Exercice 86 page 256

Sésamath

Maths TS obligatoire

ERRATUM : en rouge changement d'énoncé

Effectuer les calculs suivants en utilisant la forme exponentielle.

1. $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$

2. $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^3$

3. $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^2$

4. $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^3$

5. $(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^4$

6. $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\,\dfrac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}$

1

Rappel

Soit $z = a + ib$ un complexe.

- $|z| = \sqrt{z \times \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Si $z \neq 0$ alors $\theta = \arg(z)$ peut être déterminé par :

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

correction

1. Soit $z = 1 + \mathrm{i}$

correction

1. Soit $z = 1 + \mathrm{i}$

   On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = 1$

correction

1. Soit $z = 1 + \mathrm{i}$

   On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = 1$

   <u>Calcul du module de z :</u>

1. Soit $z = 1 + \mathrm{i}$

   On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = 1$

   <u>Calcul du module de z :</u>

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

1. Soit $z = 1 + \mathrm{i}$

On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = 1$

Calcul du module de z :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Calcul d'un argument de z :

1. Soit $z = 1 + \mathrm{i}$

   On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = 1$

   Calcul du module de z :

   $$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

   Calcul d'un argument de z : Soit θ un argument de z, on a :

1. Soit $z = 1 + \mathrm{i}$

   On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = 1$
   Calcul du module de z :
   $$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
   Calcul d'un argument de z : Soit θ un argument de z, on a :
   $$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} \\ \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

1. Soit $z = 1 + \mathrm{i}$

   On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = 1$

   Calcul du module de z :

   $$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

   Calcul d'un argument de z : Soit θ un argument de z, on a :

   $$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

1. Soit $z = 1 + \mathrm{i}$

   On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = 1$
   Calcul du module de z :
   $$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
   Calcul d'un argument de z : Soit θ un argument de z, on a :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} \end{array}\right.$$

1. Soit $z = 1 + \mathrm{i}$

   On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = 1$
   Calcul du module de z :
   $$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
   Calcul d'un argument de z : Soit θ un argument de z, on a :
   $$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

1. Soit $z = 1 + \mathrm{i}$

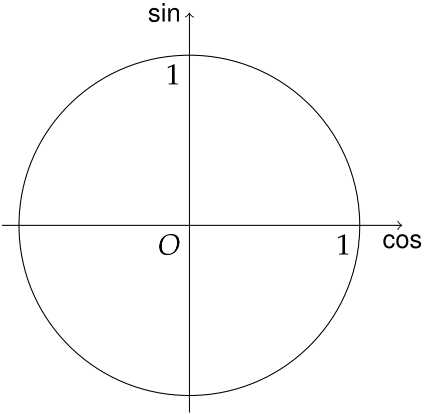
On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = 1$
<u>Calcul du module de z :</u>

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

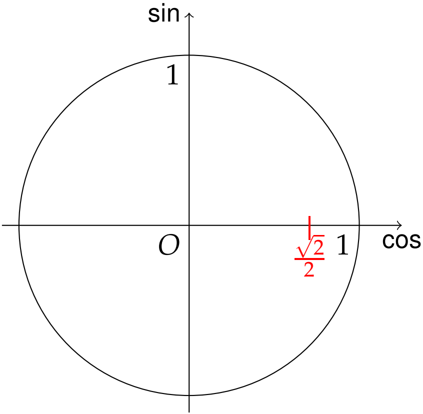
<u>Calcul d'un argument de z :</u> Soit θ un argument de z, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

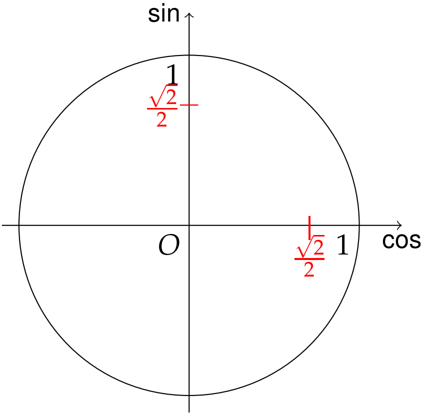
1



1

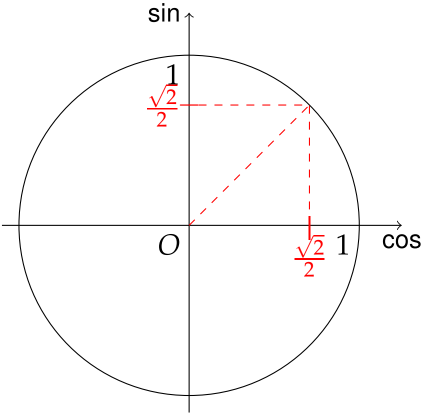


1

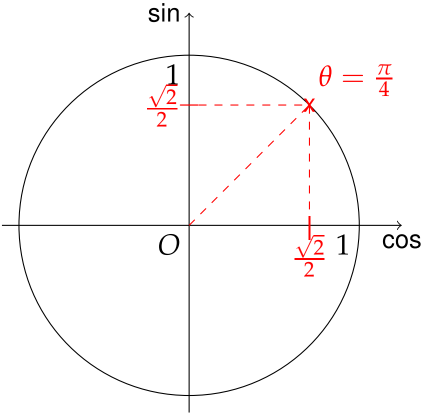


correction

1

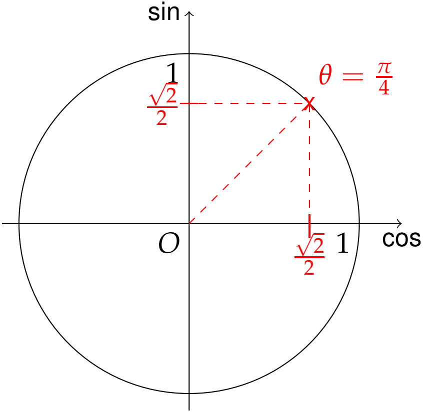


1



correction

1



donc un argument de z, à 2π près, est :

$$arg(z) = \frac{\pi}{4}$$

1. Ainsi,

$$1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

1. Ainsi,

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

De plus,

$$1-\mathrm{i}=\overline{1+\mathrm{i}}=\overline{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$$

1. Ainsi,

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

De plus,

$$1-\mathrm{i}=\overline{1+\mathrm{i}}=\overline{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$

1. Ainsi,

$$1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

De plus,

$$1 - \mathrm{i} = \overline{1 + \mathrm{i}} = \overline{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$

Donc,

$$1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

1. Par conséquent,

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$$

1 Par conséquent,

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$$

1. Par conséquent,

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$$

Rappel

Pour tous nombres réels θ_1, θ_2 : $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}$

1. Par conséquent,

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$$

Rappel

Pour tous nombres réels θ_1, θ_2 : $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}$

Donc,

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

1. Par conséquent,

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$$

Rappel

Pour tous nombres réels θ_1, θ_2 : $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}$

Donc,

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$

1. Par conséquent,

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$$

Rappel

Pour tous nombres réels θ_1, θ_2 : $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}$

Donc,

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$$

2. On a, d'après 1),

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$

2. On a, d'après 1),

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\ \ n \in \mathbb{Z}$

2 On a, d'après 1),

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\ \ n \in \mathbb{Z}$

Donc,

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^3 = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right)^3$$

2 On a, d'après 1),

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\ \ n \in \mathbb{Z}$

Donc,

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^3 = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right)^3$$

2 On a, d'après 1),

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \;\; n \in \mathbb{Z}$

Donc,

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^3 = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right)^3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$$

2 On a, d'après 1),

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \;\; n \in \mathbb{Z}$

Donc,

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^3 = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right)^3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = -\mathrm{i}$$

3. Soit $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

3. Soit $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

   On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = \sqrt{3}$

3. Soit $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = \sqrt{3}$

<u>Calcul du module de z :</u>

3. Soit $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = \sqrt{3}$

<u>Calcul du module de z :</u>

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

3 Soit $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = \sqrt{3}$

Calcul du module de z :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

Calcul d'un argument de z :

3 Soit $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = \sqrt{3}$

Calcul du module de z :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

Calcul d'un argument de z : Soit θ un argument de z, on a :

3 Soit $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = \sqrt{3}$

Calcul du module de z :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

Calcul d'un argument de z : Soit θ un argument de z, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} \\ \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

3 Soit $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = \sqrt{3}$

Calcul du module de z :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

Calcul d'un argument de z : Soit θ un argument de z, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{2} \\ \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

3 Soit $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = \sqrt{3}$

Calcul du module de z :

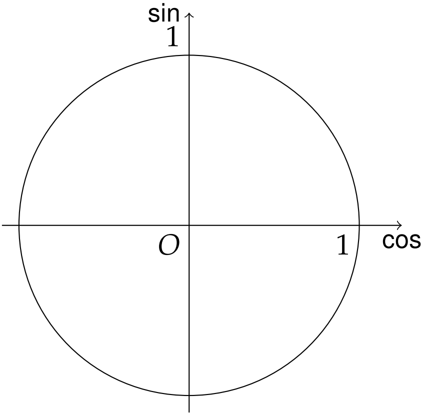
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

Calcul d'un argument de z : Soit θ un argument de z, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{2} \\ \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

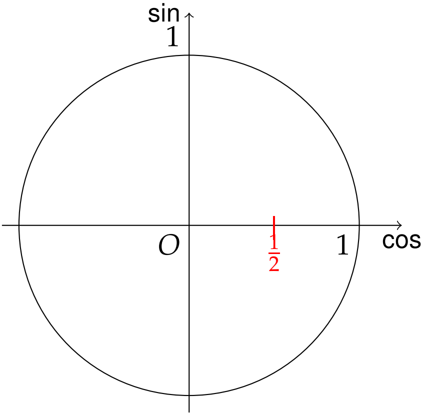
correction

1

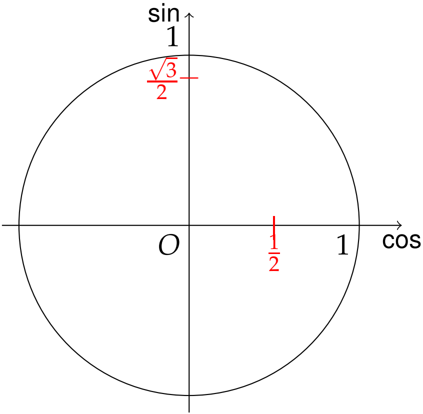


correction

1

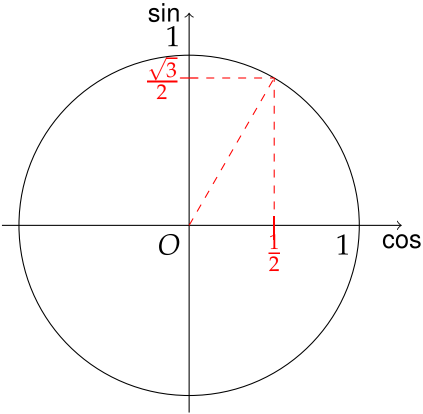


1



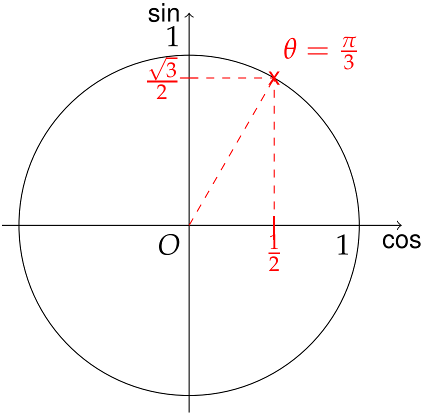
correction

1

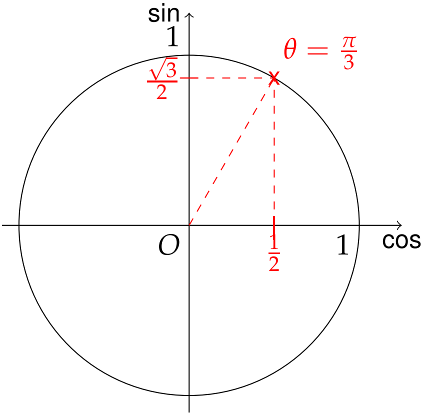


correction

1



1



donc un argument de z, à 2π près, est :

$$arg(z) = \frac{\pi}{3}$$

3. Ainsi,

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

3. Ainsi,

$$1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\ n \in \mathbb{Z}$

3. Ainsi,

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\ n\in\mathbb{Z}$

Donc,

$$\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2=\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^2$$

3. Ainsi,

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\ \ n \in \mathbb{Z}$

Donc,

$$\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 = \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^2 = 2^2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^2$$

3. Ainsi,

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\ n\in\mathbb{Z}$

Donc,

$$\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2=\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^2=2^2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^2=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$$

3 Ainsi,

$$1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \;\; n \in \mathbb{Z}$

Donc,

$$\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 = \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^2 = 2^2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^2 = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$$

soit :

$$\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

3. Ainsi,

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\ n\in\mathbb{Z}$

Donc,

$$\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2=\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^2=2^2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^2=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$$

soit :

$$\begin{aligned}\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2&=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)\\&=4\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\end{aligned}$$

3 Ainsi,

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\ n\in\mathbb{Z}$

Donc,

$$\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2=\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^2=2^2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^2=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$$

soit :

$$\begin{aligned}\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2&=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)\\&=4\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}\end{aligned}$$

4 On a,

$$1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

4. On a,

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\ n\in\mathbb{Z}$

4 On a,

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\ n\in\mathbb{Z}$

Donc,

$$\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3=\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^3$$

4. On a,

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\ n \in \mathbb{Z}$

Donc,

$$\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3 = \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^3 = 2^3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^3$$

4 On a,

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\ \ n\in\mathbb{Z}$

Donc,

$$\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3=\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^3=2^3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^3=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{3}}$$

4 On a,

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\ n\in\mathbb{Z}$

Donc,

$$\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3=\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^3=2^3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^3=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{3}}=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$$

4 On a,

$$1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta},\ n \in \mathbb{Z}$

Donc,

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^3 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = 2^3\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = 8e^{i\frac{3\pi}{3}} = 8e^{i\pi} = -8$$

5. On a,

$$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

5. On a,

$$1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$

5. On a,

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$

Donc,

$$1-\mathrm{i}\sqrt{3}=\overline{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

correction

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}, \; n \in \mathbb{Z}$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\ n \in \mathbb{Z}$

5 Donc,

$$\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^4 = \left(2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^4$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\ n \in \mathbb{Z}$

5. Donc,

$$\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^4 = \left(2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 2^4\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^4$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\ n \in \mathbb{Z}$

5 Donc,

$$\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^4 = \left(2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 2^4\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\ n \in \mathbb{Z}$

5 Donc,

$$\left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^4 = \left(2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 2^4\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$$

soit :

$$\left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^4 = 16\left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\ n \in \mathbb{Z}$

5. Donc,

$$\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^4 = \left(2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 2^4\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$$

soit :

$$\begin{aligned}\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^4 &= 16\left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)\\ &= 16\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\end{aligned}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta},\ \ n \in \mathbb{Z}$

5 Donc,

$$\left(1 - i\sqrt{3}\right)^4 = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 2^4\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 16e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

soit :

$$\begin{aligned}\left(1 - i\sqrt{3}\right)^4 &= 16\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\\ &= 16\left(\frac{1}{2} + i\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= 8 - 8i\sqrt{3}\end{aligned}$$

correction

6 $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\dfrac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}$

Commençons par simplifier cette expression :

6 $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\dfrac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}$
Commençons par simplifier cette expression :

$$\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}=\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\times\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)}{1+\mathrm{i}}$$

6 $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\dfrac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}$

Commençons par simplifier cette expression :

$$\begin{aligned}\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}} &= \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\times\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)}{1+\mathrm{i}}\\ &= \frac{\sqrt{2}\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)}{1+\mathrm{i}}\end{aligned}$$

6 Or d'après les questions précédentes :

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad 1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

6 Or d'après les questions précédentes :

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad 1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

donc :

$$\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\,\frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}=\frac{\sqrt{2}\times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$$

6 Or d'après les questions précédentes :

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad 1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

donc :

$$\begin{aligned}\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\,\frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}} &= \frac{\sqrt{2}\times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}\\ &= 2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}\end{aligned}$$

6 Or d'après les questions précédentes :

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad 1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

donc :

$$\begin{aligned}\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\,\frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}} &= \frac{\sqrt{2}\times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}\\ &= 2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}\end{aligned}$$

Rappel

Pour tous nombres réels θ_1, θ_2 : $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}$

6 Or d'après les questions précédentes :

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad 1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

donc :

$$\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\,\frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}=\frac{\sqrt{2}\times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$$

$$=2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$$

Rappel

Pour tous nombres réels θ_1, θ_2 : $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}$

Donc,

$$\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\,\frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

6 Or d'après les questions précédentes :

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad 1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

donc :

$$\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}=\frac{\sqrt{2}\times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = 2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$$

Rappel

Pour tous nombres réels θ_1, θ_2 : $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}$

Donc,

$$\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$$