QCM d’autoévaluation, exercice 87 page 295

Sésamath

Maths TS obligatoire

Dans un repère $(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ de l'espace, on considère les points

$$A(1;0;2),\ B(2;1;2),\ C(3;0;0) \text{ et } D(5;-2;-4).$$

Soit $E(3;4;5)$:

a) la droite parallèle à (AB) et passant par E a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 1+t \\ z = 5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

b) Le point E appartient au plan (ABC)

c) les droites (AB) et (DE) sont non coplanaires

a) Soit Δ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

a) Soit Δ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Rappel

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$.

$M(x;y;z) \in \mathscr{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$.

On dit que ce système d'équations est une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

a) Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

correction

a) Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Rappel

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, soit $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$. Alors :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$$

correction

a) Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Rappel

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, soit $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$. Alors :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$$

Or, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de Δ.

a) Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Rappel

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, soit $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$. Alors :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$$

Or, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de Δ.

Par conséquent,

Δ est parallèle à (AB).

a) En prenant $t = 3$, on a $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 5 \end{cases}$

a) En prenant $t = 3$, on a $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 5 \end{cases}$

E appartient donc à la droite Δ

Δ n'est autre que la droite parallèle à (AB) et passant par E.

a) En prenant $t = 3$, on a $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 5 \end{cases}$

E appartient donc à la droite Δ

Δ n'est autre que la droite parallèle à (AB) et passant par E.

réponse **a)** vraie

b) Étudions si les points E, A, B et C sont coplanaires.

Rappel

Soit trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels α et β tels que

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.$$

Méthode

Pour montrer que quatre points sont coplanaires, il s'agit de démontrer que trois vecteurs formés à l'aide de ces quatre points sont coplanaires en écrivant l'un des vecteurs en fonction des deux autres.

correction

b) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$

b) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont des coordonnées non proportionnelles car $\frac{2}{1} \neq \frac{0}{1}$ alors ils ne sont pas colinéaires.

b) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont des coordonnées non proportionnelles car $\frac{2}{1} \neq \frac{0}{1}$ alors ils ne sont pas colinéaires.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels α et β tels que

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.$$

correction

b) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont des coordonnées non proportionnelles car $\frac{2}{1} \neq \frac{0}{1}$ alors ils ne sont pas colinéaires.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels α et β tels que

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.$$

Autrement dit, si le système suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} 2 = 1\alpha + 2\beta \\ 4 = 1\alpha + 0\beta \\ 3 = 0\alpha - 2\beta \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 2 = 1\alpha + 2\beta \\ 4 = 1\alpha + 0\beta \\ 3 = 0\alpha - 2\beta \end{cases}$$

correction

b)

$$\begin{cases} 2 = 1\alpha + 2\beta \\ 4 = 1\alpha + 0\beta \\ 3 = 0\alpha - 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 1 \\ \alpha = 4 \\ \beta = -1,5 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 2 = 1\alpha + 2\beta \\ 4 = 1\alpha + 0\beta \\ 3 = 0\alpha - 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 1 \\ \alpha = 4 \\ \beta = -1,5 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires.

b)

$$\begin{cases} 2 = 1\alpha + 2\beta \\ 4 = 1\alpha + 0\beta \\ 3 = 0\alpha - 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 1 \\ \alpha = 4 \\ \beta = -1,5 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires. Par conséquent, les points A, B, C et E ne sont pas coplanaires.

b)

$$\begin{cases} 2 = 1\alpha + 2\beta \\ 4 = 1\alpha + 0\beta \\ 3 = 0\alpha - 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 1 \\ \alpha = 4 \\ \beta = -1,5 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires. Par conséquent, les points A, B, C et E ne sont pas coplanaires.

réponse **b)** fausse

correction

c) Étudions si les points A, B, D et E sont coplanaires.

correction

c) Étudions si les points A, B, D et E sont coplanaires.

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\-2\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$

c) Étudions si les points A, B, D et E sont coplanaires.

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\-2\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ont des coordonnées non proportionnelles car $\dfrac{4}{1} \neq \dfrac{-2}{1}$ alors ils ne sont pas colinéaires.

c) Étudions si les points A, B, D et E sont coplanaires.

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\-2\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ont des coordonnées non proportionnelles car $\dfrac{4}{1} \neq \dfrac{-2}{1}$ alors ils ne sont pas colinéaires.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels α et β tels que

$$\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD}.$$

c) Étudions si les points A, B, D et E sont coplanaires.

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\-2\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ont des coordonnées non proportionnelles car $\dfrac{4}{1} \neq \dfrac{-2}{1}$ alors ils ne sont pas colinéaires.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels α et β tels que

$$\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD}.$$

Autrement dit, si le système suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} 2 = 1\alpha + 4\beta \\ 4 = 1\alpha - 2\beta \\ 3 = 0\alpha - 6\beta \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 2 = 1\alpha + 4\beta \\ 4 = 1\alpha - 2\beta \\ 3 = 0\alpha - 6\beta \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 2 = 1\alpha + 4\beta \\ 4 = 1\alpha - 2\beta \\ 3 = 0\alpha - 6\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \alpha = 3 \\ \beta = -0,5 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 2 = 1\alpha + 4\beta \\ 4 = 1\alpha - 2\beta \\ 3 = 0\alpha - 6\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \alpha = 3 \\ \beta = -0,5 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires.

c)

$$\begin{cases} 2 = 1\alpha + 4\beta \\ 4 = 1\alpha - 2\beta \\ 3 = 0\alpha - 6\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \alpha = 3 \\ \beta = -0,5 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires. Par conséquent, les points A, B, D et E ne sont pas coplanaires et les droites (AB) et (DE) ne sont pas coplanaires.

c)

$$\begin{cases} 2 = 1\alpha + 4\beta \\ 4 = 1\alpha - 2\beta \\ 3 = 0\alpha - 6\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \alpha = 3 \\ \beta = -0,5 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires. Par conséquent, les points A, B, D et E ne sont pas coplanaires et les droites (AB) et (DE) ne sont pas coplanaires.

réponse **c)** fausse