Exercice 34 page 28

Sésamath

Maths TS obligatoire

1 Montrer que la suite de terme général :

a) $n^2 - 4n + 6$ est minorée et en donner un minorant ;

b) $-3n^2 + 9n - 4$ est majorée et en donner un majorant ;

c) $\dfrac{n^2 + \cos(n)}{n+1}$ est minorée et en donner un minorant (indication : $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$) ;

d) $\dfrac{8n+1}{n+5}$ est bornée par 0 et 8 ;

e) $\dfrac{-n^2 - 2n + 1}{n^2 + 3n + 2}$ est bornée par -1 et $\dfrac{1}{2}$;

2 Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n - 1}$ est bornée par 2 et 5.

correction

1 a) $n^2 - 4n + 6$

correction

1 a) $n^2 - 4n + 6$

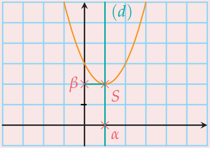
Rappel

Toute fonction f du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ où $\begin{cases} \alpha = -\dfrac{b}{2a} \\ \beta = f(\alpha) \end{cases}$. Cette forme est appelée la forme canonique.

Le sens de variation de f dépend du signe de a.

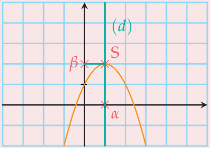
$a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
variations de f		$\searrow$	β	$\nearrow$	



$a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
variations de f		$\nearrow$	β	$\searrow$	



1 a) Comme $a = 1 > 0$, la fonction $f : x \mapsto x^2 - 4x + 6$ est minorée par l'ordonnée du sommet de sa parabole soit

1 a) Comme $a = 1 > 0$, la fonction $f : x \mapsto x^2 - 4x + 6$ est minorée par l'ordonnée du sommet de sa parabole soit

$$f\left(-\frac{-4}{2}\right) = f(2) = 2$$

1 a) Comme $a = 1 > 0$, la fonction $f : x \mapsto x^2 - 4x + 6$ est minorée par l'ordonnée du sommet de sa parabole soit

$$f\left(-\frac{-4}{2}\right) = f(2) = 2$$

donc

la suite de terme général $n^2 - 4n + 6$ est minorée par 2.

correction

1. a) Comme $a = 1 > 0$, la fonction $f : x \mapsto x^2 - 4x + 6$ est minorée par l'ordonnée du sommet de sa parabole soit

$$f\left(-\frac{-4}{2}\right) = f(2) = 2$$

donc

la suite de terme général $n^2 - 4n + 6$ est minorée par 2.

b) Comme $a = -3 < 0$, la fonction $f : x \mapsto -3x^2 + 9x - 4$ est majorée par l'ordonnée du sommet de sa parabole soit

1 a) Comme $a = 1 > 0$, la fonction $f : x \mapsto x^2 - 4x + 6$ est minorée par l'ordonnée du sommet de sa parabole soit

$$f\left(-\frac{-4}{2}\right) = f(2) = 2$$

donc

la suite de terme général $n^2 - 4n + 6$ est minorée par 2.

b) Comme $a = -3 < 0$, la fonction $f : x \mapsto -3x^2 + 9x - 4$ est majorée par l'ordonnée du sommet de sa parabole soit

$$f\left(-\frac{9}{2 \times (-3)}\right) = f(1{,}5) = 2{,}75$$

1 a) Comme $a = 1 > 0$, la fonction $f : x \mapsto x^2 - 4x + 6$ est minorée par l'ordonnée du sommet de sa parabole soit

$$f\left(-\frac{-4}{2}\right) = f(2) = 2$$

donc

la suite de terme général $n^2 - 4n + 6$ est minorée par 2.

b) Comme $a = -3 < 0$, la fonction $f : x \mapsto -3x^2 + 9x - 4$ est majorée par l'ordonnée du sommet de sa parabole soit

$$f\left(-\frac{9}{2 \times (-3)}\right) = f(1{,}5) = 2{,}75$$

donc

la suite de terme général $-3n^2 + 9n - 4$ est majorée par $2{,}75$.

1 c) On a pour tout entier $n \geq 0$,

$$-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$$

correction

1 c) On a pour tout entier $n \geq 0$,

$$-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$$

donc

$$n^2 - 1 \leqslant n^2 + \cos(n) \leqslant n^2 + 1$$

1 c) On a pour tout entier $n \geq 0$,

$$-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$$

donc

$$n^2 - 1 \leqslant n^2 + \cos(n) \leqslant n^2 + 1$$

et

$$\frac{n^2 - 1}{n + 1} \leqslant \frac{n^2 + \cos(n)}{n + 1} \leqslant \frac{n^2 + 1}{n + 1}$$

1 c) On a pour tout entier $n \geq 0$,

$$-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$$

donc

$$n^2 - 1 \leqslant n^2 + \cos(n) \leqslant n^2 + 1$$

et

$$\frac{n^2 - 1}{n + 1} \leqslant \frac{n^2 + \cos(n)}{n + 1} \leqslant \frac{n^2 + 1}{n + 1}$$

qui est équivalente à

$$\frac{(n+1)(n-1)}{n + 1} \leqslant \frac{n^2 + \cos(n)}{n + 1} \leqslant \frac{n^2 + 1}{n + 1}$$

1 c) On a pour tout entier $n \geq 0$,

$$-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$$

donc

$$n^2 - 1 \leqslant n^2 + \cos(n) \leqslant n^2 + 1$$

et

$$\frac{n^2 - 1}{n+1} \leqslant \frac{n^2 + \cos(n)}{n+1} \leqslant \frac{n^2 + 1}{n+1}$$

qui est équivalente à

$$\frac{(n+1)(n-1)}{n+1} \leqslant \frac{n^2 + \cos(n)}{n+1} \leqslant \frac{n^2 + 1}{n+1}$$

et aussi à

$$n - 1 \leqslant \frac{n^2 + \cos(n)}{n+1} \leqslant \frac{n^2 + 1}{n+1}$$

1 c) Or pour tout entier $n \geq 0$,

$$-1 \leqslant n - 1$$

1 c) Or pour tout entier $n \geq 0$,

$$-1 \leqslant n - 1$$

donc

$$-1 \leqslant \frac{n^2 + \cos(n)}{n+1}$$

1 c) Or pour tout entier $n \geq 0$,

$$-1 \leqslant n-1$$

donc

$$-1 \leqslant \frac{n^2+\cos(n)}{n+1}$$

La suite de terme général $\dfrac{n^2+\cos(n)}{n+1}$ est minorée par -1.

1 d) On a pour tout entier $n \geq 0$,

$$8n + 1 \geq 0 \qquad \text{et} \qquad n + 5 \geq 0$$

1 d) On a pour tout entier $n \geq 0$,

$$8n+1 \geq 0 \qquad \text{et} \qquad n+5 \geq 0$$

donc

$$\frac{8n+1}{n+5} \geq 0$$

1 d) On a pour tout entier $n \geq 0$,

$$8n+1 \geq 0 \qquad \text{et} \qquad n+5 \geq 0$$

donc

$$\frac{8n+1}{n+5} \geq 0$$

De plus,

$$\frac{8n+1}{n+5} = \frac{8(n+5)-39}{n+5} = 8 - \frac{39}{n+5}$$

1 d) On a pour tout entier $n \geq 0$,

$$8n+1 \geq 0 \qquad \text{et} \qquad n+5 \geq 0$$

donc

$$\frac{8n+1}{n+5} \geq 0$$

De plus,

$$\frac{8n+1}{n+5} = \frac{8(n+5)-39}{n+5} = 8 - \frac{39}{n+5}$$

Or, pour tout entier $n \geq 0$,

$$\frac{-39}{n+5} \leqslant 0$$

1 d) On a pour tout entier $n \geq 0$,

$$8n+1 \geq 0 \qquad \text{et} \qquad n+5 \geq 0$$

donc

$$\frac{8n+1}{n+5} \geq 0$$

De plus,

$$\frac{8n+1}{n+5} = \frac{8(n+5)-39}{n+5} = 8 - \frac{39}{n+5}$$

Or, pour tout entier $n \geq 0$,

$$\frac{-39}{n+5} \leqslant 0$$

donc

$$\frac{8n+1}{n+5} = 8 - \frac{39}{n+5} \leqslant 8$$

correction

1 d) On a pour tout entier $n \geq 0$,

$$8n+1 \geq 0 \qquad \text{et} \qquad n+5 \geq 0$$

donc

$$\frac{8n+1}{n+5} \geq 0$$

De plus,

$$\frac{8n+1}{n+5} = \frac{8(n+5)-39}{n+5} = 8 - \frac{39}{n+5}$$

Or, pour tout entier $n \geq 0$,

$$\frac{-39}{n+5} \leqslant 0$$

donc

$$\frac{8n+1}{n+5} = 8 - \frac{39}{n+5} \leqslant 8$$

La suite de terme général $\dfrac{8n+1}{n+5}$ est bornée par 0 et 8.

1 e) On a pour tout entier $n \geq 0$,

$$\frac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2}-(-1)=\frac{n+3}{n^2+3n+2}$$

1 e) On a pour tout entier $n \geq 0$,

$$\frac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2}-(-1)=\frac{n+3}{n^2+3n+2}$$

Or le discriminant de n^2+3n+2 est

$$\Delta = 3^2 - 4\times 1\times 2 = 1$$

1 e) On a pour tout entier $n \geq 0$,

$$\frac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2}-(-1)=\frac{n+3}{n^2+3n+2}$$

Or le discriminant de n^2+3n+2 est

$$\Delta = 3^2-4\times 1\times 2 = 1$$

Donc n^2+3n+2 admet 2 racines réelles :

$$x_1=\frac{-3-1}{2}=-2 \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{-3+1}{2}=-1$$

1 e) On a pour tout entier $n \geq 0$,

$$\frac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2}-(-1)=\frac{n+3}{n^2+3n+2}$$

Or le discriminant de n^2+3n+2 est

$$\Delta = 3^2-4\times 1\times 2=1$$

Donc n^2+3n+2 admet 2 racines réelles :

$$x_1=\frac{-3-1}{2}=-2 \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{-3+1}{2}=-1$$

Ainsi,

$$n^2+3n+2=(n-(-2))(n-(-1))=(n+2)(n+1)$$

1 e) On a pour tout entier $n \geq 0$,

$$\frac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2}-(-1)=\frac{n+3}{n^2+3n+2}$$

Or le discriminant de n^2+3n+2 est

$$\Delta = 3^2 - 4\times 1\times 2 = 1$$

Donc n^2+3n+2 admet 2 racines réelles :

$$x_1 = \frac{-3-1}{2} = -2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-3+1}{2} = -1$$

Ainsi,

$$n^2+3n+2 = (n-(-2))(n-(-1)) = (n+2)(n+1)$$

donc pour tout entier $n \geq 0$,

$$\frac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2}-(-1)=\frac{n+3}{(n+2)(n+1)}$$

1 e) On a pour tout entier $n \geq 0$,

$$\frac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2}-(-1)=\frac{n+3}{n^2+3n+2}$$

Or le discriminant de n^2+3n+2 est

$$\Delta = 3^2-4\times 1\times 2 = 1$$

Donc n^2+3n+2 admet 2 racines réelles :

$$x_1=\frac{-3-1}{2}=-2 \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{-3+1}{2}=-1$$

Ainsi,

$$n^2+3n+2=(n-(-2))(n-(-1))=(n+2)(n+1)$$

donc pour tout entier $n \geq 0$,

$$\frac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2}-(-1)=\frac{n+3}{(n+2)(n+1)}\geq 0$$

1 e) On a pour tout entier $n \geq 0$,

$$\frac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2} - (-1) = \frac{n+3}{n^2+3n+2}$$

Or le discriminant de n^2+3n+2 est

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$$

Donc n^2+3n+2 admet 2 racines réelles :

$$x_1 = \frac{-3-1}{2} = -2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-3+1}{2} = -1$$

Ainsi,

$$n^2+3n+2 = (n-(-2))(n-(-1)) = (n+2)(n+1)$$

donc pour tout entier $n \geq 0$,

$$\frac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2} - (-1) = \frac{n+3}{(n+2)(n+1)} \geq 0$$

La suite de terme général $\dfrac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2}$ est donc minorée par -1.

1 e) On a pour tout entier $n \geq 0$,

$$\frac{-n^2 - 2n + 1}{n^2 + 3n + 2} - \frac{1}{2} = \frac{-3n^2 - 7n}{2(n^2 + 3n + 2)}$$

1 e) On a pour tout entier $n \geq 0$,

$$\frac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2}-\frac{1}{2}=\frac{-3n^2-7n}{2(n^2+3n+2)}$$

Or

$$n^2+3n+2=(n+2)(n+1)$$

1 e) On a pour tout entier $n \geq 0$,

$$\frac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2}-\frac{1}{2}=\frac{-3n^2-7n}{2(n^2+3n+2)}$$

Or

$$n^2+3n+2=(n+2)(n+1)$$

Donc

$$\frac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2}-\frac{1}{2}=\frac{-n(3n+7)}{2(n+2)(n+1)}$$

1 e) On a pour tout entier $n \geq 0$,

$$\frac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2}-\frac{1}{2}=\frac{-3n^2-7n}{2(n^2+3n+2)}$$

Or

$$n^2+3n+2=(n+2)(n+1)$$

Donc

$$\frac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2}-\frac{1}{2}=\frac{-n(3n+7)}{2(n+2)(n+1)}\leqslant 0$$

1 e) On a pour tout entier $n \geq 0$,

$$\frac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2}-\frac{1}{2}=\frac{-3n^2-7n}{2(n^2+3n+2)}$$

Or

$$n^2+3n+2=(n+2)(n+1)$$

Donc

$$\frac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2}-\frac{1}{2}=\frac{-n(3n+7)}{2(n+2)(n+1)}\leqslant 0$$

La suite de terme général $\dfrac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2}$ est donc majorée par $\dfrac{1}{2}$.

1 e) On a pour tout entier $n \geq 0$,

$$\frac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2}-\frac{1}{2}=\frac{-3n^2-7n}{2(n^2+3n+2)}$$

Or

$$n^2+3n+2=(n+2)(n+1)$$

Donc

$$\frac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2}-\frac{1}{2}=\frac{-n(3n+7)}{2(n+2)(n+1)}\leqslant 0$$

La suite de terme général $\frac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2}$ est donc majorée par $\frac{1}{2}$.

La suite de terme général $\frac{-n^2-2n+1}{n^2+3n+2}$ est bornée par -1 et $\frac{1}{2}$.

2. On va montrer la propriété par récurrence :

Méthode : Démontrer par récurrence une propriété

La démonstration par récurrence est un type de démonstration utilisé pour démontrer qu'une propriété est vraie pour des entiers positifs à partir d'un rang donné n_0.
Pour démontrer par récurrence qu'une propriété est vraie pour tout entier positif $n \geqslant n_0$, on procède par étapes :

- On énonce la propriété à démontrer.
- **Initialisation** : on vérifie que la propriété est vraie pour $n = n_0$.
- **Hérédité** : on vérifie que si l'on suppose que la propriété est vraie à un rang $n \geqslant n_0$ (c'est ce que l'on appelle l'**hypothèse de récurrence**) alors la propriété est vraie au rang $n + 1$ (le rang suivant n).
- **Conclusion** : la propriété est vraie pour $n = n_0$ et elle est héréditaire ; donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

2

Propriété à démontrer :

2

Propriété à démontrer :

$$(\mathcal{P}_n) : 2 \leqslant u_n \leqslant 5 \text{ pour tout entier } n \geqslant 0$$

2

Propriété à démontrer :

$$(\mathcal{P}_n) : 2 \leqslant u_n \leqslant 5 \text{ pour tout entier } n \geqslant 0$$

Initialisation pour $n = 0$:

2

Propriété à démontrer :

$$(\mathcal{P}_n) : 2 \leqslant u_n \leqslant 5 \text{ pour tout entier } n \geqslant 0$$

Initialisation pour $n = 0$:

$$u_0 = 5$$

2

Propriété à démontrer :

$$(\mathcal{P}_n) : 2 \leqslant u_n \leqslant 5 \text{ pour tout entier } n \geqslant 0$$

Initialisation pour $n = 0$:

$$u_0 = 5$$

On a donc bien

$$2 \leqslant u_0 \leqslant 5$$

2

Propriété à démontrer :

$$(\mathcal{P}_n) : 2 \leqslant u_n \leqslant 5 \text{ pour tout entier } n \geqslant 0$$

Initialisation pour $n = 0$:

$$u_0 = 5$$

On a donc bien

$$2 \leqslant u_0 \leqslant 5$$

La propriété $(\mathcal{P}_n)$ est donc initialisée au rang 0.

Hérédité :

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que

$(\mathcal{P}_k) : 2 \leqslant u_k \leqslant 5$ soit vrai (Hypothèse de récurrence)

et montrons que

$$(\mathcal{P}_{k+1}) : 2 \leqslant u_{k+1} \leqslant 5$$

est alors vrai.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que

$(\mathcal{P}_k)$: $2 \leqslant u_k \leqslant 5$ soit vrai (Hypothèse de récurrence)

et montrons que

$$(\mathcal{P}_{k+1}) : 2 \leqslant u_{k+1} \leqslant 5$$

est alors vrai.

$$2 \leqslant u_k \leqslant 5 \Rightarrow 1 \leqslant u_k - 1 \leqslant 4$$

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que

$(\mathcal{P}_k)$: $2 \leqslant u_k \leqslant 5$ soit vrai (Hypothèse de récurrence)

et montrons que

$$(\mathcal{P}_{k+1}) : 2 \leqslant u_{k+1} \leqslant 5$$

est alors vrai.

$$2 \leqslant u_k \leqslant 5 \Rightarrow 1 \leqslant u_k - 1 \leqslant 4$$

Or la fonction racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$2 \leqslant u_k \leqslant 5 \Rightarrow \sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_k - 1} \leqslant \sqrt{4}$$

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que

$(\mathcal{P}_k)$: $2 \leqslant u_k \leqslant 5$ soit vrai (Hypothèse de récurrence)

et montrons que

$$(\mathcal{P}_{k+1}) : 2 \leqslant u_{k+1} \leqslant 5$$

est alors vrai.

$$2 \leqslant u_k \leqslant 5 \Rightarrow 1 \leqslant u_k - 1 \leqslant 4$$

Or la fonction racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\begin{aligned} 2 \leqslant u_k \leqslant 5 &\Rightarrow \sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_k - 1} \leqslant \sqrt{4} \\ &\Rightarrow 1 \leqslant \sqrt{u_k - 1} \leqslant 2 \end{aligned}$$

correction

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que

$(\mathcal{P}_k) : 2 \leqslant u_k \leqslant 5$ soit vrai (Hypothèse de récurrence)

et montrons que

$$(\mathcal{P}_{k+1}) : 2 \leqslant u_{k+1} \leqslant 5$$

est alors vrai.

$$2 \leqslant u_k \leqslant 5 \Rightarrow 1 \leqslant u_k - 1 \leqslant 4$$

Or la fonction racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\begin{aligned} 2 \leqslant u_k \leqslant 5 &\Rightarrow \sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_k - 1} \leqslant \sqrt{4} \\ &\Rightarrow 1 \leqslant \sqrt{u_k - 1} \leqslant 2 \\ &\Rightarrow 2 \leqslant 2\sqrt{u_k - 1} \leqslant 4 \end{aligned}$$

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que

$(\mathcal{P}_k)$: $2 \leqslant u_k \leqslant 5$ soit vrai (Hypothèse de récurrence)

et montrons que

$$(\mathcal{P}_{k+1}) : 2 \leqslant u_{k+1} \leqslant 5$$

est alors vrai.

$$2 \leqslant u_k \leqslant 5 \Rightarrow 1 \leqslant u_k - 1 \leqslant 4$$

Or la fonction racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\begin{aligned} 2 \leqslant u_k \leqslant 5 &\Rightarrow \sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_k - 1} \leqslant \sqrt{4} \\ &\Rightarrow 1 \leqslant \sqrt{u_k - 1} \leqslant 2 \\ &\Rightarrow 2 \leqslant 2\sqrt{u_k - 1} \leqslant 4 \end{aligned}$$

soit

$$2 \leqslant u_{k+1} \leqslant 5$$

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que

$(\mathcal{P}_k)$: $2 \leqslant u_k \leqslant 5$ soit vrai (Hypothèse de récurrence)

et montrons que

$$(\mathcal{P}_{k+1}) : 2 \leqslant u_{k+1} \leqslant 5$$

est alors vrai.

$$2 \leqslant u_k \leqslant 5 \Rightarrow 1 \leqslant u_k - 1 \leqslant 4$$

Or la fonction racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\begin{aligned} 2 \leqslant u_k \leqslant 5 &\Rightarrow \sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_k - 1} \leqslant \sqrt{4} \\ &\Rightarrow 1 \leqslant \sqrt{u_k - 1} \leqslant 2 \\ &\Rightarrow 2 \leqslant 2\sqrt{u_k - 1} \leqslant 4 \end{aligned}$$

soit

$$2 \leqslant u_{k+1} \leqslant 5$$

Conclusion :

Conclusion :

La propriété $(\mathcal{P}_n)$ étant initialisée au rang 0 et héréditaire, par récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, c'est-à-dire $2 \leqslant u_n \leqslant 5$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Conclusion :

La propriété $(\mathcal{P}_n)$ étant initialisée au rang 0 et héréditaire, par récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, c'est-à-dire $2 \leqslant u_n \leqslant 5$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

La suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n - 1}$ est bornée par 2 et 5.