QCM d’autoévaluation, exercice 86 page 295

Sésamath

Maths TS obligatoire

énoncé

Dans un repère $(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ de l'espace, on considère les points

$$A(1\,;0\,;2),\ B(2\,;1\,;2),\ C(3\,;0\,;0) \text{ et } D(5\,;-2\,;-4).$$

Une représentation paramétrique de :

a) la droite (AB) est :

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$

b) du plan (ABC) est :

$$\begin{cases} x = 5 + t + 4t' \\ y = -2 - t - 2t' \\ z = -4 - 2t - 6t' \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$

c) du plan (ABC) est :

$$\begin{cases} x = 1 + t + 2t' \\ y = t \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$

a) Soit Δ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

a) Soit Δ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Première méthode :

On étudie si un vecteur directeur de Δ est aussi vecteur directeur de (AB)

a) Soit Δ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Première méthode :

On étudie si un vecteur directeur de Δ est aussi vecteur directeur de (AB)

Rappel

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$.

$M(x;y;z) \in \mathscr{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$. On dit que ce système d'équations est une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

a) Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

correction

a) Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Rappel

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, soit $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$. Alors :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$$

a) Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Rappel

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, soit $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$. Alors :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

correction

a) Étudions si les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

correction

a) Étudions si les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{AB}$.

a) Étudions si les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{AB}$.
Autrement dit, si le système suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} -1 = 1k \\ -1 = 1k \\ 1 = 0k \end{cases}$$

correction

a) Étudions si les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{AB}$.
Autrement dit, si le système suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} -1 = 1k \\ -1 = 1k \\ 1 = 0k \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 = 1k \\ -1 = 1k \\ 1 = 0k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = k \\ -1 = k \\ 1 = 0 \end{cases}$$

a) Étudions si les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{AB}$.
Autrement dit, si le système suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} -1 = 1k \\ -1 = 1k \\ 1 = 0k \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 = 1k \\ -1 = 1k \\ 1 = 0k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = k \\ -1 = k \\ 1 = 0 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ ne sont pas colinéaires.

a) Étudions si les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{AB}$.
Autrement dit, si le système suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} -1 = 1k \\ -1 = 1k \\ 1 = 0k \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 = 1k \\ -1 = 1k \\ 1 = 0k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = k \\ -1 = k \\ 1 = 0 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ ne sont pas colinéaires. Par conséquent, $\overrightarrow{u}$ n'est pas un vecteur directeur de (AB).

a) Étudions si les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{AB}$.
Autrement dit, si le système suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} -1 = 1k \\ -1 = 1k \\ 1 = 0k \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 = 1k \\ -1 = 1k \\ 1 = 0k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = k \\ -1 = k \\ 1 = 0 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ ne sont pas colinéaires. Par conséquent, $\overrightarrow{u}$ n'est pas un vecteur directeur de (AB).

réponse **a)** fausse

a)

a)

Deuxième méthode :

On étudie si les points A et B appartiennent à Δ.

a)

Deuxième méthode :

On étudie si les points A et B appartiennent à Δ.

A appartient à Δ si, et seulement si le système suivant, d'inconnue t, admet une unique solution :

$$\begin{cases} x_A = 1 = 2 - t \\ y_A = 0 = 1 - t \\ z_A = 2 = 2 + t \end{cases}$$

a)

Deuxième méthode :

On étudie si les points A et B appartiennent à Δ.

A appartient à Δ si, et seulement si le système suivant, d'inconnue t, admet une unique solution :

$$\begin{cases} x_A = 1 = 2 - t \\ y_A = 0 = 1 - t \\ z_A = 2 = 2 + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 2 - t \\ 0 = 1 - t \\ 2 = 2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 0 \end{cases}$$

a)

Deuxième méthode :
On étudie si les points A et B appartiennent à Δ.

A appartient à Δ si, et seulement si le système suivant, d'inconnue t, admet une unique solution :

$$\begin{cases} x_A = 1 = 2 - t \\ y_A = 0 = 1 - t \\ z_A = 2 = 2 + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 2 - t \\ 0 = 1 - t \\ 2 = 2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 0 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution donc A n'appartient pas à la droite Δ.

a)

Deuxième méthode :

On étudie si les points A et B appartiennent à Δ.

A appartient à Δ si, et seulement si le système suivant, d'inconnue t, admet une unique solution :

$$\begin{cases} x_A = 1 = 2 - t \\ y_A = 0 = 1 - t \\ z_A = 2 = 2 + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 2 - t \\ 0 = 1 - t \\ 2 = 2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 0 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution donc A n'appartient pas à la droite Δ.

réponse **a)** fausse

b) Soit $\mathcal{P}$ le plan de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 5 + t + 4t' \\ y = -2 - t - 2t' \\ z = -4 - 2t - 6t' \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}$$

b) Soit $\mathcal{P}$ le plan de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 5 + t + 4t' \\ y = -2 - t - 2t' \\ z = -4 - 2t - 6t' \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}$$

On étudie si les points A, B et C appartiennent à $\mathcal{P}$.

b) A appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si le système suivant, d'inconnues t et t', admet une unique solution :

$$\begin{cases} x_A = 1 = 5 + t + 4t' \\ y_A = 0 = -2 - t - 2t' \\ z_A = 2 = -4 - 2t - 6t' \end{cases}$$

b) A appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si le système suivant, d'inconnues t et t', admet une unique solution :

$$\begin{cases} x_A = 1 = 5 + t + 4t' \\ y_A = 0 = -2 - t - 2t' \\ z_A = 2 = -4 - 2t - 6t' \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 5 + t + 4t' \\ 0 = -2 - t - 2t' \\ 2 = -4 - 2t - 6t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 - 4t' \\ 0 = -2 - (-4 - 4t') - 2t' \\ 6 = -2(-4 - 4t') - 6t' \end{cases}$$

b) A appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si le système suivant, d'inconnues t et t', admet une unique solution :

$$\begin{cases} x_A = 1 = 5 + t + 4t' \\ y_A = 0 = -2 - t - 2t' \\ z_A = 2 = -4 - 2t - 6t' \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 5 + t + 4t' \\ 0 = -2 - t - 2t' \\ 2 = -4 - 2t - 6t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 - 4t' \\ 0 = -2 - (-4 - 4t') - 2t' \\ 6 = -2(-4 - 4t') - 6t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t' = -1 \\ t' = -1 \end{cases}$$

b) A appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si le système suivant, d'inconnues t et t', admet une unique solution :

$$\begin{cases} x_A = 1 = 5 + t + 4t' \\ y_A = 0 = -2 - t - 2t' \\ z_A = 2 = -4 - 2t - 6t' \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 5 + t + 4t' \\ 0 = -2 - t - 2t' \\ 2 = -4 - 2t - 6t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 - 4t' \\ 0 = -2 - (-4 - 4t') - 2t' \\ 6 = -2(-4 - 4t') - 6t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t' = -1 \\ t' = -1 \end{cases}$$

Ce système admet une solution unique donc A appartient au plan $\mathcal{P}$.

b) B appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si le système suivant, d'inconnues t et t', admet une unique solution :

$$\begin{cases} x_B = 2 = 5 + t + 4t' \\ y_B = 1 = -2 - t - 2t' \\ z_B = 2 = -4 - 2t - 6t' \end{cases}$$

b) B appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si le système suivant, d'inconnues t et t', admet une unique solution :

$$\begin{cases} x_B = 2 = 5 + t + 4t' \\ y_B = 1 = -2 - t - 2t' \\ z_B = 2 = -4 - 2t - 6t' \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = 5 + t + 4t' \\ 1 = -2 - t - 2t' \\ 2 = -4 - 2t - 6t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 - 4t' \\ 3 = -(-3 - 4t') - 2t' \\ 6 = -2(-3 - 4t') - 6t' \end{cases}$$

b) B appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si le système suivant, d'inconnues t et t', admet une unique solution :

$$\begin{cases} x_B = 2 = 5 + t + 4t' \\ y_B = 1 = -2 - t - 2t' \\ z_B = 2 = -4 - 2t - 6t' \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = 5 + t + 4t' \\ 1 = -2 - t - 2t' \\ 2 = -4 - 2t - 6t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 - 4t' \\ 3 = -(-3 - 4t') - 2t' \\ 6 = -2(-3 - 4t') - 6t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t' = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$$

b) B appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si le système suivant, d'inconnues t et t', admet une unique solution :

$$\begin{cases} x_B = 2 = 5 + t + 4t' \\ y_B = 1 = -2 - t - 2t' \\ z_B = 2 = -4 - 2t - 6t' \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = 5 + t + 4t' \\ 1 = -2 - t - 2t' \\ 2 = -4 - 2t - 6t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 - 4t' \\ 3 = -(-3 - 4t') - 2t' \\ 6 = -2(-3 - 4t') - 6t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t' = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une solution unique donc B appartient au plan $\mathcal{P}$.

correction

b) C appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si le système suivant, d'inconnues t et t', admet une unique solution :

$$\begin{cases} x_C = 3 = 5 + t + 4t' \\ y_C = 0 = -2 - t - 2t' \\ z_C = 0 = -4 - 2t - 6t' \end{cases}$$

b) C appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si le système suivant, d'inconnues t et t', admet une unique solution :

$$\begin{cases} x_C = 3 = 5 + t + 4t' \\ y_C = 0 = -2 - t - 2t' \\ z_C = 0 = -4 - 2t - 6t' \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = 5 + t + 4t' \\ 0 = -2 - t - 2t' \\ 0 = -4 - 2t - 6t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 - 4t' \\ 0 = -2 - (-2 - 4t') - 2t' \\ 0 = -4 - 2(-2 - 4t') - 6t' \end{cases}$$

b) C appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si le système suivant, d'inconnues t et t', admet une unique solution :

$$\begin{cases} x_C = 3 = 5 + t + 4t' \\ y_C = 0 = -2 - t - 2t' \\ z_C = 0 = -4 - 2t - 6t' \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = 5 + t + 4t' \\ 0 = -2 - t - 2t' \\ 0 = -4 - 2t - 6t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 - 4t' \\ 0 = -2 - (-2 - 4t') - 2t' \\ 0 = -4 - 2(-2 - 4t') - 6t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t' = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$$

b) C appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si le système suivant, d'inconnues t et t', admet une unique solution :

$$\begin{cases} x_C = 3 = 5 + t + 4t' \\ y_C = 0 = -2 - t - 2t' \\ z_C = 0 = -4 - 2t - 6t' \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = 5 + t + 4t' \\ 0 = -2 - t - 2t' \\ 0 = -4 - 2t - 6t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 - 4t' \\ 0 = -2 - (-2 - 4t') - 2t' \\ 0 = -4 - 2(-2 - 4t') - 6t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t' = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une solution unique donc C appartient au plan $\mathcal{P}$.

b) C appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si le système suivant, d'inconnues t et t', admet une unique solution :

$$\begin{cases} x_C = 3 = 5 + t + 4t' \\ y_C = 0 = -2 - t - 2t' \\ z_C = 0 = -4 - 2t - 6t' \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = 5 + t + 4t' \\ 0 = -2 - t - 2t' \\ 0 = -4 - 2t - 6t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 - 4t' \\ 0 = -2 - (-2 - 4t') - 2t' \\ 0 = -4 - 2(-2 - 4t') - 6t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t' = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une solution unique donc C appartient au plan $\mathcal{P}$.

réponse **b)** vraie

c) Soit $\mathscr{Q}$ le plan de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + t + 2t' \\ y = t \\ z = 2 - 2t' \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}$$

c) Soit $\mathscr{Q}$ le plan de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + t + 2t' \\ y = t \\ z = 2 - 2t' \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}$$

Rappel

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}$.

$M(x\,;y\,;z) \in \mathscr{P}$ si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que : $\begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases}$.

On dit que ce système d'équations est une représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

c) $\mathscr{Q}$ passe donc par le point de coordonnées (1 ; 0 ; 2) soit le point A

c) $\mathscr{Q}$ passe donc par le point de coordonnées (1 ; 0 ; 2) soit le point A et est dirigé par les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui ne sont pas colinéaires et dirigent le plan (ABC)

c) $\mathscr{Q}$ passe donc par le point de coordonnées (1 ; 0 ; 2) soit le point A et est dirigé par les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui ne sont pas colinéaires et dirigent le plan (ABC)

réponse **c)** vraie