Exercice 61 page 253

Sésamath

Maths TS obligatoire

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

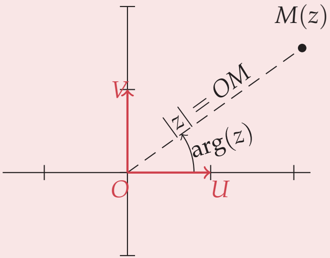
1. $z_1 = 7$
2. $z_2 = 2\mathrm{i}$
3. $z_3 = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{3}$
4. $z_4 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$

correction

Rappel

Soit z un complexe. M (ou $\overrightarrow{w}$) un point (ou un vecteur) d'affixe z.

- On appelle **module** de z la distance OM (ou la norme $||\overrightarrow{w}||$). Le module de z est noté $|z|$.
- Si $z \neq 0$, on appelle **argument** de z <u>une</u> mesure en radians de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM}}\right)$ (ou $(\widehat{\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{w}})$). Un argument de z est noté $\arg(z)$.
- Le complexe nul n'a pas d'argument et a pour module 0.



correction

1. $z_1 = 7$

correction

1. $z_1 = 7$
   z_1 est un réel strictement positif donc

1. $z_1 = 7$
   z_1 est un réel strictement positif donc
   le module de z_1 est :
   $$|z_1| = 7$$

1. $z_1 = 7$
   z_1 est un réel strictement positif donc
   le module de z_1 est :
   $$|z_1| = 7$$
   et un argument de z_1, à 2π près, est :
   $$arg(z_1) = 0$$

correction

2. $z_2 = 2\text{i}$

correction

2. $z_2 = 2\mathrm{i}$
   z_2 est un imaginaire pur de partie imaginaire $(b = 2)$ strictement positive donc

2. $z_2 = 2\mathrm{i}$
   z_2 est un imaginaire pur de partie imaginaire ($b = 2$) strictement positive donc
   le module de z_2 est :
   $$|z_2| = 2$$

2. $z_2 = 2\mathrm{i}$
   z_2 est un imaginaire pur de partie imaginaire ($b = 2$) strictement positive donc
   le module de z_2 est :
   $$|z_2| = 2$$
   et un argument de z_2, à 2π près, est :
   $$arg(z_2) = \frac{\pi}{2}$$

correction

Rappel

Soit $z = a + ib$ un complexe.

- $|z| = \sqrt{z \times \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Si $z \neq 0$ alors $\theta = \arg(z)$ peut être déterminé par :

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

correction

3. $z_3 = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{3}$

correction

3 $z_3 = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{3} = \dfrac{-1}{3} + \dfrac{1}{3}\mathrm{i}$

correction

3. $z_3 = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{3} = \dfrac{-1}{3} + \dfrac{1}{3}\mathrm{i}$

   On a $a_3 = \Re e(z_3) = \dfrac{-1}{3}$ et $b_3 = \Im m(z_3) = \dfrac{1}{3}$

3 $z_3 = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{3} = \dfrac{-1}{3} + \dfrac{1}{3}\mathrm{i}$

On a $a_3 = \Re e(z_3) = \dfrac{-1}{3}$ et $b_3 = \Im m(z_3) = \dfrac{1}{3}$

<u>Calcul du module de z_3 :</u>

3 $z_3 = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{3} = \dfrac{-1}{3} + \dfrac{1}{3}\mathrm{i}$

On a $a_3 = \Re e(z_3) = \dfrac{-1}{3}$ et $b_3 = \Im m(z_3) = \dfrac{1}{3}$

Calcul du module de z_3 :

$$|z_3| = \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = \sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

3 $z_3 = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{3} = \dfrac{-1}{3} + \dfrac{1}{3}\mathrm{i}$

On a $a_3 = \Re e(z_3) = \dfrac{-1}{3}$ et $b_3 = \Im m(z_3) = \dfrac{1}{3}$

Calcul du module de z_3 :

$$|z_3| = \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = \sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Calcul d'un argument de z_3 :

correction

3 $z_3 = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{3} = \dfrac{-1}{3} + \dfrac{1}{3}\mathrm{i}$

On a $a_3 = \Re e(z_3) = \dfrac{-1}{3}$ et $b_3 = \Im m(z_3) = \dfrac{1}{3}$

Calcul du module de z_3 :

$$|z_3| = \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = \sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Calcul d'un argument de z_3 : Soit θ_3 un argument de z_3, on a :

3 $z_3 = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{3} = \dfrac{-1}{3} + \dfrac{1}{3}\mathrm{i}$

On a $a_3 = \Re e(z_3) = \dfrac{-1}{3}$ et $b_3 = \Im m(z_3) = \dfrac{1}{3}$

Calcul du module de z_3 :

$$|z_3| = \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = \sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Calcul d'un argument de z_3 : Soit θ_3 un argument de z_3, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta_3) & = & \dfrac{a_3}{|z_3|} = \dfrac{\frac{-1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} \\ \\ \sin(\theta_3) & = & \dfrac{b_3}{|z_3|} \end{cases}$$

3 $z_3 = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{3} = \dfrac{-1}{3} + \dfrac{1}{3}\mathrm{i}$

On a $a_3 = \Re e(z_3) = \dfrac{-1}{3}$ et $b_3 = \Im m(z_3) = \dfrac{1}{3}$

Calcul du module de z_3 :

$$|z_3| = \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = \sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Calcul d'un argument de z_3 : Soit θ_3 un argument de z_3, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta_3) & = & \dfrac{a_3}{|z_3|} = \dfrac{\frac{-1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta_3) & = & \dfrac{b_3}{|z_3|} \end{cases}$$

3. $z_3 = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{3} = \dfrac{-1}{3} + \dfrac{1}{3}\mathrm{i}$

On a $a_3 = \Re e(z_3) = \dfrac{-1}{3}$ et $b_3 = \Im m(z_3) = \dfrac{1}{3}$

<u>Calcul du module de z_3 :</u>

$$|z_3| = \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = \sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

<u>Calcul d'un argument de z_3 :</u> Soit θ_3 un argument de z_3, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta_3) & = & \dfrac{a_3}{|z_3|} = \dfrac{\frac{-1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \sin(\theta_3) & = & \dfrac{b_3}{|z_3|} \end{cases}$$

correction

3. $z_3 = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{3} = \dfrac{-1}{3} + \dfrac{1}{3}\mathrm{i}$

On a $a_3 = \Re e(z_3) = \dfrac{-1}{3}$ et $b_3 = \Im m(z_3) = \dfrac{1}{3}$

<u>Calcul du module de z_3 :</u>

$$|z_3| = \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = \sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

<u>Calcul d'un argument de z_3 :</u> Soit θ_3 un argument de z_3, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta_3) & = & \dfrac{a_3}{|z_3|} = \dfrac{\frac{-1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\[2ex] \sin(\theta_3) & = & \dfrac{b_3}{|z_3|} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} \end{cases}$$

3 $z_3 = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{3} = \dfrac{-1}{3} + \dfrac{1}{3}\mathrm{i}$

On a $a_3 = \Re e(z_3) = \dfrac{-1}{3}$ et $b_3 = \Im m(z_3) = \dfrac{1}{3}$

Calcul du module de z_3 :

$$|z_3| = \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = \sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Calcul d'un argument de z_3 : Soit θ_3 un argument de z_3, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta_3) & = & \dfrac{a_3}{|z_3|} = \dfrac{\frac{-1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_3) & = & \dfrac{b_3}{|z_3|} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

3 $z_3 = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{3} = \dfrac{-1}{3} + \dfrac{1}{3}\mathrm{i}$

On a $a_3 = \Re e(z_3) = \dfrac{-1}{3}$ et $b_3 = \Im m(z_3) = \dfrac{1}{3}$

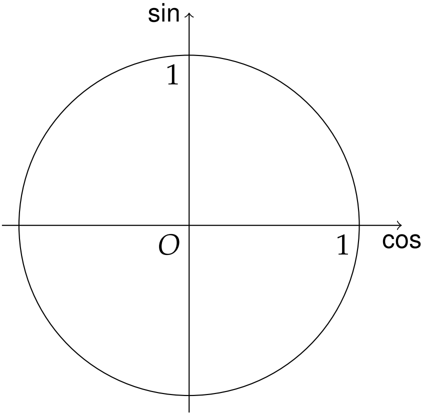
Calcul du module de z_3 :

$$|z_3| = \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = \sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

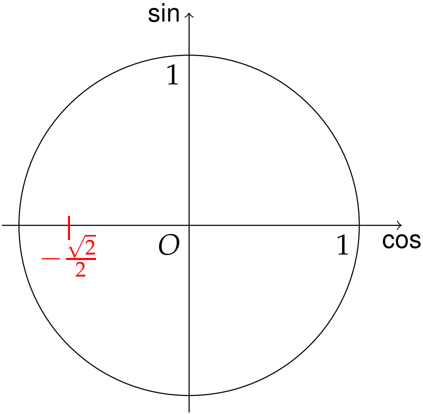
Calcul d'un argument de z_3 : Soit θ_3 un argument de z_3, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta_3) & = & \dfrac{a_3}{|z_3|} = \dfrac{\frac{-1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_3) & = & \dfrac{b_3}{|z_3|} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

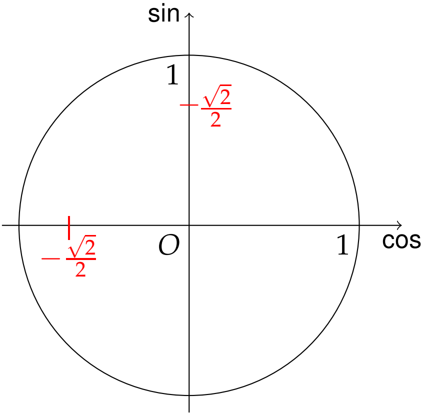
3



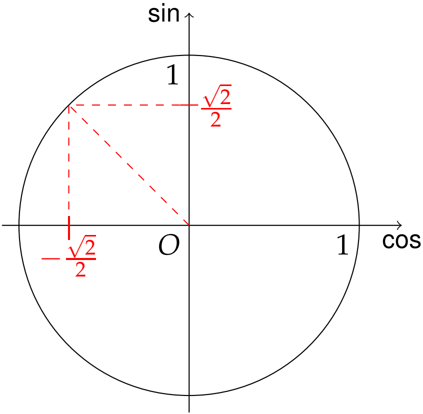
3



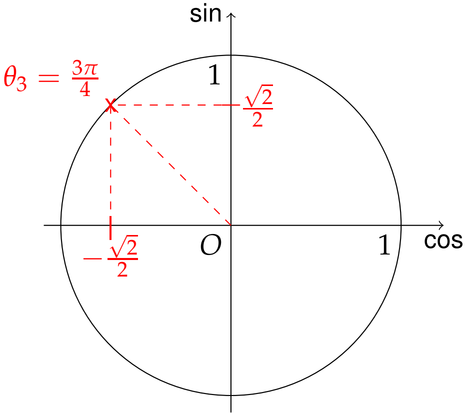
3



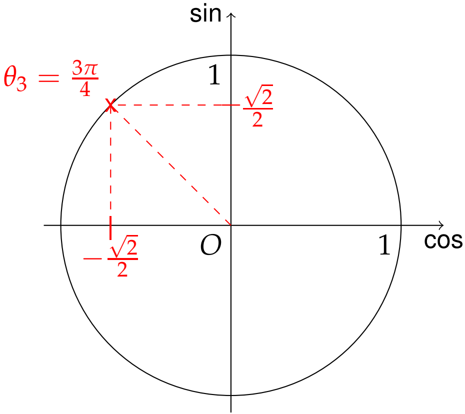
3



3



3



donc un argument de z_3, à 2π près, est :

$$arg(z_3) = \frac{3\pi}{4}$$

correction

3. $z_4 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$

3. $z_4 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$

   On a $a_4 = \Re e(z_4) = \sqrt{3}$ et $b_4 = \Im m(z_4) = 1$

3. $z_4 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$

   On a $a_4 = \Re e(z_4) = \sqrt{3}$ et $b_4 = \Im m(z_4) = 1$

   Calcul du module de z_4 :

3. $z_4 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$

   On a $a_4 = \Re e(z_4) = \sqrt{3}$ et $b_4 = \Im m(z_4) = 1$
   Calcul du module de z_4 :

$$|z_4| = \sqrt{a_4^2 + b_4^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$$

3. $z_4 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$

On a $a_4 = \Re e(z_4) = \sqrt{3}$ et $b_4 = \Im m(z_4) = 1$

Calcul du module de z_4 :

$$|z_4| = \sqrt{a_4^2 + b_4^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$$

Calcul d'un argument de z_4 :

3. $z_4 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$

On a $a_4 = \Re e(z_4) = \sqrt{3}$ et $b_4 = \Im m(z_4) = 1$

Calcul du module de z_4 :

$$|z_4| = \sqrt{a_4^2 + b_4^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$$

Calcul d'un argument de z_4 : Soit θ_4 un argument de z_4, on a :

3. $z_4 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$

On a $a_4 = \Re e(z_4) = \sqrt{3}$ et $b_4 = \Im m(z_4) = 1$

Calcul du module de z_4 :

$$|z_4| = \sqrt{a_4^2 + b_4^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$$

Calcul d'un argument de z_4 : Soit θ_4 un argument de z_4, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta_4) & = & \dfrac{a_4}{|z_4|} \\ \\ \sin(\theta_4) & = & \dfrac{b_4}{|z_4|} \end{cases}$$

3. $z_4 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$

On a $a_4 = \Re e(z_4) = \sqrt{3}$ et $b_4 = \Im m(z_4) = 1$

Calcul du module de z_4 :

$$|z_4| = \sqrt{a_4^2 + b_4^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$$

Calcul d'un argument de z_4 : Soit θ_4 un argument de z_4, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta_4) & = & \dfrac{a_4}{|z_4|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta_4) & = & \dfrac{b_4}{|z_4|} \end{cases}$$

3. $z_4 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$

On a $a_4 = \Re e(z_4) = \sqrt{3}$ et $b_4 = \Im m(z_4) = 1$

Calcul du module de z_4 :

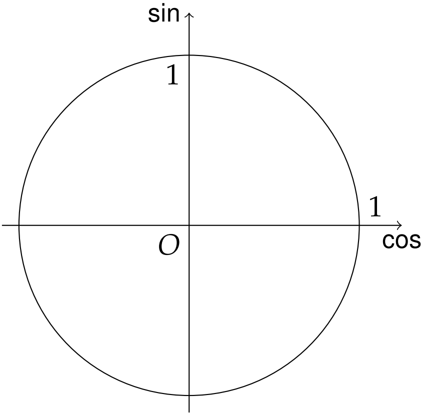
$$|z_4| = \sqrt{a_4^2 + b_4^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$$

Calcul d'un argument de z_4 : Soit θ_4 un argument de z_4, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta_4) & = & \dfrac{a_4}{|z_4|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta_4) & = & \dfrac{b_4}{|z_4|} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

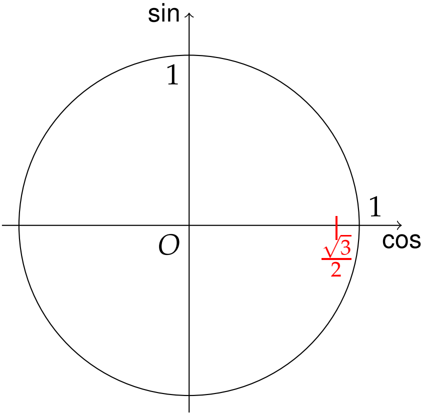
correction

3

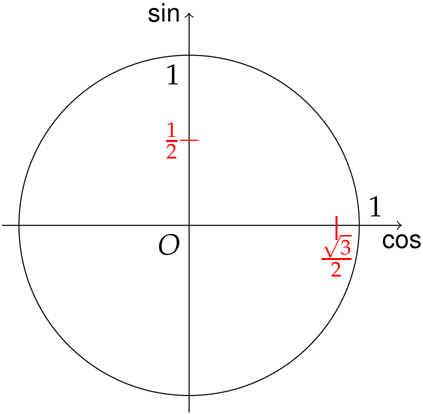


correction

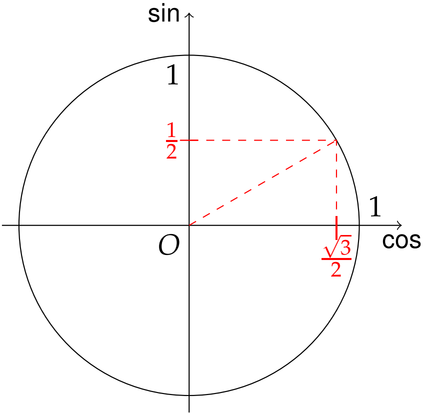
3



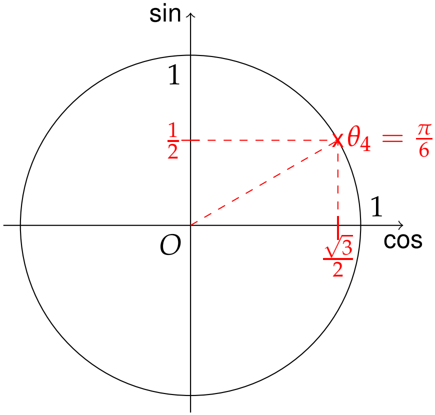
3



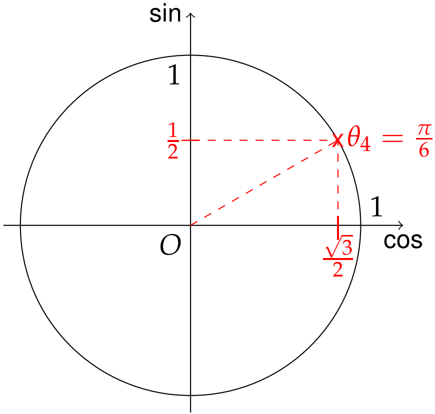
3



3



3



donc un argument de z_4, à 2π près, est :

$$arg(z_4) = \frac{\pi}{6}$$