

QCM d'autoévaluation, exercice 83 page 294

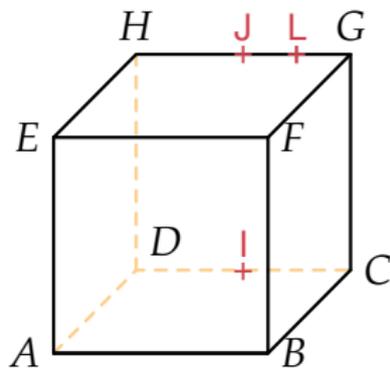
Sésamath

Maths TS obligatoire



énoncé

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté a , avec I, J les milieux respectifs des segments $[CD]$ et $[GH]$ et L est le milieu du segment $[GH]$.



Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ on a :

a) $\vec{BJ} \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) les points L, I, B et F sont coplanaires

c) $\vec{AJ} = 2\vec{AF} + \vec{GH} - \vec{CG}$

Rappel

Si O est un point de l'espace et \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} trois vecteurs non coplanaires, alors pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x; y; z)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}.$$

$(x; y; z)$ est le triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 x est l'abscisse de M , y est l'ordonnée de M et z est la cote de M .

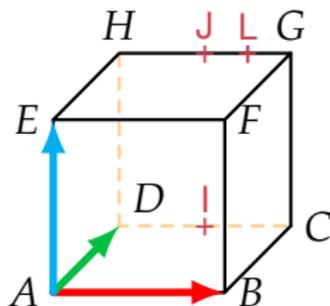
Rappel

Si O est un point de l'espace et \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} trois vecteurs non coplanaires, alors pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x; y; z)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}.$$

$(x; y; z)$ est le triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 x est l'abscisse de M , y est l'ordonnée de M et z est la cote de M .

Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ on a donc :



Rappel

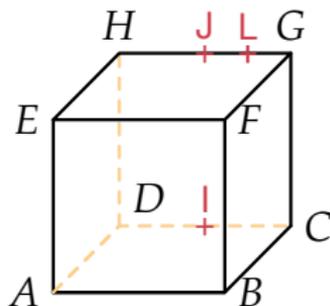
Si O est un point de l'espace et \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} trois vecteurs non coplanaires, alors pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x; y; z)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}.$$

$(x; y; z)$ est le triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 x est l'abscisse de M , y est l'ordonnée de M et z est la cote de M .

Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ on a donc :

$$A(0; 0; 0)$$



Rappel

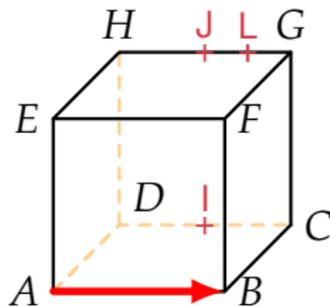
Si O est un point de l'espace et \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} trois vecteurs non coplanaires, alors pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x; y; z)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}.$$

$(x; y; z)$ est le triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 x est l'abscisse de M , y est l'ordonnée de M et z est la cote de M .

Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ on a donc :

$$A(0; 0; 0) \quad B(1; 0; 0)$$



Rappel

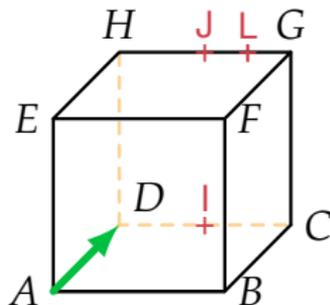
Si O est un point de l'espace et \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} trois vecteurs non coplanaires, alors pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x; y; z)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}.$$

$(x; y; z)$ est le triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 x est l'abscisse de M , y est l'ordonnée de M et z est la cote de M .

Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ on a donc :

$$A(0; 0; 0) \quad B(1; 0; 0) \quad D(0; 1; 0)$$



Rappel

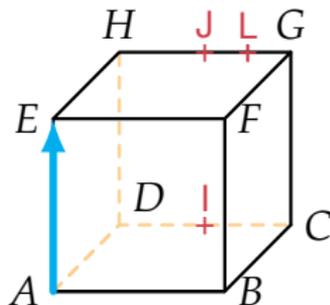
Si O est un point de l'espace et \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} trois vecteurs non coplanaires, alors pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x; y; z)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}.$$

$(x; y; z)$ est le triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 x est l'abscisse de M , y est l'ordonnée de M et z est la cote de M .

Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ on a donc :

$$A(0; 0; 0) \quad B(1; 0; 0) \quad D(0; 1; 0) \quad E(0; 0; 1)$$



Rappel

Si O est un point de l'espace et \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} trois vecteurs non coplanaires, alors pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x; y; z)$ tels que :

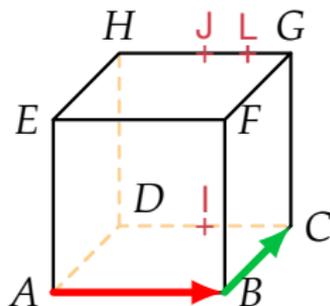
$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}.$$

$(x; y; z)$ est le triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 x est l'abscisse de M , y est l'ordonnée de M et z est la cote de M .

Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ on a donc :

$$A(0; 0; 0) \quad B(1; 0; 0) \quad D(0; 1; 0) \quad E(0; 0; 1)$$

$$C(1; 1; 0)$$



Rappel

Si O est un point de l'espace et \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} trois vecteurs non coplanaires, alors pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x; y; z)$ tels que :

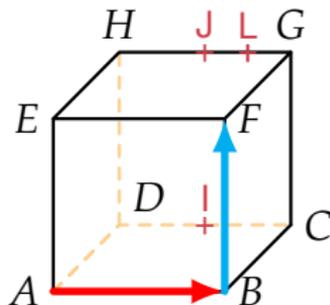
$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}.$$

$(x; y; z)$ est le triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 x est l'abscisse de M , y est l'ordonnée de M et z est la cote de M .

Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ on a donc :

$$A(0; 0; 0) \quad B(1; 0; 0) \quad D(0; 1; 0) \quad E(0; 0; 1)$$

$$C(1; 1; 0) \quad F(1; 0; 1)$$



Rappel

Si O est un point de l'espace et \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} trois vecteurs non coplanaires, alors pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x; y; z)$ tels que :

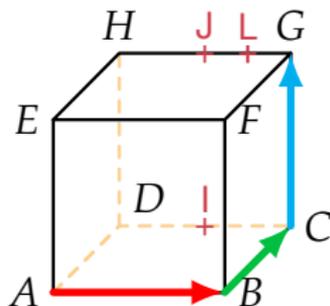
$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}.$$

$(x; y; z)$ est le triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 x est l'abscisse de M , y est l'ordonnée de M et z est la cote de M .

Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ on a donc :

$$A(0; 0; 0) \quad B(1; 0; 0) \quad D(0; 1; 0) \quad E(0; 0; 1)$$

$$C(1; 1; 0) \quad F(1; 0; 1) \quad G(1; 1; 1)$$



Rappel

Si O est un point de l'espace et \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} trois vecteurs non coplanaires, alors pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x; y; z)$ tels que :

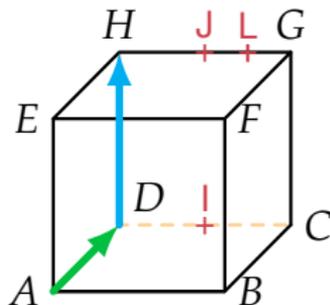
$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}.$$

$(x; y; z)$ est le triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 x est l'abscisse de M , y est l'ordonnée de M et z est la cote de M .

Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ on a donc :

$$A(0; 0; 0) \quad B(1; 0; 0) \quad D(0; 1; 0) \quad E(0; 0; 1)$$

$$C(1; 1; 0) \quad F(1; 0; 1) \quad G(1; 1; 1) \quad H(0; 1; 1)$$



Rappel

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$.
Alors le milieu K de $[AB]$ a pour coordonnées :

$$K \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

Rappel

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$.
Alors le milieu K de $[AB]$ a pour coordonnées :

$$K \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ on a donc :

Rappel

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$.
Alors le milieu K de $[AB]$ a pour coordonnées :

$$K \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ on a donc :

I milieu de $[DC]$ avec $D(0; 1; 0)$ et $C(1; 1; 0)$ donc $I(0,5; 1; 0)$

Rappel

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$.
Alors le milieu K de $[AB]$ a pour coordonnées :

$$K \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ on a donc :

I milieu de $[DC]$ avec $D(0; 1; 0)$ et $C(1; 1; 0)$ donc $I(0,5; 1; 0)$

J milieu de $[HG]$ avec $H(0; 1; 1)$ et $G(1; 1; 1)$ donc $J(0,5; 1; 1)$

Rappel

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$. Alors le milieu K de $[AB]$ a pour coordonnées :

$$K \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ on a donc :

I milieu de $[DC]$ avec $D(0; 1; 0)$ et $C(1; 1; 0)$ donc $I(0,5; 1; 0)$

J milieu de $[HG]$ avec $H(0; 1; 1)$ et $G(1; 1; 1)$ donc $J(0,5; 1; 1)$

K milieu de $[JG]$ avec $J(0,5; 1; 1)$ et $G(1; 1; 1)$ donc $L(0,75; 1; 1)$

a)

Rappel

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$.
Alors :

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

a)

Rappel

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$.
Alors :

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ on a donc :

a)

Rappel

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$.
Alors :

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ on a donc :

$$\vec{Bj} \begin{pmatrix} 0,5 - 1 \\ 1 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix}$$

a)

Rappel

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$.
Alors :

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ on a donc :

$$\vec{Bj} \begin{pmatrix} 0,5 - 1 \\ 1 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \vec{Bj} \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a)

Rappel

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$.
Alors :

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ on a donc :

$$\vec{Bj} \begin{pmatrix} 0,5 - 1 \\ 1 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \vec{Bj} \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La réponse **a)** est vraie.

- b) Les points L , I , B et F sont coplanaires si, et seulement si, les vecteurs \vec{BI} , \vec{BL} et \vec{BF} sont coplanaires.

- b) Les points L, I, B et F sont coplanaires si, et seulement si, les vecteurs \vec{BI} , \vec{BL} et \vec{BF} sont coplanaires.

Rappel

Soit trois vecteurs non nuls \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} tels que \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires. \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels α et β tels que

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.$$

- b) Les points L, I, B et F sont coplanaires si, et seulement si, les vecteurs \overrightarrow{BI} , \overrightarrow{BL} et \overrightarrow{BF} sont coplanaires.

Rappel

Soit trois vecteurs non nuls \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} tels que \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires. \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels α et β tels que

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.$$

Par conséquent, les vecteurs \overrightarrow{BI} , \overrightarrow{BL} et \overrightarrow{BF} sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels α et β tels que

$$\overrightarrow{BF} = \alpha\overrightarrow{BI} + \beta\overrightarrow{BL}.$$

- b) Les points L, I, B et F sont coplanaires si, et seulement si, les vecteurs \vec{BI} , \vec{BL} et \vec{BF} sont coplanaires.

Rappel

Soit trois vecteurs non nuls \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} tels que \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires. \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels α et β tels que

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.$$

Par conséquent, les vecteurs \vec{BI} , \vec{BL} et \vec{BF} sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels α et β tels que

$$\vec{BF} = \alpha\vec{BI} + \beta\vec{BL}.$$

Or

$$\vec{BF} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{BI} \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{BL} \begin{pmatrix} -0.75 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- b) Ainsi, les vecteurs \vec{BI} , \vec{BL} et \vec{BF} sont coplanaires si, et seulement si, le système suivant admet une unique solution :

- b) Ainsi, les vecteurs \vec{BI} , \vec{BL} et \vec{BF} sont coplanaires si, et seulement si, le système suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} 0 = -0,5\alpha - 0,75\beta \\ 0 = 1\alpha + 1\beta \\ 1 = 0\alpha + 1\beta \end{cases}$$

- b) Ainsi, les vecteurs \vec{BI} , \vec{BL} et \vec{BF} sont coplanaires si, et seulement si, le système suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} 0 = -0,5\alpha - 0,75\beta \\ 0 = 1\alpha + 1\beta \\ 1 = 0\alpha + 1\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -0,5\alpha - 0,75\beta \\ 0 = 1\alpha + 1\beta \\ 1 = 0\alpha + 1\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -0,5\alpha - 0,75 \\ 0 = \alpha + 1 \\ 1 = \beta \end{cases}$$

- b) Ainsi, les vecteurs \vec{BI} , \vec{BL} et \vec{BF} sont coplanaires si, et seulement si, le système suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} 0 = -0,5\alpha - 0,75\beta \\ 0 = 1\alpha + 1\beta \\ 1 = 0\alpha + 1\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -0,5\alpha - 0,75\beta \\ 0 = 1\alpha + 1\beta \\ 1 = 0\alpha + 1\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -0,5\alpha - 0,75 \\ 0 = \alpha + 1 \\ 1 = \beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1,5 = \alpha \\ -1 = \alpha \\ 1 = \beta \end{cases}$$

- b) Ainsi, les vecteurs \vec{BI} , \vec{BL} et \vec{BF} sont coplanaires si, et seulement si, le système suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} 0 = -0,5\alpha - 0,75\beta \\ 0 = 1\alpha + 1\beta \\ 1 = 0\alpha + 1\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -0,5\alpha - 0,75\beta \\ 0 = 1\alpha + 1\beta \\ 1 = 0\alpha + 1\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -0,5\alpha - 0,75 \\ 0 = \alpha + 1 \\ 1 = \beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1,5 = \alpha \\ -1 = \alpha \\ 1 = \beta \end{cases}$$

Ce système n'a pas une solution unique donc les vecteurs \vec{BI} , \vec{BL} et \vec{BF} ne sont pas coplanaires, par conséquent, les points B , I , L et F non plus.

d) On a :

d) On a :

$$\overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{GH} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) On a :

$$\overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{GH} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$2\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{CG} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) On a :

$$\vec{AF} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{GH} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{CG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$2\vec{AF} + \vec{GH} - \vec{CG} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Or,

$$\vec{AJ} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) On a :

$$\vec{AF} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{GH} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{CG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$2\vec{AF} + \vec{GH} - \vec{CG} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Or,

$$\vec{AJ} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La réponse **c)** est fausse.