Exercice ex 45 page 287

Sésamath

Maths TS obligatoire

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère les points

$$A(-4\,;2\,;3),\ B(1\,;5\,;2),\ C(0\,;5\,;4) \text{ et } D(-6\,;-1\,;-2).$$

1. Démontrer que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
2. Que peut-on en déduire concernant les points A, B, C et D ?

correction

1

Rappel

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, soit $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$. Alors :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix}$$

correction

1

Rappel

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, soit $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$. Alors :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Rappel

Dans un repère$(O\,;\,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs et k un nombre réel.

Alors :

$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix} \quad et \quad k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$$

correction

1. Ainsi :

$$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\-3\\-5\end{pmatrix}$$

1. Ainsi :

$$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\-3\\-5\end{pmatrix}$$

1. Ainsi :

$$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\-3\\-5\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$$

correction

1. Ainsi :

$$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\-3\\-5\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-3\\-5\end{pmatrix}$$

1. Ainsi :

$$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\-3\\-5\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-3\\-5\end{pmatrix}$$

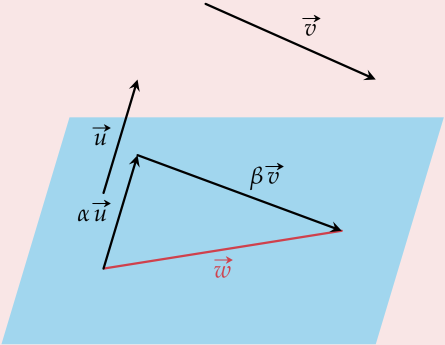
On a donc bien $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

2

Rappel

Soit trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels α et β tels que

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.$$



Méthode

Il s'agit de démontrer que trois vecteurs sont coplanaires en écrivant l'un en fonction des deux autres.

2. Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

2. Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

2. Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.
Autrement dit, si le système suivant : $\begin{cases} 5 = 4k \\ 3 = 3k \\ -1 = 1k \end{cases}$ admet une unique solution.

2 Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Autrement dit, si le système suivant : $\begin{cases} 5 = 4k \\ 3 = 3k \\ -1 = 1k \end{cases}$ admet une unique solution.

$$\begin{cases} 5 = 4k \\ 3 = 3k \\ -1 = 1k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1,25 \\ k = 1 \\ k = -1 \end{cases}$$

correction

2 Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Autrement dit, si le système suivant : $\begin{cases} 5 = 4k \\ 3 = 3k \\ -1 = 1k \end{cases}$ admet une unique solution.

$$\begin{cases} 5 = 4k \\ 3 = 3k \\ -1 = 1k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1,25 \\ k = 1 \\ k = -1 \end{cases}$$

2. Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.
Autrement dit, si le système suivant : $\begin{cases} 5 = 4k \\ 3 = 3k \\ -1 = 1k \end{cases}$ admet une unique solution.

$$\begin{cases} 5 = 4k \\ 3 = 3k \\ -1 = 1k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1,25 \\ k = 1 \\ k = -1 \end{cases}$$

2 Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Autrement dit, si le système suivant : $\begin{cases} 5 = 4k \\ 3 = 3k \\ -1 = 1k \end{cases}$ admet une unique solution.

$$\begin{cases} 5 = 4k \\ 3 = 3k \\ -1 = 1k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1,25 \\ k = 1 \\ k = -1 \end{cases}$$

Le système n'ayant pas de solution, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

2. On a donc :

2. On a donc :

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$$

2. On a donc :

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$$

où les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

2. On a donc :

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$$

où les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

correction

2. On a donc :

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$$

où les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

Par conséquent, les points A, B, C et D sont coplanaires.