QCM d'autoévaluation, exercice 128 page 265

Sésamath

Maths TS obligatoire

$z = (1 - \mathrm{i})e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$ a pour argument :

a) $\dfrac{\pi}{2}$

b) $\dfrac{\pi}{4}$

c) $-\dfrac{3\pi}{4}$

d) $\dfrac{\pi}{12}$

correction

Commençons par écrire $1-i$ sous forme trigonométrique.

Rappel

Soit $z=a+ib$ un complexe.

- $|z|=\sqrt{z\times\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$.
- Si $z\neq 0$ alors $\theta=\arg(z)$ peut être déterminé par :

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

- La forme exponentielle de z est alors :

$$z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

correction

On a :

correction

On a :

On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = -1$

correction

On a :

On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = -1$

<u>Calcul du module de z :</u>

On a :

On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = -1$

Calcul du module de z :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

On a :
On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = -1$
Calcul du module de z :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Calcul d'un argument de z :

correction

On a :

On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = -1$

Calcul du module de z :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Calcul d'un argument de z : Soit θ un argument de z, on a :

On a :

On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = -1$

Calcul du module de z :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Calcul d'un argument de z : Soit θ un argument de z, on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} \\ \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} \end{array}\right.$$

On a :

On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = -1$

Calcul du module de z :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Calcul d'un argument de z : Soit θ un argument de z, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

correction

On a :

On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = -1$

<u>Calcul du module de z :</u>

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

<u>Calcul d'un argument de z :</u> Soit θ un argument de z, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

correction

On a :

On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = -1$

<u>Calcul du module de z :</u>

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

<u>Calcul d'un argument de z :</u> Soit θ un argument de z, on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

On a :

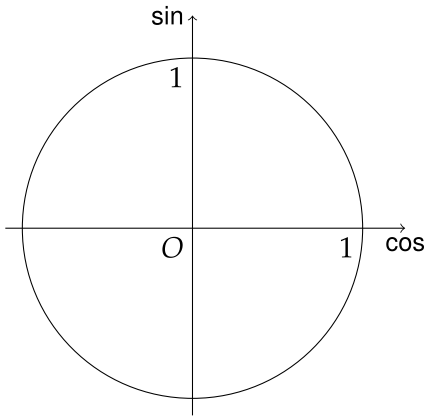
On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = -1$

Calcul du module de z :

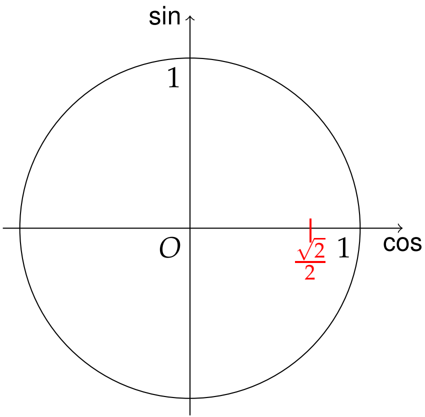
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Calcul d'un argument de z : Soit θ un argument de z, on a :

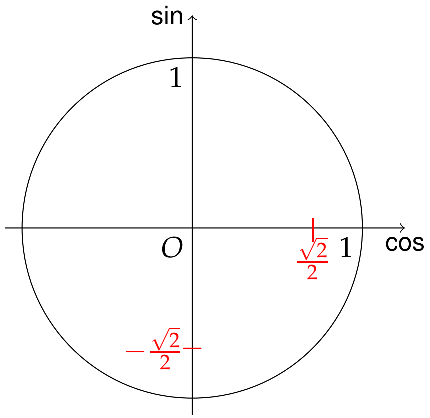
$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$


sin
1
O
1
cos

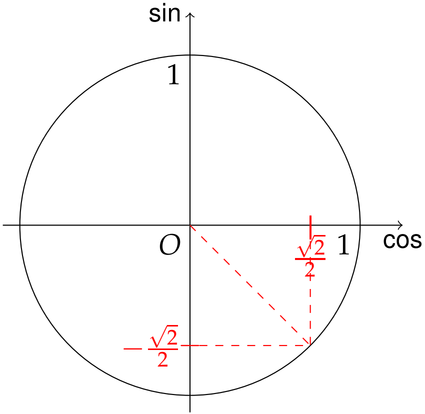
correction



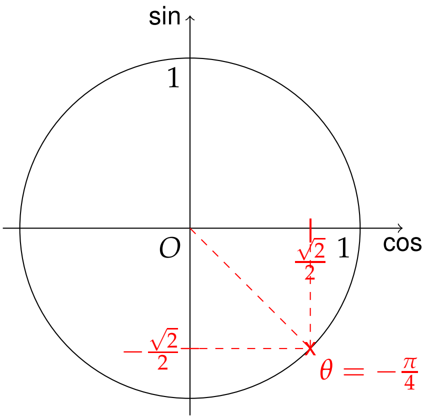
correction

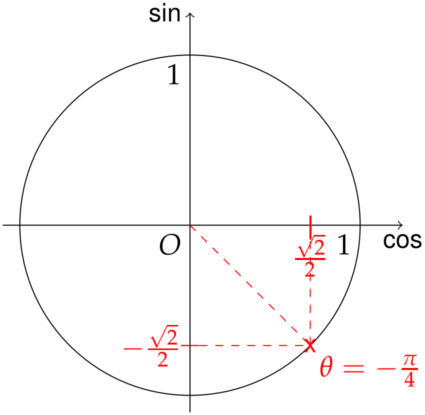


correction



correction





donc un argument de z, à 2π près, est :

$$arg(z) = -\frac{\pi}{4}$$

Ainsi,

$$1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

Ainsi,

$$1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

Donc,

$$z = (1 - \mathrm{i})e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$

Ainsi,

$$1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

Donc,

$$z = (1 - \mathrm{i})e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$

Rappel

Pour tous nombres réels θ_1, θ_2 :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$$

correction

Ainsi,

$$1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

Donc,

$$z = (1 - \mathrm{i})e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$

Rappel

Pour tous nombres réels θ_1, θ_2 :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$$

Donc,

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

Ainsi,

$$1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

Donc,

$$z = (1 - \mathrm{i})e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$

Rappel

Pour tous nombres réels θ_1, θ_2 :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 + \theta_2)}$$

Donc,

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

réponse **b)**