QCM d'autoévaluation, exercice 85 page 295

Sésamath

Maths TS obligatoire

énoncé

Dans un repère $(O\,; \vec{i}\,, \vec{j}\,, \vec{k}\,)$ de l'espace, on considère les points

$$A(1\,;0\,;2),\ B(2\,;1\,;2),\ C(3\,;0\,;0) \text{ et } D(5\,;-2\,;-4).$$

Les points A, B, C et D :

a) sont coplanaires

b) vérifient l'égalité $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

c) $D \in (BC)$

correction

a)

Rappel

Soit trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels α et β tels que

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.$$

correction

a)

Rappel

Soit trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels α et β tels que

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.$$

Méthode : coplanarité de quatre points

Pour montrer que quatre points sont coplanaires, il s'agit de démontrer que trois vecteurs formés à l'aide de ces quatre points sont coplanaires en écrivant l'un des vecteurs en fonction des deux autres.

a)

Rappel

Soit trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels α et β tels que

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.$$

Méthode : coplanarité de quatre points

Pour montrer que quatre points sont coplanaires, il s'agit de démontrer que trois vecteurs formés à l'aide de ces quatre points sont coplanaires en écrivant l'un des vecteurs en fonction des deux autres.

Rappel

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, soit $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$. Alors :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

correction

a) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\-2\\-6\end{pmatrix}$

correction

a) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\-2\\-6\end{pmatrix}$

Montrons tout d'abord que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

correction

a) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\-2\\-6\end{pmatrix}$

Montrons tout d'abord que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

a) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\-2\\-6\end{pmatrix}$

Montrons tout d'abord que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. Autrement dit, si le système suivant admet une unique solution : $\begin{cases} 2 = 1k \\ 0 = 1k \\ -2 = 0k \end{cases}$

correction

a) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\-2\\-6\end{pmatrix}$

Montrons tout d'abord que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. Autrement dit, si le système suivant admet une unique solution : $\begin{cases}2 = 1k\\0 = 1k\\-2 = 0k\end{cases}$

$$\begin{cases}2 = 1k\\0 = 1k\\-2 = 0k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2 = k\\0 = k\\-2 = 0\end{cases}$$

a) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\-2\\-6\end{pmatrix}$

Montrons tout d'abord que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. Autrement dit, si le système suivant admet une unique solution : $\begin{cases} 2 = 1k \\ 0 = 1k \\ -2 = 0k \end{cases}$

$$\begin{cases} 2 = 1k \\ 0 = 1k \\ -2 = 0k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ 0 = k \\ -2 = 0 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels α et β tels que

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.$$

correction

a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels α et β tels que

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.$$

Autrement dit, si le système suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} 4 = 1\alpha + 2\beta \\ -2 = 1\alpha + 0\beta \\ -6 = 0\alpha - 2\beta \end{cases}$$

a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels α et β tels que

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.$$

Autrement dit, si le système suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} 4 = 1\alpha + 2\beta \\ -2 = 1\alpha + 0\beta \\ -6 = 0\alpha - 2\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 = 1\alpha + 2\beta \\ -2 = 1\alpha + 0\beta \\ -6 = 0\alpha - 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 1 \times (-2) + 2 \times 3 \\ \alpha = -2 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels α et β tels que

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.$$

Autrement dit, si le système suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} 4 = 1\alpha + 2\beta \\ -2 = 1\alpha + 0\beta \\ -6 = 0\alpha - 2\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 = 1\alpha + 2\beta \\ -2 = 1\alpha + 0\beta \\ -6 = 0\alpha - 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 1 \times (-2) + 2 \times 3 \\ \alpha = -2 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

Ce système une solution unique donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels α et β tels que

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.$$

Autrement dit, si le système suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} 4 = 1\alpha + 2\beta \\ -2 = 1\alpha + 0\beta \\ -6 = 0\alpha - 2\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 = 1\alpha + 2\beta \\ -2 = 1\alpha + 0\beta \\ -6 = 0\alpha - 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 1 \times (-2) + 2 \times 3 \\ \alpha = -2 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

Ce système une solution unique donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires. Par conséquent, les points A, B, C et D sont coplanaires.

a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels α et β tels que

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.$$

Autrement dit, si le système suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} 4 = 1\alpha + 2\beta \\ -2 = 1\alpha + 0\beta \\ -6 = 0\alpha - 2\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 = 1\alpha + 2\beta \\ -2 = 1\alpha + 0\beta \\ -6 = 0\alpha - 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 1 \times (-2) + 2 \times 3 \\ \alpha = -2 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

Ce système une solution unique donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires. Par conséquent, les points A, B, C et D sont coplanaires.

réponse **a)** vraie

b) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\-2\\-6\end{pmatrix}$

b) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\-2\\-6\end{pmatrix}$

Rappel

Dans un repère $(O\ ;\ \vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs et k un nombre réel.

Alors :

$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix} \quad et \quad k\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$$

b) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\-2\\-6\end{pmatrix}$

Rappel

Dans un repère $(O\ ;\ \vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs et k un nombre réel.

Alors :

$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix} \quad et \quad k\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$$

Alors

$$-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-2\\-6\end{pmatrix}$$

b) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\-2\\-6\end{pmatrix}$

Rappel

Dans un repère $(O\ ;\ \vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs et k un nombre réel.

Alors :

$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix} \quad et \quad k\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$$

Alors

$$-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-2\\-6\end{pmatrix}$$

réponse **b)** vraie

c) $D \in (BC)$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires.

c) $D \in (BC)$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires.

On a : $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) $D \in (BC)$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires.

On a : $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}$

On a donc de façon évidente :

$$\overrightarrow{DB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$$

c) $D \in (BC)$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires.

On a : $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}$

On a donc de façon évidente :

$$\overrightarrow{DB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont donc colinéaires.

c) $D \in (BC)$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires.

On a : $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

On a donc de façon évidente :

$$\overrightarrow{DB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont donc colinéaires. Par conséquent,

$$D \in (BC).$$

correction

c) $D \in (BC)$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires.

On a : $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

On a donc de façon évidente :

$$\overrightarrow{DB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont donc colinéaires. Par conséquent,

$$D \in (BC).$$

réponse **c)** vraie