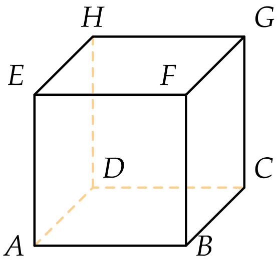
Exercice ex 41 page 287

Sésamath

Maths TS obligatoire

$ABCDEFGH$ est un cube.



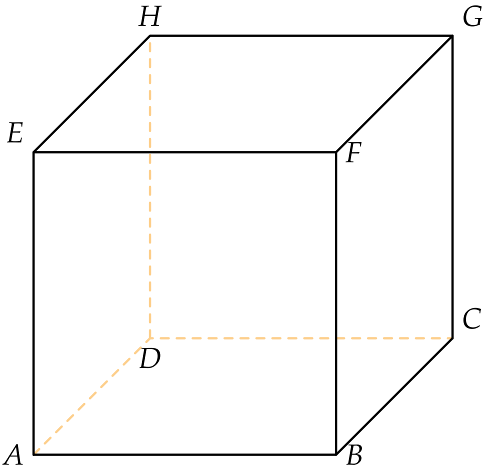
On considère les points M et N définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG}.$$

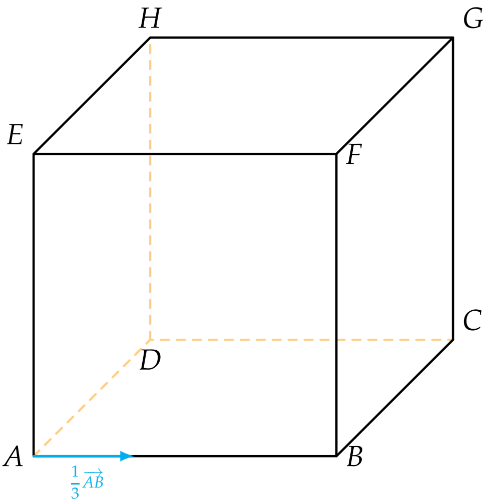
1. Construire la figure.
2. Démontrer que les points C, E et M sont alignés.
3. Démontrer que les points E, F, H et N sont coplanaires.

correction

1

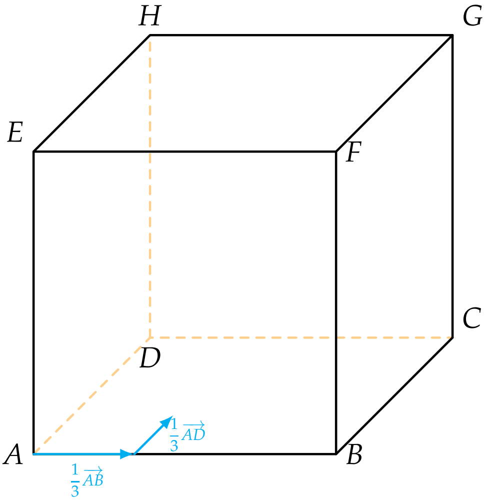


1



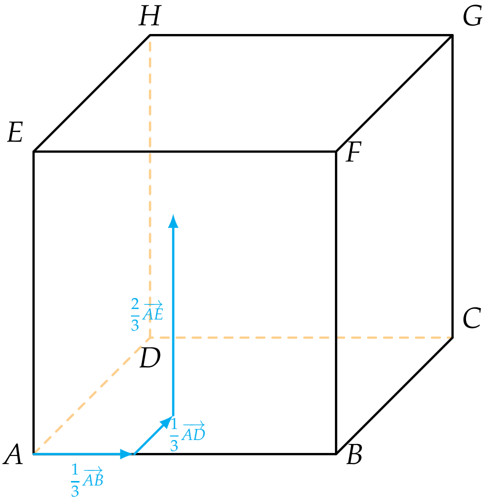
correction

1

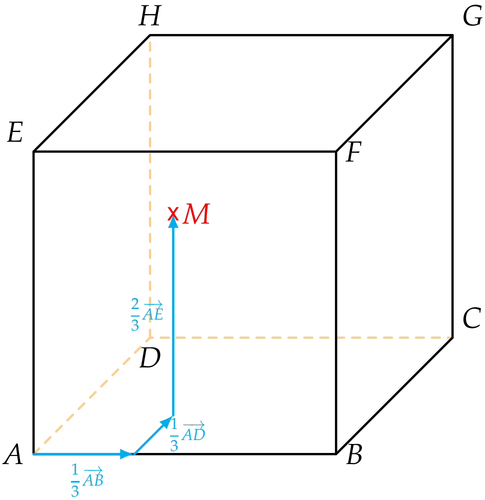


correction

1

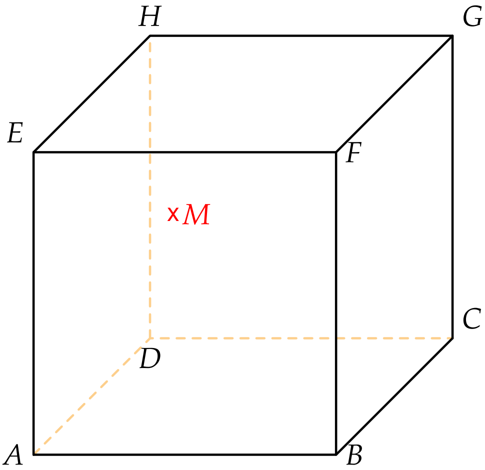


1

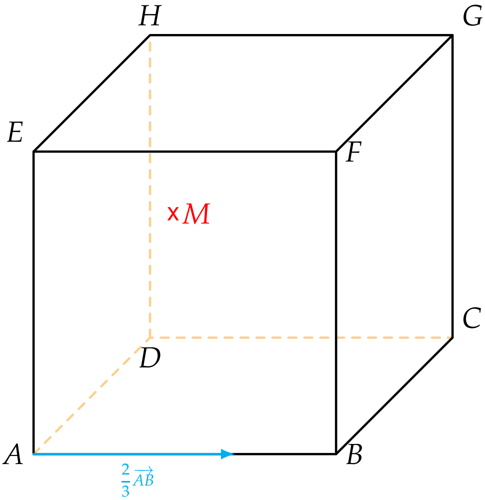

H
G
E
F
M
$\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$
C
D
A
$\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$
B
$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

correction

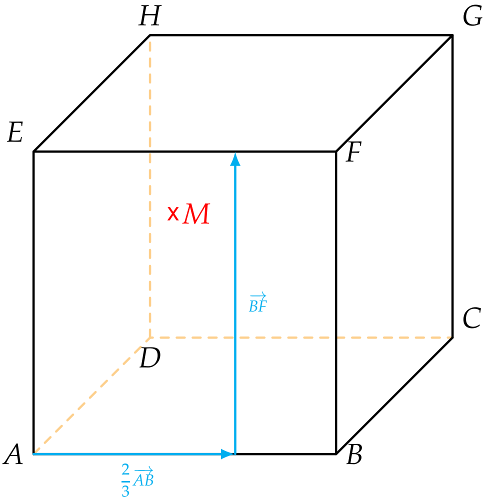
1



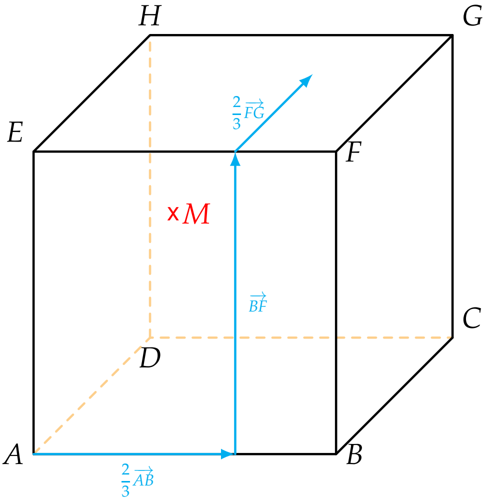
1



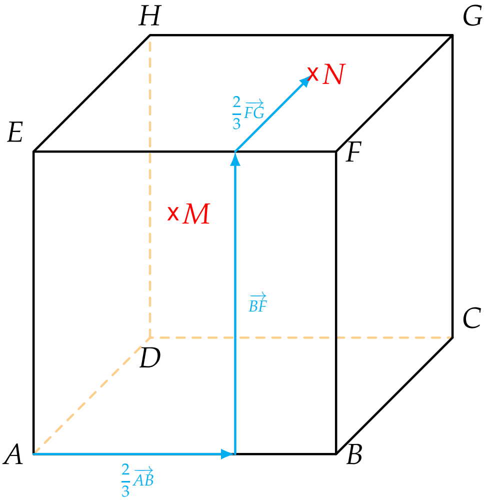
1



1

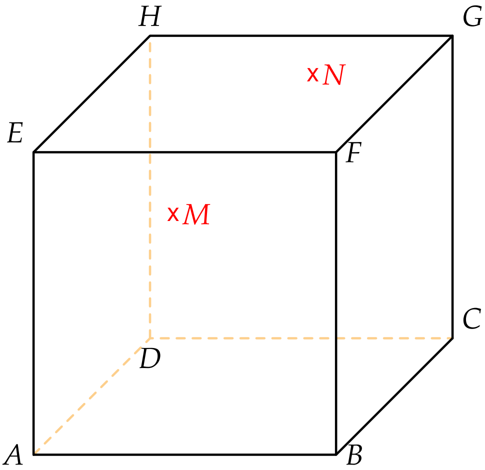

H
G
E
F
$\frac{2}{3}\overrightarrow{FG}$
M
$\overrightarrow{BF}$
C
D
A
B
$\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

1



H
G
N
$\frac{2}{3}\overrightarrow{FG}$
E
F
M
$\overrightarrow{BF}$
C
D
A
B
$\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

1



2

Méthode

Pour montrer que 3 points sont alignés, il suffit de montrer que 2 vecteurs formés à l'aide de ces 3 points sont colinéaires.
On peut par exemple exprimer l'un en fonction de l'autre.

correction

2

$$\overrightarrow{CM}$$

2

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$$

2

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}\\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}\\ &= -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

correction

2

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CM} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} \\
&= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} \\
&= -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} \\
&= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}
\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CM} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} \\
&= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} \\
&= -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} \\
&= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} \\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}
\end{aligned}$$

correction

2

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CM} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} \\
&= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} \\
&= -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} \\
&= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} \\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} \\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{BE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}
\end{aligned}$$

correction

2

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}\\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}\\ &= -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}\\ &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CM} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} \\
&= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} \\
&= -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} \\
&= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} \\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} \\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{BE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} \\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}
\end{aligned}$$

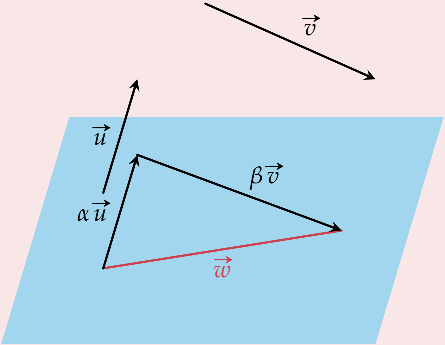
Les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires donc les points C, E et M sont alignés.

3

Rappel

Soit trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels α et β tels que

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.$$



Méthode

Il s'agit de démontrer que trois vecteurs sont coplanaires en écrivant l'un en fonction des deux autres.

correction

3

$$\overrightarrow{EN}$$

3

$$\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AN}$$

3

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EN} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AN} \\ &= \overrightarrow{EA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG}\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EN} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AN} \\ &= \overrightarrow{EA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG} \\ &= -\overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG}\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EN} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AN} \\ &= \overrightarrow{EA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG} \\ &= -\overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG}\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EN} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AN} \\
&= \overrightarrow{EA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG} \\
&= -\overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG} \\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG} \\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{EF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG}
\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EN} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AN} \\
&= \overrightarrow{EA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG} \\
&= -\overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG} \\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG} \\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{EF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG}
\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$ n'étant pas colinéaires, le vecteurs $\overrightarrow{EN}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont coplanaires. Par conséquent, les points E, F, H et N sont coplanaires.