QCM d'autoévaluation, exercice 129 page 265

Sésamath

Maths TS obligatoire

énoncé

On considère les points $A(2+\mathrm{i})$ et $B(2-4\mathrm{i})$ dans un repère $(0\,;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$, le triangle OAB est :

a) équilatéral

b) isocèle

c) rectangle

d) quelconque

Rappel

- Soient A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B.

$$AB = ||\overrightarrow{AB}|| = |z_B - z_A| \text{ et } \arg(z_B - z_A) = \left(\widehat{\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}}\right) \quad [2\pi]$$

- Soient A, B, C et D quatre points distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.

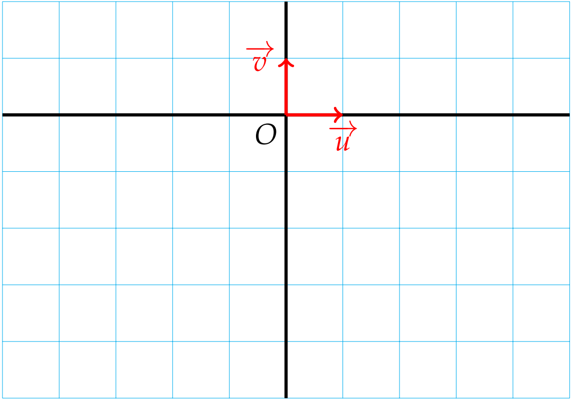
$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}}\right) \quad [2\pi]$$

correction

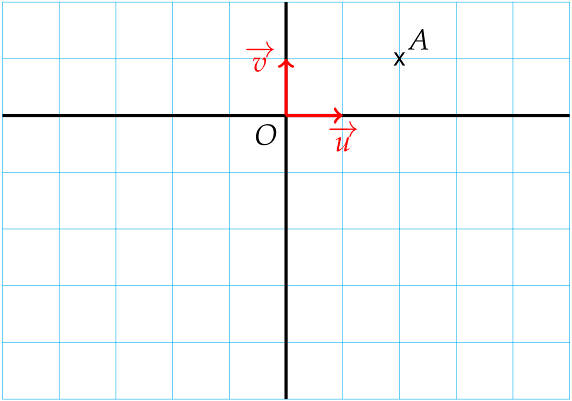
Commençons par faire une figure (même rapidement à main levée au brouillon) pour se donner une idée :

correction

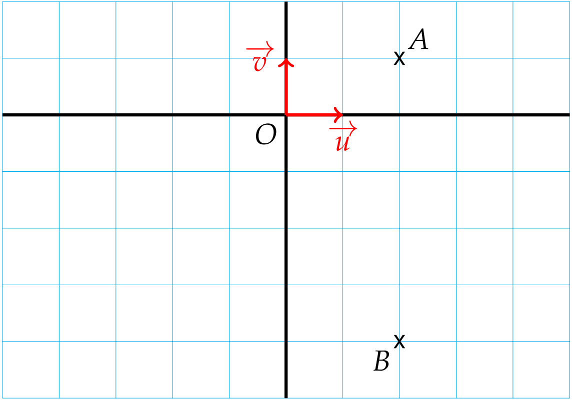
Commençons par faire une figure (même rapidement à main levée au brouillon) pour se donner une idée :



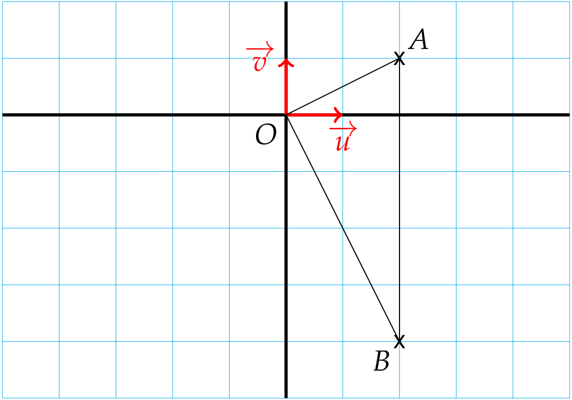
Commençons par faire une figure (même rapidement à main levée au brouillon) pour se donner une idée :



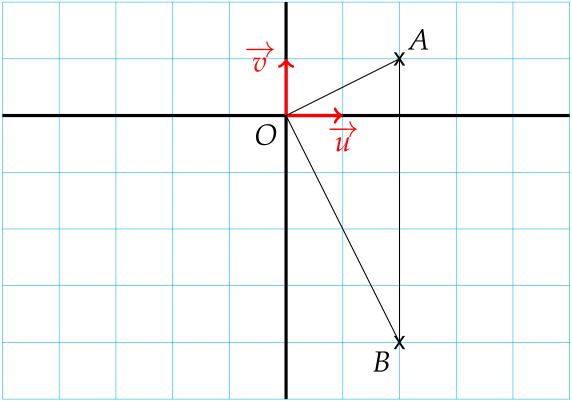
Commençons par faire une figure (même rapidement à main levée au brouillon) pour se donner une idée :



Commençons par faire une figure (même rapidement à main levée au brouillon) pour se donner une idée :



Commençons par faire une figure (même rapidement à main levée au brouillon) pour se donner une idée :



OAB semble rectangle en O

correction

On a :

correction

On a :

$$\arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}}\right) \quad [2\pi]$$

On a :

$$\arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}}\right) \quad [2\pi]$$

Or

$$\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \frac{2-4\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$$

correction

On a :

$$\arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}}\right) \quad [2\pi]$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} &= \frac{2-4\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}\\ &= \frac{(2-4\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}\end{aligned}$$

correction

On a :

$$\arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}}\right) \quad [2\pi]$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} &= \frac{2-4\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} \\ &= \frac{(2-4\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})} \\ &= \frac{4-2\mathrm{i}-8\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2}{2^2+1^2}\end{aligned}$$

correction

On a :

$$\arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}}\right) \quad [2\pi]$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} &= \frac{2-4\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} \\
&= \frac{(2-4\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})} \\
&= \frac{4-2\mathrm{i}-8\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2}{2^2+1^2} \\
&= \frac{4-10\mathrm{i}-4}{5}
\end{aligned}$$

On a :

$$\arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}}\right) \quad [2\pi]$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} &= \frac{2-4\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}\\ &= \frac{(2-4\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}\\ &= \frac{4-2\mathrm{i}-8\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2}{2^2+1^2}\\ &= \frac{4-10\mathrm{i}-4}{5}\\ &= -2\mathrm{i}\end{aligned}$$

Ainsi

Ainsi

$$\arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

Ainsi

$$\arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

et

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\;;\;\overrightarrow{OB}}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

Ainsi

$$\arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

et

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

Le triangle OAB est donc rectangle en O il n'est donc ni équilatéral ni quelconque.

correction

Vérifions que OAB n'est pas isocèle.

correction

Vérifions que OAB n'est pas isocèle.

Comme il est rectangle en O s'il est isocèle ce ne peut être qu'en O.

correction

Vérifions que OAB n'est pas isocèle.

Comme il est rectangle en O s'il est isocèle ce ne peut être qu'en O.

Or

$$\frac{OA}{OB} = \frac{|z_A - z_O|}{|z_B - z_O|} = \left|\frac{z_A - z_O}{z_B - z_O}\right|$$

correction

Vérifions que OAB n'est pas isocèle.
Comme il est rectangle en O s'il est isocèle ce ne peut être qu'en O.
Or

$$\frac{OA}{OB} = \frac{|z_A - z_O|}{|z_B - z_O|} = \left|\frac{z_A - z_O}{z_B - z_O}\right|$$

Avec

$$\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = -2\mathrm{i}$$

Par conséquent,

Vérifions que OAB n'est pas isocèle.
Comme il est rectangle en O s'il est isocèle ce ne peut être qu'en O.
Or

$$\frac{OA}{OB} = \frac{|z_A - z_O|}{|z_B - z_O|} = \left|\frac{z_A - z_O}{z_B - z_O}\right|$$

Avec

$$\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = -2\mathrm{i}$$

Par conséquent,

$$\frac{OA}{OB} = 2$$

Vérifions que OAB n'est pas isocèle.
Comme il est rectangle en O s'il est isocèle ce ne peut être qu'en O.
Or

$$\frac{OA}{OB}=\frac{|z_A-z_O|}{|z_B-z_O|}=\left|\frac{z_A-z_O}{z_B-z_O}\right|$$

Avec

$$\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=-2\mathrm{i}$$

Par conséquent,

$$\frac{OA}{OB}=2$$

Comme $OA=2OB$, OAB n'est pas isocèle en O il est juste rectangle en O.

correction

Vérifions que OAB n'est pas isocèle.

Comme il est rectangle en O s'il est isocèle ce ne peut être qu'en O.

Or

$$\frac{OA}{OB} = \frac{|z_A - z_O|}{|z_B - z_O|} = \left|\frac{z_A - z_O}{z_B - z_O}\right|$$

Avec

$$\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = -2\mathrm{i}$$

Par conséquent,

$$\frac{OA}{OB} = 2$$

Comme $OA = 2OB$, OAB n'est pas isocèle en O il est juste rectangle en O.

réponse **c)**