QCM d'autoévaluation, exercice 119 page 264

Sésamath

Maths TS obligatoire

énoncé

Le nombre complexe $(1+\mathrm{i})^{72}$ est égal à :

a) 2^{72}

b) $6,9 \times 10^{10}$

c) 2^{36}

d) 0

correction

Commençons, pour faciliter les calculs, par écrire $1 + \mathrm{i}$ sous forme exponentielle.

Commençons, pour faciliter les calculs, par écrire $1 + \mathrm{i}$ sous forme exponentielle.

Rappel

Soit $z = a + ib$ un complexe.

- $|z| = \sqrt{z \times \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Si $z \neq 0$ alors $\theta = \arg(z)$ peut être déterminé par :

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) & = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

- L'écriture exponentielle de z est alors :

$$z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

correction

Soit $z = 1 + \mathrm{i}$

correction

Soit $z = 1 + \mathrm{i}$

On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = 1$

correction

Soit $z = 1 + \mathrm{i}$

On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = 1$
<u>Calcul du module de z :</u>

Soit $z = 1 + \mathrm{i}$

On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = 1$

Calcul du module de z :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Soit $z = 1 + \mathrm{i}$

On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = 1$

Calcul du module de z :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Calcul d'un argument de z :

Soit $z = 1 + \mathrm{i}$

On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = 1$
<u>Calcul du module de z :</u>

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

<u>Calcul d'un argument de z :</u> Soit θ un argument de z, on a :

Soit $z = 1 + \mathrm{i}$

On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = 1$
Calcul du module de z :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Calcul d'un argument de z : Soit θ un argument de z, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} \\ \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

Soit $z = 1 + \mathrm{i}$

On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = 1$

Calcul du module de z :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Calcul d'un argument de z : Soit θ un argument de z, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

Soit $z = 1 + \mathrm{i}$

On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = 1$

Calcul du module de z :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Calcul d'un argument de z : Soit θ un argument de z, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

Soit $z = 1 + \mathrm{i}$

On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = 1$

<u>Calcul du module de z :</u>

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

<u>Calcul d'un argument de z :</u> Soit θ un argument de z, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Soit $z = 1 + \mathrm{i}$

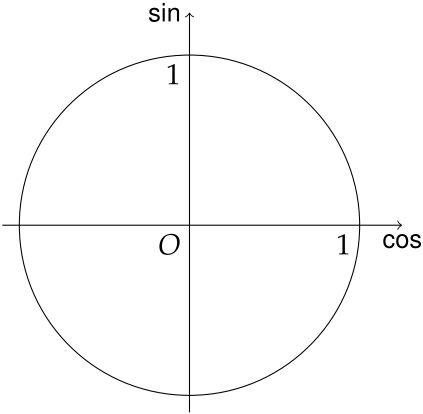
On a $a = \Re e(z) = 1$ et $b = \Im m(z) = 1$
Calcul du module de z :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

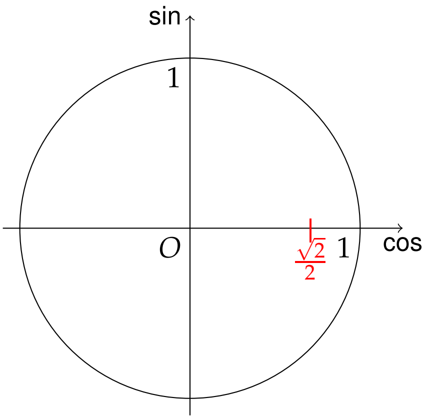
Calcul d'un argument de z : Soit θ un argument de z, on a :

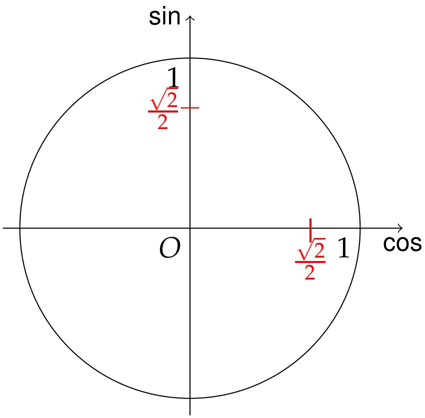
$$\begin{cases} \cos(\theta) &= \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \sin(\theta) &= \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

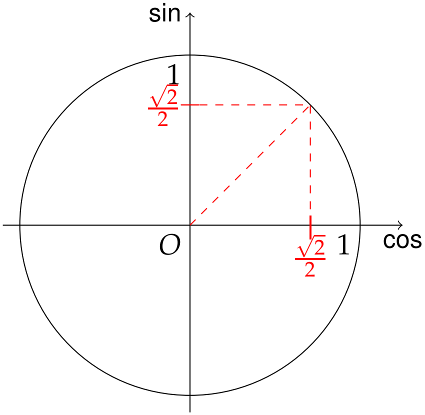
correction

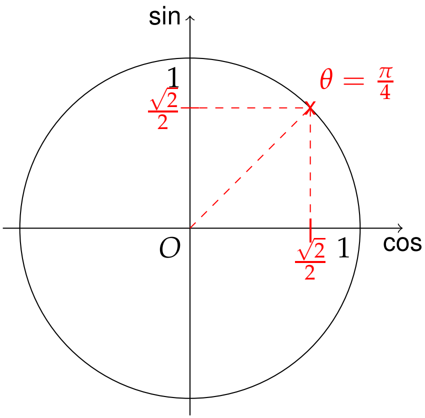


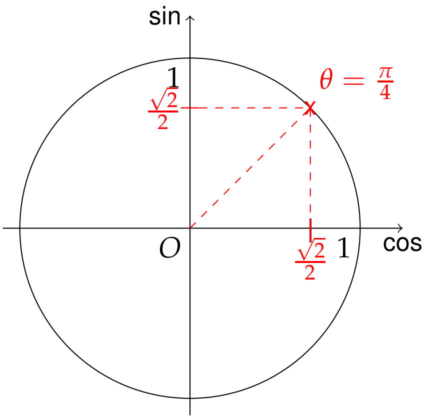
correction




sin
1
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
O
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
1
cos


sin
1
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
O
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
1
cos


sin
1
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\theta = \frac{\pi}{4}$
O
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
1
cos



donc un argument de z, à 2π près, est :

$$arg(z) = \frac{\pi}{4}$$

Ainsi,

$$1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

Ainsi,

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^{n}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\ \ n\in\mathbb{Z}$

Ainsi,

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\ \ n\in\mathbb{Z}$

Donc,

$$(1+\mathrm{i})^{72}=\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{72}$$

Ainsi,

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\ \ n\in\mathbb{Z}$

Donc,

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^{72}&=\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{72}\\&=\left(\sqrt{2}\right)^{72}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{72\pi}{4}}\end{aligned}$$

correction

Ainsi,

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\ \ n\in\mathbb{Z}$

Donc,

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^{72} &= \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{72}\\ &= \left(\sqrt{2}\right)^{72}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{72\pi}{4}}\\ &= 2^{\frac{72}{2}}\mathrm{e}^{18\mathrm{i}\pi}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^{n}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},\ \ n\in\mathbb{Z}$

Donc,

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^{72} &= \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{72}\\ &= \left(\sqrt{2}\right)^{72}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{72\pi}{4}}\\ &= 2^{\frac{72}{2}}\mathrm{e}^{18\mathrm{i}\pi}\\ &= 2^{36}\times 1\end{aligned}$$

Ainsi,

$$1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

Rappel

Pour tout nombre réel θ : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \;\; n \in \mathbb{Z}$

Donc,

$$\begin{aligned}
(1+\mathrm{i})^{72} &= \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{72} \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^{72} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{72\pi}{4}} \\
&= 2^{\frac{72}{2}}\mathrm{e}^{18\mathrm{i}\pi} \\
&= 2^{36} \times 1
\end{aligned}$$

réponse **c)**