Exercice 80 page 255

Sésamath

Maths TS obligatoire

On considère les nombres complexes

$$z = \frac{\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z' = 1 - \mathrm{i}$$

1. Déterminer le module et un argument de z, z' et $\frac{z}{z'}$.
2. Déterminer la forme algébrique de $\frac{z}{z'}$.
3. En déduire que

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

et

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

1

Rappel

Soit $z = a + ib$ un complexe.

- $|z| = \sqrt{z \times \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- Si $z \neq 0$ alors $\theta = \arg(z)$ peut être déterminé par :

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

correction

1 $z = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

correction

1. $z = \dfrac{\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   On a $a = \Re e(z) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ et $b = \Im m(z) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

1. $z = \dfrac{\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   On a $a = \Re e(z) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ et $b = \Im m(z) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   Calcul du module de z :

1. $z = \dfrac{\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   On a $a = \Re e(z) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ et $b = \Im m(z) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   Calcul du module de z :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{2}$$

1. $z = \dfrac{\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   On a $a = \Re e(z) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ et $b = \Im m(z) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   <u>Calcul du module de z :</u>

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{2}$$

   <u>Calcul d'un argument de z :</u>

correction

1. $z = \dfrac{\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   On a $a = \Re e(z) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ et $b = \Im m(z) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   <u>Calcul du module de z :</u>

   $$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{2}$$

   <u>Calcul d'un argument de z :</u> Soit θ un argument de z, on a :

1 $z=\dfrac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

On a $a=\Re e(z)=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ et $b=\Im m(z)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Calcul du module de z :

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{6}{4}+\frac{2}{4}}=\sqrt{2}$$

Calcul d'un argument de z : Soit θ un argument de z, on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|}\\[2em] \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|}\end{array}\right.$$

1 $z = \dfrac{\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

On a $a = \Re e(z) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ et $b = \Im m(z) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Calcul du module de z :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{2}$$

Calcul d'un argument de z : Soit θ un argument de z, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}} \\ \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

1 $z = \dfrac{\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

On a $a = \Re e(z) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ et $b = \Im m(z) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

<u>Calcul du module de z :</u>

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{2}$$

<u>Calcul d'un argument de z :</u> Soit θ un argument de z, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} \\ \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

correction

1. $z = \dfrac{\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

On a $a = \Re e(z) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ et $b = \Im m(z) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Calcul du module de z :

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4}+\frac{2}{4}} = \sqrt{2}$$

Calcul d'un argument de z : Soit θ un argument de z, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

correction

1. $z=\dfrac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   On a $a=\Re e(z)=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ et $b=\Im m(z)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   <u>Calcul du module de z :</u>

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{6}{4}+\frac{2}{4}}=\sqrt{2}$$

   <u>Calcul d'un argument de z :</u> Soit θ un argument de z, on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|}=\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|}=\dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$$

1. $z = \dfrac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

On a $a = \Re e(z) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ et $b = \Im m(z) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Calcul du module de z :

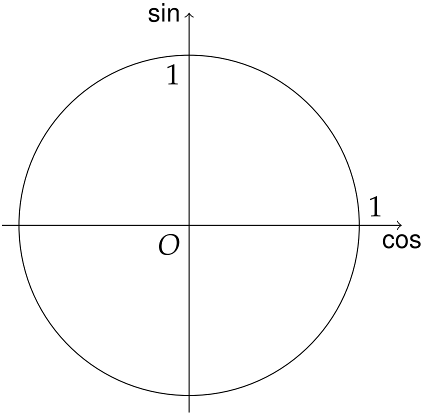
$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4}+\frac{2}{4}} = \sqrt{2}$$

Calcul d'un argument de z : Soit θ un argument de z, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

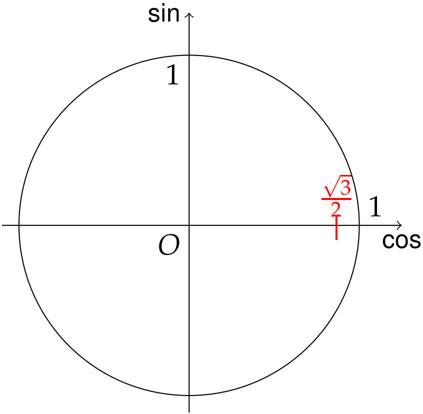
correction

1

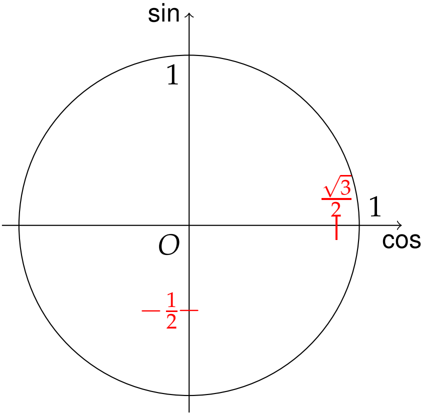


correction

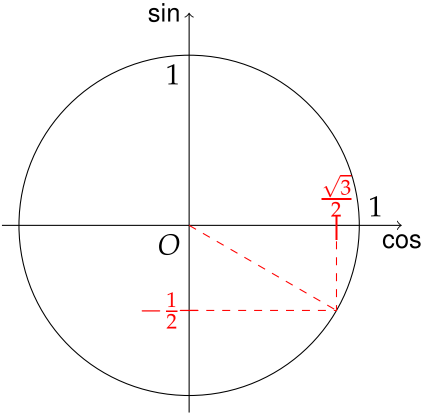
1



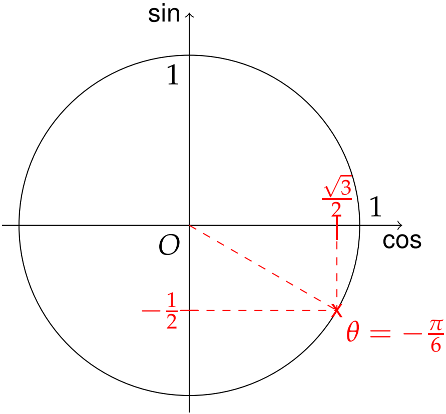
1



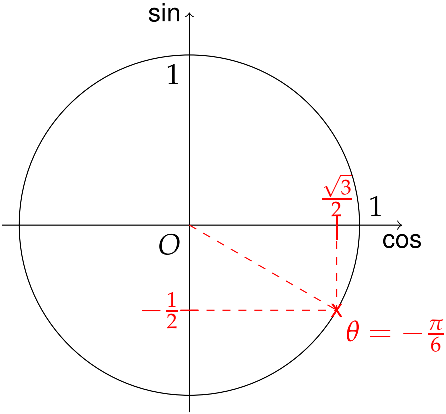
1



1



1



donc un argument de z, à 2π près, est :

$$arg(z) = -\frac{\pi}{6}$$

Rappel

Soit $z = a + ib$ un complexe.

1
- $|z| = \sqrt{z \times \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- Si $z \neq 0$ alors $\theta = \arg(z)$ peut être déterminé par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} \end{array} \right.$$

correction

1. $z' = 1 - \mathrm{i}$

1. $z' = 1 - \mathrm{i}$

   On a $a' = \Re e(z') = 1$ et $b' = \Im m(z') = -1$

1. $z' = 1 - \mathrm{i}$

   On a $a' = \Re e(z') = 1$ et $b' = \Im m(z') = -1$
   Calcul du module de z' :

1. $z' = 1 - \mathrm{i}$

   On a $a' = \Re e(z') = 1$ et $b' = \Im m(z') = -1$

   Calcul du module de z' :

$$|z'| = \sqrt{a'^2 + b'^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

1. $z' = 1 - \mathrm{i}$

   On a $a' = \Re e(z') = 1$ et $b' = \Im m(z') = -1$

   <u>Calcul du module de z' :</u>

   $$|z'| = \sqrt{a'^2 + b'^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

   <u>Calcul d'un argument de z' :</u>

1. $z' = 1 - \mathrm{i}$

   On a $a' = \Re e(z') = 1$ et $b' = \Im m(z') = -1$

   Calcul du module de z' :

   $$|z'| = \sqrt{a'^2 + b'^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

   Calcul d'un argument de z' : Soit θ' un argument de z', on a :

1. $z' = 1 - \mathrm{i}$

On a $a' = \Re e(z') = 1$ et $b' = \Im m(z') = -1$

Calcul du module de z' :

$$|z'| = \sqrt{a'^2 + b'^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Calcul d'un argument de z' : Soit θ' un argument de z', on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta') &= \dfrac{a'}{|z'|} \\ \\ \sin(\theta') &= \dfrac{b'}{|z'|} \end{cases}$$

1. $z' = 1 - \mathrm{i}$

   On a $a' = \Re e(z') = 1$ et $b' = \Im m(z') = -1$

   Calcul du module de z' :

$$|z'| = \sqrt{a'^2 + b'^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

   Calcul d'un argument de z' : Soit θ' un argument de z', on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta') & = & \dfrac{a'}{|z'|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \sin(\theta') & = & \dfrac{b'}{|z'|} \end{cases}$$

1. $z' = 1 - \mathrm{i}$

   On a $a' = \Re e(z') = 1$ et $b' = \Im m(z') = -1$

   <u>Calcul du module de z' :</u>

   $$|z'| = \sqrt{a'^2 + b'^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

   <u>Calcul d'un argument de z' :</u> Soit θ' un argument de z', on a :

   $$\begin{cases} \cos(\theta') & = & \dfrac{a'}{|z'|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \sin(\theta') & = & \dfrac{b'}{|z'|} \end{cases}$$

1. $z' = 1 - \mathrm{i}$

   On a $a' = \Re e(z') = 1$ et $b' = \Im m(z') = -1$
   <u>Calcul du module de z' :</u>

$$|z'| = \sqrt{a'^2 + b'^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

<u>Calcul d'un argument de z' :</u> Soit θ' un argument de z', on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \cos(\theta') & = & \dfrac{a'}{|z'|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \sin(\theta') & = & \dfrac{b'}{|z'|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

1. $z' = 1 - \mathrm{i}$

   On a $a' = \Re e(z') = 1$ et $b' = \Im m(z') = -1$

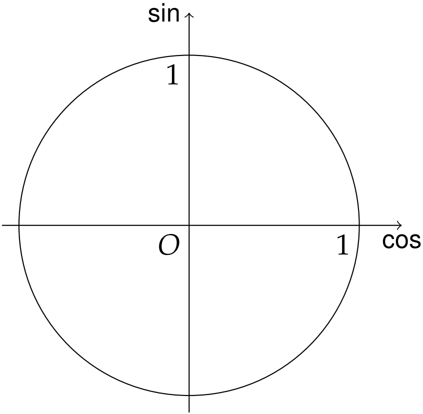
   <u>Calcul du module de z' :</u>

$$|z'| = \sqrt{a'^2 + b'^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

   <u>Calcul d'un argument de z' :</u> Soit θ' un argument de z', on a :

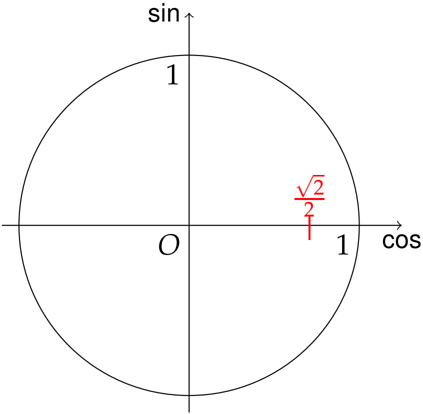
$$\left\{\begin{array}{rcl} \cos(\theta') & = & \dfrac{a'}{|z'|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \sin(\theta') & = & \dfrac{b'}{|z'|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

3

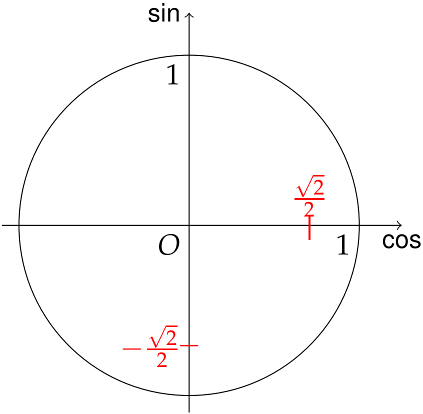


correction

3

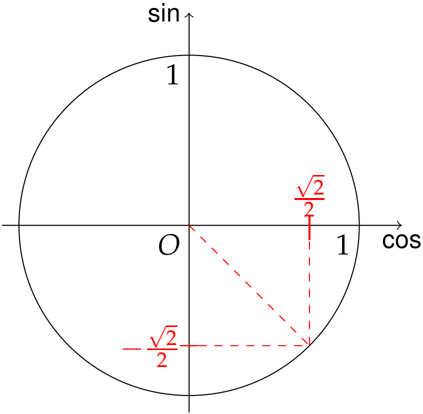


3

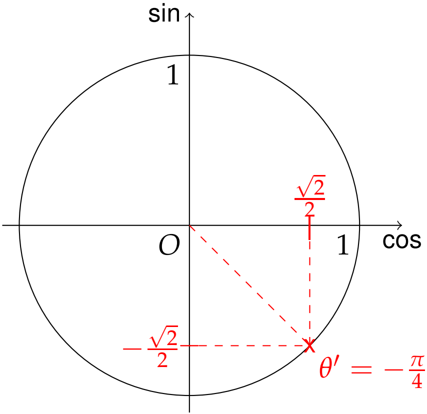


correction

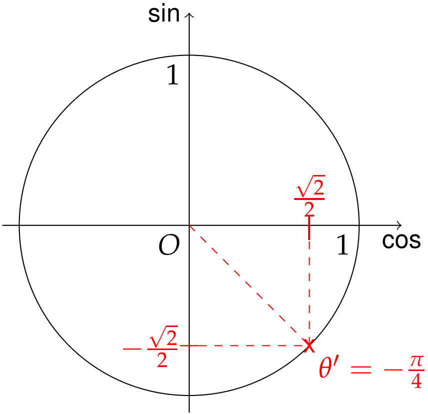
3



3



3



donc un argument de z', à 2π près, est :

$$arg(z') = -\frac{\pi}{4}$$

1

Rappel

Soient z et z' deux nombres complexes avec $z' \neq 0$:

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

et

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi] \text{ pour } z \neq 0$$

1. Par conséquent, le module de $\dfrac{z}{z'}$ est :

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

1. Par conséquent, le module de $\dfrac{z}{z'}$ est :

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

et un argument de $\dfrac{z}{z'}$, à 2π près, est :

$$arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z') = -\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12} \;\; [2\pi]$$

correction

2. La forme algébrique de $\dfrac{z}{z'}$ est :

2. La forme algébrique de $\dfrac{z}{z'}$ est :

$$\frac{z}{z'} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}}{1-\mathrm{i}}$$

2 La forme algébrique de $\frac{z}{z'}$ est :

$$\begin{aligned}\frac{z}{z'} &= \frac{\frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}}{1-\mathrm{i}} \\ &= \frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2(1-\mathrm{i})}\end{aligned}$$

2 La forme algébrique de $\dfrac{z}{z'}$ est :

$$\begin{aligned}\frac{z}{z'} &= \frac{\frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}}{1-\mathrm{i}}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2(1-\mathrm{i})}\\ &= \frac{\left(\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)(1+\mathrm{i})}{2(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}\end{aligned}$$

correction

2 La forme algébrique de $\dfrac{z}{z'}$ est :

$$\begin{aligned}\frac{z}{z'} &= \frac{\frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}}{1-\mathrm{i}}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2(1-\mathrm{i})}\\ &= \frac{\left(\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)(1+\mathrm{i})}{2(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\mathrm{i}\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}-\mathrm{i}^2\sqrt{2}}{2(1^2+1^2)}\end{aligned}$$

correction

2 La forme algébrique de $\dfrac{z}{z'}$ est :

$$\begin{aligned}
\frac{z}{z'} &= \frac{\frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}}{1-\mathrm{i}} \\
&= \frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2(1-\mathrm{i})} \\
&= \frac{\left(\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)(1+\mathrm{i})}{2(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} \\
&= \frac{\sqrt{6}+\mathrm{i}\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}-\mathrm{i}^2\sqrt{2}}{2(1^2+1^2)} \\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

correction

2 La forme algébrique de $\dfrac{z}{z'}$ est :

$$\begin{aligned}
\frac{z}{z'} &= \frac{\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}}{1-i} \\
&= \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)} \\
&= \frac{\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)(1+i)}{2(1-i)(1+i)} \\
&= \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{6}-i\sqrt{2}-i^2\sqrt{2}}{2(1^2+1^2)} \\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

3 On a $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = 1$ et $arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \dfrac{\pi}{12} \ [2\pi]$, on a donc aussi :

3 On a $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = 1$ et $arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$, on a donc aussi :

$$\frac{z}{z'} = 1\left(\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}$$

correction

3 On a $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = 1$ et $arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$, on a donc aussi :

$$\frac{z}{z'} = 1\left(\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}$$

Or d'après la question précédente :

$$\frac{z}{z'} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

3 On a $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = 1$ et $arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$, on a donc aussi :

$$\frac{z}{z'} = 1\left(\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}$$

Or d'après la question précédente :

$$\frac{z}{z'} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Ainsi, en égalant es parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\Re e\left(\frac{z}{z'}\right) = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

et

$$\Im m\left(\frac{z}{z'}\right) = \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$