solution :

correction

1. Les droites Δ et d sont sécantes si, et seulement si, le système suivant d'inconnues t et k admet une unique solution : $\begin{cases} 1-t=-1k \\ -2+3t=3+2k \\ -1+t=4-k \end{cases}$

1. Les droites Δ et d sont sécantes si, et seulement si, le système suivant d'inconnues t et k admet une unique solution : $\begin{cases} 1-t=-1k \\ -2+3t=3+2k \\ -1+t=4-k \end{cases}$

$$\begin{cases} 1-t=-1k \\ -2+3t=3+2k \\ -1+t=4-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=k+1 \\ -2+3(k+1)=3+2k \\ -1+(k+1)=4-k \end{cases}$$

1 Les droites Δ et d sont sécantes si, et seulement si, le système suivant d'inconnues t et k admet une unique solution : $\begin{cases} 1-t=-1k \\ -2+3t=3+2k \\ -1+t=4-k \end{cases}$

$$\begin{cases} 1-t=-1k \\ -2+3t=3+2k \\ -1+t=4-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=k+1 \\ -2+3(k+1)=3+2k \\ -1+(k+1)=4-k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=k+1 \\ k=2 \\ 2k=4 \end{cases}$$

correction

1. Les droites Δ et d sont sécantes si, et seulement si, le système suivant d'inconnues t et k admet une unique solution : $\begin{cases} 1-t=-1k \\ -2+3t=3+2k \\ -1+t=4-k \end{cases}$

$$\begin{cases} 1-t=-1k \\ -2+3t=3+2k \\ -1+t=4-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=k+1 \\ -2+3(k+1)=3+2k \\ -1+(k+1)=4-k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=k+1 \\ k=2 \\ 2k=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ k=2 \\ k=2 \end{cases}$$

1. Le système précédent admettant une solution unique, les droites d et Δ sont sécantes au point A de coordonnées :

1. Le système précédent admettant une solution unique, les droites d et Δ sont sécantes au point A de coordonnées :

$$\begin{cases} x = 1 - 3 = -2 \\ y = -2 + 3 \times 3 = 7 \\ z = -1 + 3 = 2 \end{cases}$$

1. Le système précédent admettant une solution unique, les droites d et Δ sont sécantes au point A de coordonnées :

$$\begin{cases} x = 1 - 3 = -2 \\ y = -2 + 3 \times 3 = 7 \\ z = -1 + 3 = 2 \end{cases}$$

Les droites d et Δ sont sécantes au point $A(-2\,;7\,;2)$

correction

2. Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

correction

2. Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de d est $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

2 Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ et de d est $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, le système suivant :

$$\begin{cases}-1 = 1k\\3 = -2k\\1 = -1k\end{cases}$$ admet une unique solution.

2 Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de d est $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, le système suivant :

$$\begin{cases} -1 = 1k \\ 3 = -2k \\ 1 = -1k \end{cases}$$ admet une unique solution.

$$\begin{cases} -1 = -1k \\ 3 = 2k \\ -1 = -1k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = -1,5 \\ k = -1 \end{cases}$$

correction

2 Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de d est $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, le système suivant :

$$\begin{cases} -1 = 1k \\ 3 = -2k \\ 1 = -1k \end{cases} \quad \text{admet une unique solution.}$$

$$\begin{cases} -1 = -1k \\ 3 = 2k \\ -1 = -1k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = -1,5 \\ k = -1 \end{cases}$$

Le système n'ayant pas de solution, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

2 Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de d est $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, le système suivant :

$$\begin{cases} -1 = 1k \\ 3 = -2k \\ 1 = -1k \end{cases}$$ admet une unique solution.

$$\begin{cases} -1 = -1k \\ 3 = 2k \\ -1 = -1k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = -1,5 \\ k = -1 \end{cases}$$

Le système n'ayant pas de solution, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

Les droites Δ et d ne sont donc pas parallèles, elles sont soit sécantes soit non coplanaires.

2. Les droites Δ et d sont sécantes si, et seulement si, le système suivant

   d'inconnues t et k admet une unique solution :

2. Les droites Δ et d sont sécantes si, et seulement si, le système suivant d'inconnues t et k admet une unique solution : $\begin{cases} 1-t=1+k \\ -2+3t=-2k \\ -1+t=3-k \end{cases}$

correction

2. Les droites Δ et d sont sécantes si, et seulement si, le système suivant d'inconnues t et k admet une unique solution : $\begin{cases} 1-t=1+k \\ -2+3t=-2k \\ -1+t=3-k \end{cases}$

$$\begin{cases} 1-t=1+k \\ -2+3t=-2k \\ -1+t=3-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-k \\ -2+3(-k)=-2k \\ -1+(-k)=3-k \end{cases}$$

2 Les droites Δ et d sont sécantes si, et seulement si, le système suivant

d'inconnues t et k admet une unique solution : $\begin{cases} 1-t=1+k \\ -2+3t=-2k \\ -1+t=3-k \end{cases}$

$$\begin{cases} 1-t=1+k \\ -2+3t=-2k \\ -1+t=3-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-k \\ -2+3(-k)=-2k \\ -1+(-k)=3-k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=-k \\ k=-2 \\ -1=3 \end{cases}$$

Le système précédent n'admettant aucune solution, les droites d et Δ sont non coplanaires

correction

3. Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

correction

3 Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de d est $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

3 Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de d est $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

On a

$$\vec{v} = -\vec{u}$$

3 Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de d est $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

On a

$$\vec{v} = -\vec{u}$$

les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

3 Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de d est $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

On a

$$\vec{v} = -\vec{u}$$

les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

Les droites Δ et d sont donc parallèles, reste à déterminer si elles sont strictement parallèles ou confondues.

correction

3. Avec $t = 1$, le point $A(0\,;1\,;0)$ est un point de Δ.

3 Avec $t = 1$, le point $A(0\,;1\,;0)$ est un point de Δ.
A est un point de d si, et seulement si le système suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} 0 = k - 2 \\ 1 = 7 - 3k \\ -0 = 2 - k \end{cases}$$

3. Avec $t = 1$, le point $A(0\,;1\,;0)$ est un point de Δ.
A est un point de d si, et seulement si le système suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} 0 = k - 2 \\ 1 = 7 - 3k \\ -0 = 2 - k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = k - 2 \\ 1 = 7 - 3k \\ -0 = 2 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

3 Avec $t = 1$, le point A(0 ; 1 ; 0) est un point de Δ.
A est un point de d si, et seulement si le système suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} 0 = k - 2 \\ 1 = 7 - 3k \\ -0 = 2 - k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = k - 2 \\ 1 = 7 - 3k \\ -0 = 2 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

Le système précédent n'admettant aucune solution, le point A n'appartient pas à d.

3 Avec $t = 1$, le point $A(0\,;1\,;0)$ est un point de Δ.
A est un point de d si, et seulement si le système suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} 0 = k - 2 \\ 1 = 7 - 3k \\ -0 = 2 - k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = k - 2 \\ 1 = 7 - 3k \\ -0 = 2 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

Le système précédent n'admettant aucune solution, le point A n'appartient pas à d.

Les droites d et Δ sont donc strictement parallèles.