Exercice 45 page 252

Sésamath

Maths TS obligatoire

énoncé

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

On donnera les solutions sous forme algébrique.

1. $(1+\mathrm{i})z = 1-\mathrm{i}.$
2. $\dfrac{z+1}{z-1} = 2\mathrm{i}.$
3. $(2z+1-\mathrm{i})(\mathrm{i}z+3) = 0.$
4. $\dfrac{\mathrm{i}z+1}{z-3\mathrm{i}} = 2+\mathrm{i}$

correction

1

$$(1+\mathrm{i})z = 1-\mathrm{i}$$

correction

1

$$(1+\mathrm{i})z = 1-\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$$

correction

1

$$(1+\mathrm{i})z = 1-\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}$$

correction

1

$$(1+\mathrm{i})z = 1-\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{(1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{1^2+1^2}$$

correction

1

$$
\begin{aligned}
(1+\mathrm{i})z = 1-\mathrm{i} &\Leftrightarrow z = \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{(1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{1^2+1^2} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{1-2\mathrm{i}-1}{2}
\end{aligned}
$$

correction

1

$$
\begin{aligned}
(1+\mathrm{i})z = 1-\mathrm{i} &\Leftrightarrow z = \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{(1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{1^2+1^2} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{1-2\mathrm{i}-1}{2} \\
&\Leftrightarrow z = -\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

correction

1

$$
\begin{aligned}
(1+\mathrm{i})z = 1-\mathrm{i} &\Leftrightarrow z = \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{(1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{1^2+1^2} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{1-2\mathrm{i}-1}{2} \\
&\Leftrightarrow z = -\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

Les solutions de l'équation sont :

$$S = \{-\mathrm{i}\}$$

correction

2

$$\frac{z+1}{z-1} = 2\mathrm{i}$$

correction

2

$$\frac{z+1}{z-1} = 2\mathrm{i} \Leftrightarrow \Big(z+1 = 2\mathrm{i}(z-1) \quad \text{et} \quad z \neq 1\Big)$$

correction

2

$$\frac{z+1}{z-1} = 2\mathrm{i} \Leftrightarrow \Big(z+1 = 2\mathrm{i}(z-1) \quad \text{et} \quad z \neq 1\Big)$$
$$\Leftrightarrow \Big(z+1 = 2\mathrm{i}z - 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z \neq 1\Big)$$

correction

2

$$\frac{z+1}{z-1} = 2\mathrm{i} \Leftrightarrow \Big(z+1 = 2\mathrm{i}(z-1) \quad \text{et} \quad z \neq 1\Big)$$
$$\Leftrightarrow \Big(z+1 = 2\mathrm{i}z - 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z \neq 1\Big)$$
$$\Leftrightarrow \Big((1-2\mathrm{i})z = -1-2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z \neq 1\Big)$$

correction

2

$$\frac{z+1}{z-1} = 2\mathrm{i} \Leftrightarrow \Big(z+1 = 2\mathrm{i}(z-1) \quad \text{et} \quad z \neq 1\Big)$$

$$\Leftrightarrow \Big(z+1 = 2\mathrm{i}z - 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z \neq 1\Big)$$

$$\Leftrightarrow \Big((1-2\mathrm{i})z = -1-2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z \neq 1\Big)$$

$$\Leftrightarrow \left(z = \frac{-1-2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} \quad \text{et} \quad z \neq 1\right)$$

correction

2

$$\begin{aligned}
\frac{z+1}{z-1} = 2\mathrm{i} &\Leftrightarrow \Big(z+1 = 2\mathrm{i}(z-1) \quad \text{et} \quad z \neq 1\Big) \\
&\Leftrightarrow \Big(z+1 = 2\mathrm{i}z - 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z \neq 1\Big) \\
&\Leftrightarrow \Big((1-2\mathrm{i})z = -1-2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z \neq 1\Big) \\
&\Leftrightarrow \left(z = \frac{-1-2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} \quad \text{et} \quad z \neq 1\right) \\
&\Leftrightarrow \left(z = \frac{(-1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})} \quad \text{et} \quad z \neq 1\right)
\end{aligned}$$

correction

2

$$\begin{aligned}
\frac{z+1}{z-1} = 2\mathrm{i} &\Leftrightarrow \Big(z+1 = 2\mathrm{i}(z-1) \quad \text{et} \quad z \neq 1\Big) \\
&\Leftrightarrow \Big(z+1 = 2\mathrm{i}z - 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z \neq 1\Big) \\
&\Leftrightarrow \Big((1-2\mathrm{i})z = -1-2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z \neq 1\Big) \\
&\Leftrightarrow \left(z = \frac{-1-2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} \quad \text{et} \quad z \neq 1\right) \\
&\Leftrightarrow \left(z = \frac{(-1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})} \quad \text{et} \quad z \neq 1\right) \\
&\Leftrightarrow \left(z = \frac{-1-4\mathrm{i}-4\mathrm{i}^2}{1^2+2^2} \quad \text{et} \quad z \neq 1\right)
\end{aligned}$$

correction

2

$$\begin{aligned}
\frac{z+1}{z-1} = 2\mathrm{i} &\Leftrightarrow \Big(z+1 = 2\mathrm{i}(z-1) \quad \text{et} \quad z \neq 1\Big) \\
&\Leftrightarrow \Big(z+1 = 2\mathrm{i}z - 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z \neq 1\Big) \\
&\Leftrightarrow \Big((1-2\mathrm{i})z = -1-2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z \neq 1\Big) \\
&\Leftrightarrow \left(z = \frac{-1-2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} \quad \text{et} \quad z \neq 1\right) \\
&\Leftrightarrow \left(z = \frac{(-1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})} \quad \text{et} \quad z \neq 1\right) \\
&\Leftrightarrow \left(z = \frac{-1-4\mathrm{i}-4\mathrm{i}^2}{1^2+2^2} \quad \text{et} \quad z \neq 1\right) \\
&\Leftrightarrow \left(z = \frac{-1-4\mathrm{i}+4}{5} \quad \text{et} \quad z \neq 1\right)
\end{aligned}$$

correction

2

$$\begin{aligned}
\frac{z+1}{z-1} = 2\mathrm{i} &\Leftrightarrow \left(z+1 = 2\mathrm{i}(z-1) \quad \text{et} \quad z \neq 1\right) \\
&\Leftrightarrow \left(z+1 = 2\mathrm{i}z - 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z \neq 1\right) \\
&\Leftrightarrow \left((1-2\mathrm{i})z = -1 - 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z \neq 1\right) \\
&\Leftrightarrow \left(z = \frac{-1-2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} \quad \text{et} \quad z \neq 1\right) \\
&\Leftrightarrow \left(z = \frac{(-1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})} \quad \text{et} \quad z \neq 1\right) \\
&\Leftrightarrow \left(z = \frac{-1-4\mathrm{i}-4\mathrm{i}^2}{1^2+2^2} \quad \text{et} \quad z \neq 1\right) \\
&\Leftrightarrow \left(z = \frac{-1-4\mathrm{i}+4}{5} \quad \text{et} \quad z \neq 1\right) \\
&\Leftrightarrow \left(z = \frac{3-4\mathrm{i}}{5} \quad \text{et} \quad z \neq 1\right)
\end{aligned}$$

correction

2

$$\begin{aligned}
\frac{z+1}{z-1} = 2\mathrm{i} &\Leftrightarrow \Big(z+1 = 2\mathrm{i}(z-1) \quad \text{et} \quad z \neq 1\Big) \\
&\Leftrightarrow \Big(z+1 = 2\mathrm{i}z - 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z \neq 1\Big) \\
&\Leftrightarrow \Big((1-2\mathrm{i})z = -1-2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z \neq 1\Big) \\
&\Leftrightarrow \left(z = \frac{-1-2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} \quad \text{et} \quad z \neq 1\right) \\
&\Leftrightarrow \left(z = \frac{(-1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})} \quad \text{et} \quad z \neq 1\right) \\
&\Leftrightarrow \left(z = \frac{-1-4\mathrm{i}-4\mathrm{i}^2}{1^2+2^2} \quad \text{et} \quad z \neq 1\right) \\
&\Leftrightarrow \left(z = \frac{-1-4\mathrm{i}+4}{5} \quad \text{et} \quad z \neq 1\right) \\
&\Leftrightarrow \left(z = \frac{3-4\mathrm{i}}{5} \quad \text{et} \quad z \neq 1\right)
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont :

$$S = \left\{\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i}\right\}$$

correction

3

$$(2z+1-\mathrm{i})(\mathrm{i}z+3)=0$$

correction

3

$$(2z+1-\mathrm{i})(\mathrm{i}z+3)=0 \Leftrightarrow \left(2z+1-\mathrm{i}=0 \quad ou \quad \mathrm{i}z+3=0\right)$$

correction

3

$$(2z+1-\mathrm{i})(\mathrm{i}z+3)=0 \Leftrightarrow \left(2z+1-\mathrm{i}=0 \quad ou \quad \mathrm{i}z+3=0\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(z=\frac{-1+\mathrm{i}}{2} \quad ou \quad z=\frac{-3}{\mathrm{i}}\right)$$

correction

3

$$(2z+1-\mathrm{i})(\mathrm{i}z+3)=0 \Leftrightarrow \left(2z+1-\mathrm{i}=0 \quad ou \quad \mathrm{i}z+3=0\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(z=\frac{-1+\mathrm{i}}{2} \quad ou \quad z=\frac{-3}{\mathrm{i}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(z=\frac{-1+\mathrm{i}}{2} \quad ou \quad z=\frac{3\mathrm{i}^2}{\mathrm{i}}\right)$$

correction

3

$$(2z+1-\mathrm{i})(\mathrm{i}z+3)=0 \Leftrightarrow \left(2z+1-\mathrm{i}=0 \quad ou \quad \mathrm{i}z+3=0\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(z=\frac{-1+\mathrm{i}}{2} \quad ou \quad z=\frac{-3}{\mathrm{i}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(z=\frac{-1+\mathrm{i}}{2} \quad ou \quad z=\frac{3\mathrm{i}^2}{\mathrm{i}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(z=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i} \quad ou \quad z=3\mathrm{i}\right)$$

correction

3

$$(2z+1-\mathrm{i})(\mathrm{i}z+3)=0 \Leftrightarrow \left(2z+1-\mathrm{i}=0 \quad ou \quad \mathrm{i}z+3=0\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(z=\frac{-1+\mathrm{i}}{2} \quad ou \quad z=\frac{-3}{\mathrm{i}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(z=\frac{-1+\mathrm{i}}{2} \quad ou \quad z=\frac{3\mathrm{i}^2}{\mathrm{i}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(z=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i} \quad ou \quad z=3\mathrm{i}\right)$$

Les solutions de l'équation sont :

$$S=\left\{\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\,;\,3\mathrm{i}\right\}$$

correction

4

$$\frac{\mathrm{i}z+1}{z-3\mathrm{i}}=2+\mathrm{i}$$

correction

4

$$\frac{\mathrm{i}z+1}{z-3\mathrm{i}} = 2+\mathrm{i} \Leftrightarrow \Big(\mathrm{i}z+1 = (2+\mathrm{i})(z-3\mathrm{i}) \quad \text{et} \quad z \neq 3\mathrm{i}\Big)$$

correction

4

$$\frac{iz+1}{z-3i} = 2+i \Leftrightarrow \left(iz+1 = (2+i)(z-3i) \quad \text{et} \quad z \neq 3i\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(iz+1 = 2z-6i+iz-3i^2 \quad \text{et} \quad z \neq 3i\right)$$

correction

4

$$\frac{iz+1}{z-3i} = 2+i \Leftrightarrow \left(iz+1 = (2+i)(z-3i) \quad \text{et} \quad z \neq 3i\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(iz+1 = 2z-6i+iz-3i^2 \quad \text{et} \quad z \neq 3i\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(1 = 2z-6i+3 \quad \text{et} \quad z \neq 3i\right)$$

correction

4

$$\frac{iz+1}{z-3i} = 2+i \Leftrightarrow \left(iz+1 = (2+i)(z-3i) \quad \text{et} \quad z \neq 3i\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(iz+1 = 2z-6i+iz-3i^2 \quad \text{et} \quad z \neq 3i\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(1 = 2z-6i+3 \quad \text{et} \quad z \neq 3i\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(2z = -2+6i \quad \text{et} \quad z \neq 3i\right)$$

correction

4

$$\frac{iz+1}{z-3i} = 2+i \Leftrightarrow \left(iz+1 = (2+i)(z-3i) \quad \text{et} \quad z \neq 3i\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(iz+1 = 2z-6i+iz-3i^2 \quad \text{et} \quad z \neq 3i\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(1 = 2z-6i+3 \quad \text{et} \quad z \neq 3i\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(2z = -2+6i \quad \text{et} \quad z \neq 3i\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(z = -1+3i \quad \text{et} \quad z \neq 3i\right)$$

correction

4

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{i}z+1}{z-3\mathrm{i}} = 2+\mathrm{i} &\Leftrightarrow \Big(\mathrm{i}z+1 = (2+\mathrm{i})(z-3\mathrm{i}) \quad \text{et} \quad z \neq 3\mathrm{i}\Big) \\
&\Leftrightarrow \Big(\mathrm{i}z+1 = 2z-6\mathrm{i}+\mathrm{i}z-3\mathrm{i}^2 \quad \text{et} \quad z \neq 3\mathrm{i}\Big) \\
&\Leftrightarrow \Big(1 = 2z-6\mathrm{i}+3 \quad \text{et} \quad z \neq 3\mathrm{i}\Big) \\
&\Leftrightarrow \Big(2z = -2+6\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z \neq 3\mathrm{i}\Big) \\
&\Leftrightarrow \Big(z = -1+3\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z \neq 3\mathrm{i}\Big)
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont :

$$S = \{-1+3\mathrm{i}\}$$