# QCM d'autoévaluation, exercice 133 page 265

Sésamath

Maths TS obligatoire

# énoncé

On considère les points $A(-2-\mathrm{i})$, $B(1-2\mathrm{i})$, $C(2+\mathrm{i})$ et $D(-1+2\mathrm{i})$ dans un repère orthonormal.

a) $ABCD$ est un losange

b) $ABDC$ est un parallélogramme

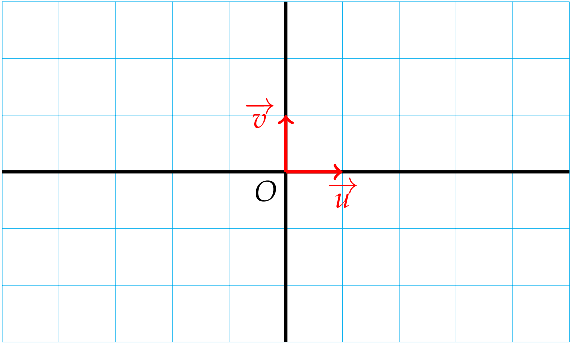
c) $ABCD$ est un carré

d) $ABCD$ a pour aire $8$

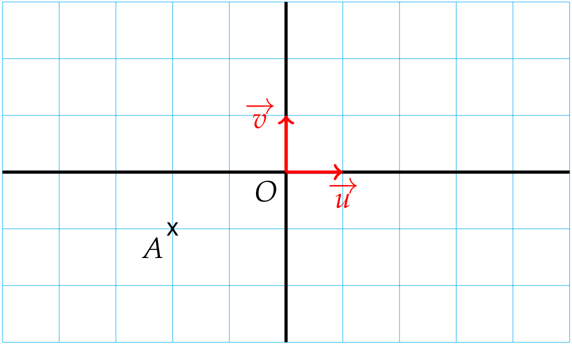
# correction

Commençons par faire une figure (même rapidement à main levée au brouillon) pour se donner une idée :

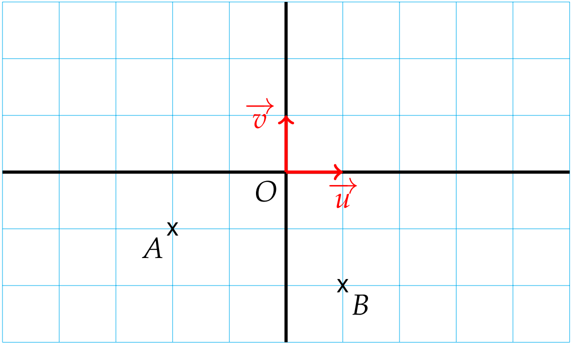
Commençons par faire une figure (même rapidement à main levée au brouillon) pour se donner une idée :



Commençons par faire une figure (même rapidement à main levée au brouillon) pour se donner une idée :

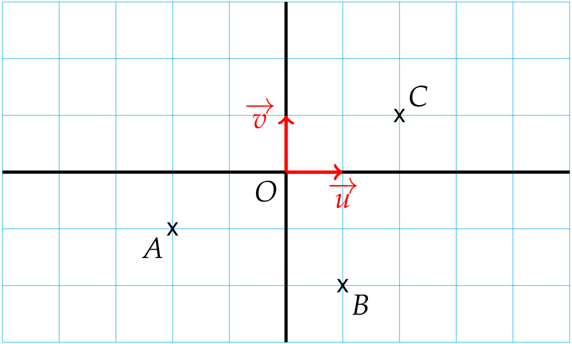


Commençons par faire une figure (même rapidement à main levée au brouillon) pour se donner une idée :

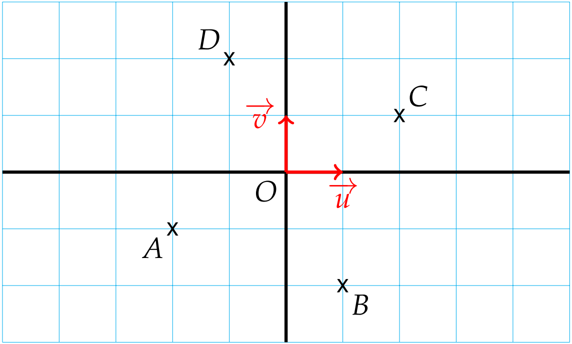


# correction

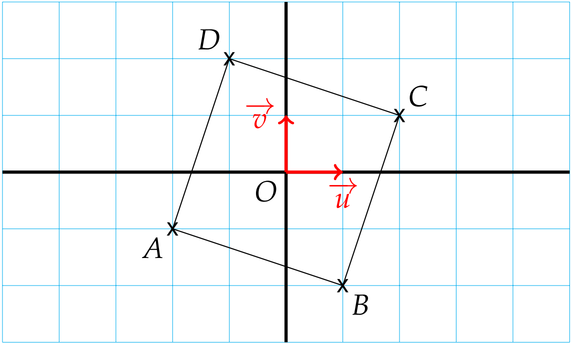
Commençons par faire une figure (même rapidement à main levée au brouillon) pour se donner une idée :



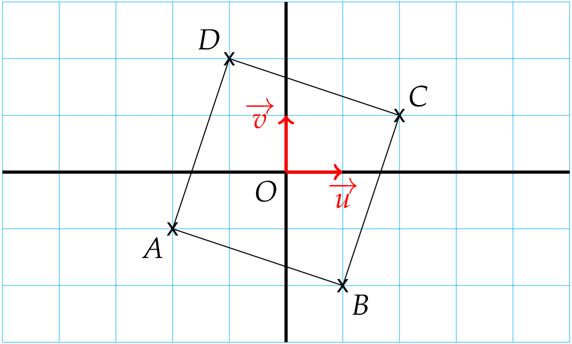
Commençons par faire une figure (même rapidement à main levée au brouillon) pour se donner une idée :



Commençons par faire une figure (même rapidement à main levée au brouillon) pour se donner une idée :



Commençons par faire une figure (même rapidement à main levée au brouillon) pour se donner une idée :




$ABCD$ semble un carré donc un losange et un parallélogramme

## Rappel

- Soient $A$ et $B$ deux points distincts d'affixes respectives $z_A$ et $z_B$.

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$

et

$$AB = ||\overrightarrow{AB}|| = |z_B - z_A| \text{ et } \arg(z_B - z_A) = \left(\widehat{\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}}\right) \quad [2\pi]$$

- Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points distincts d'affixes respectives $z_A$, $z_B$, $z_C$ et $z_D$.

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}}\right) \quad [2\pi]$$

# correction

On a :

$$z_{\overrightarrow{AB}}$$

$$z_{\overrightarrow{DC}}$$

# correction

On a :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$

$$z_{\overrightarrow{DC}}$$

On a :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} &= z_B - z_A \\ &= 1 - 2\mathrm{i} - (-2 - \mathrm{i}) \end{aligned}$$

$$z_{\overrightarrow{DC}}$$

# correction

On a :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} &= z_B - z_A \\ &= 1 - 2\mathrm{i} - (-2 - \mathrm{i}) \\ &= 3 - \mathrm{i} \end{aligned}$$

$$z_{\overrightarrow{DC}}$$

# correction

On a :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} &= z_B - z_A \\ &= 1 - 2\mathrm{i} - (-2 - \mathrm{i}) \\ &= 3 - \mathrm{i} \end{aligned}$$

$$z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D$$

On a :

$$\begin{aligned}
z_{\overrightarrow{AB}} &= z_B - z_A \\
&= 1 - 2\mathrm{i} - (-2 - \mathrm{i}) \\
&= 3 - \mathrm{i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{\overrightarrow{DC}} &= z_C - z_D \\
&= 2 + \mathrm{i} - (-1 + 2\mathrm{i})
\end{aligned}$$

# correction

On a :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} &= z_B - z_A \\ &= 1 - 2\mathrm{i} - (-2 - \mathrm{i}) \\ &= 3 - \mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{DC}} &= z_C - z_D \\ &= 2 + \mathrm{i} - (-1 + 2\mathrm{i}) \\ &= 3 - \mathrm{i} \end{aligned}$$

# correction

On a :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} &= z_B - z_A \\ &= 1 - 2\mathrm{i} - (-2 - \mathrm{i}) \\ &= 3 - \mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{DC}} &= z_C - z_D \\ &= 2 + \mathrm{i} - (-1 + 2\mathrm{i}) \\ &= 3 - \mathrm{i} \end{aligned}$$

Ainsi, $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$

On a :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} &= z_B - z_A \\ &= 1 - 2\mathrm{i} - (-2 - \mathrm{i}) \\ &= 3 - \mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{DC}} &= z_C - z_D \\ &= 2 + \mathrm{i} - (-1 + 2\mathrm{i}) \\ &= 3 - \mathrm{i} \end{aligned}$$

Ainsi, $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$ soit, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

# correction

On a :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} &= z_B - z_A \\ &= 1 - 2\mathrm{i} - (-2 - \mathrm{i}) \\ &= 3 - \mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{DC}} &= z_C - z_D \\ &= 2 + \mathrm{i} - (-1 + 2\mathrm{i}) \\ &= 3 - \mathrm{i} \end{aligned}$$

Ainsi, $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$ soit, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

On en déduit que $ABCD$ est un parallélogramme.

# correction

Montrons que $[AB]$ et $[AD]$ ont la même longueur et sont perpendiculaires.

Montrons que $[AB]$ et $[AD]$ ont la même longueur et sont perpendiculaires.

On sait que : $\left|\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{AD}{AB}$ et $\arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}}\right) \quad [2\pi]$

# correction

Montrons que $[AB]$ et $[AD]$ ont la même longueur et sont perpendiculaires.

On sait que : $\left|\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{AD}{AB}$ et $\arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}}\right) \quad [2\pi]$

Or,

$$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$$

Montrons que $[AB]$ et $[AD]$ ont la même longueur et sont perpendiculaires.

On sait que : $\left|\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{AD}{AB}$ et $\arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}}\right) \quad [2\pi]$

Or,

$$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-1 + 2\mathrm{i} - (-2 - \mathrm{i})}{1 - 2\mathrm{i} - (-2 - \mathrm{i})}$$

Montrons que $[AB]$ et $[AD]$ ont la même longueur et sont perpendiculaires.

On sait que : $\left|\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{AD}{AB}$ et $\arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}}\right) \quad [2\pi]$

Or,

$$\begin{aligned}\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} &= \frac{-1 + 2\mathrm{i} - (-2 - \mathrm{i})}{1 - 2\mathrm{i} - (-2 - \mathrm{i})} \\ &= \frac{1 + 3\mathrm{i}}{3 - \mathrm{i}}\end{aligned}$$

Montrons que $[AB]$ et $[AD]$ ont la même longueur et sont perpendiculaires.

On sait que : $\left|\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{AD}{AB}$ et $\arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}}\right) \quad [2\pi]$

Or,

$$\begin{aligned}\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} &= \frac{-1+2\mathrm{i}-(-2-\mathrm{i})}{1-2\mathrm{i}-(-2-\mathrm{i})}\\ &= \frac{1+3\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}\\ &= \frac{(1+3\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}\end{aligned}$$

Montrons que $[AB]$ et $[AD]$ ont la même longueur et sont perpendiculaires.

On sait que : $\left|\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{AD}{AB}$ et $\arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}}\right) \quad [2\pi]$

Or,

$$\begin{aligned}\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} &= \frac{-1+2\mathrm{i}-(-2-\mathrm{i})}{1-2\mathrm{i}-(-2-\mathrm{i})}\\ &= \frac{1+3\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}\\ &= \frac{(1+3\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}\\ &= \frac{3+\mathrm{i}+9\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2}{3^2+1^2}\end{aligned}$$

Montrons que $[AB]$ et $[AD]$ ont la même longueur et sont perpendiculaires.

On sait que : $\left|\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{AD}{AB}$ et $\arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}}\right) \quad [2\pi]$

Or,

$$\begin{aligned}
\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} &= \frac{-1+2\mathrm{i}-(-2-\mathrm{i})}{1-2\mathrm{i}-(-2-\mathrm{i})} \\
&= \frac{1+3\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} \\
&= \frac{(1+3\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})} \\
&= \frac{3+\mathrm{i}+9\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2}{3^2+1^2} \\
&= \frac{3+10\mathrm{i}-3}{10}
\end{aligned}$$

# correction

Montrons que $[AB]$ et $[AD]$ ont la même longueur et sont perpendiculaires.

On sait que : $\left|\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{AD}{AB}$ et $\arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}}\right) \quad [2\pi]$

Or,

$$\begin{aligned}
\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} &= \frac{-1+2\mathrm{i}-(-2-\mathrm{i})}{1-2\mathrm{i}-(-2-\mathrm{i})} \\
&= \frac{1+3\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} \\
&= \frac{(1+3\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})} \\
&= \frac{3+\mathrm{i}+9\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2}{3^2+1^2} \\
&= \frac{3+10\mathrm{i}-3}{10} \\
&= \mathrm{i}
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left|\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

Par conséquent,

$$\left|\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

Ainsi,

$$\frac{AD}{AB} = 1 \quad \text{et} \quad \left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

Par conséquent,

$$\left|\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

Ainsi,

$$\frac{AD}{AB} = 1 \quad \text{et} \quad \left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

Le parallélogramme $ABCD$ a donc deux côtés consécutifs $[AB]$ et $[AD]$ de même longueur et perpendiculaires, $ABCD$ est donc un carré (donc un losange).

Or,

$$AB = |z_B - z_A| = |3 - \mathrm{i}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

Or,

$$AB = |z_B - z_A| = |3 - \mathrm{i}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

Ainsi l'aire de $ABCD$ vaut :

$$AB^2 = 10 \neq 8$$

Or,

$$AB = |z_B - z_A| = |3 - \mathrm{i}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

Ainsi l'aire de $ABCD$ vaut :

$$AB^2 = 10 \neq 8$$

réponses **a)**, **b)** et **c)**