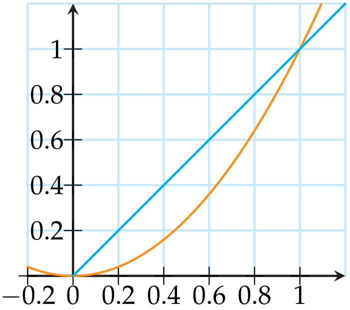
Exercice 27 page 27

Sésamath

Maths TS obligatoire

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}8$ et $u_{n+1} = (u_n)^2$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

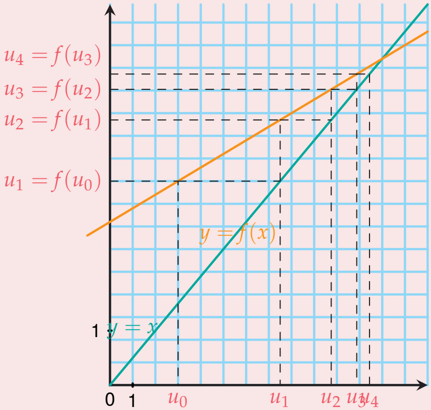
On donne ci-dessous la courbe de la fonction carrée et la droite d'équation $y = x$:



1. À l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer les variations de la suite (u_n).
2. Montrer par récurrence que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \geqslant 0$.
   Que peut-on en déduire sur les variations de (u_n) ?

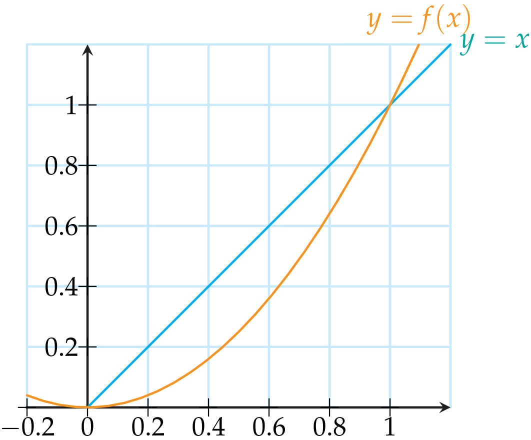
Méthode : Étudier graphiquement une suite définie par récurrence

- Construire la courbe représentant f.
- Construire la droite d'équation $y = x$.
- Placer u_0 sur l'axe des abscisses.
- Construire son image u_1.
- La reporter sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$.
- Construire de la même façon u_2 puis u_3...

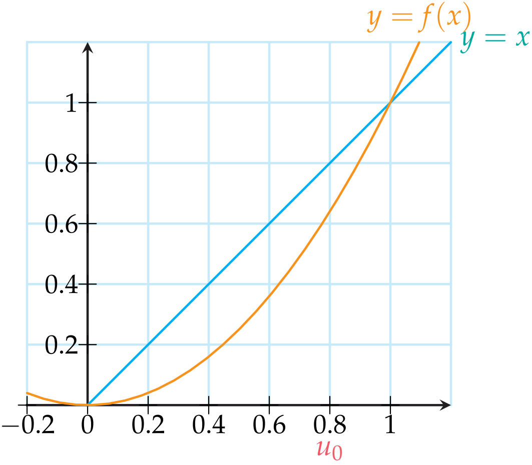


correction

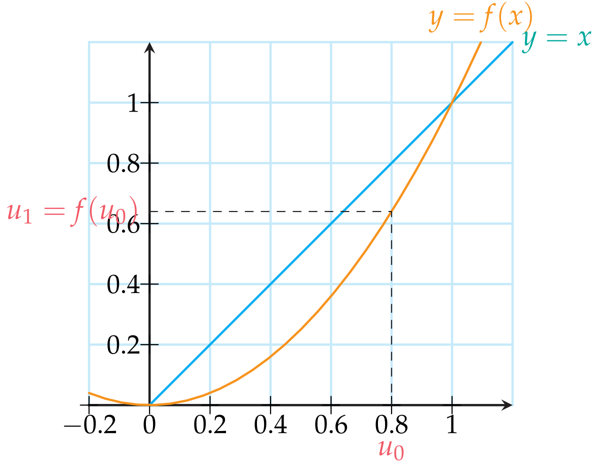
1



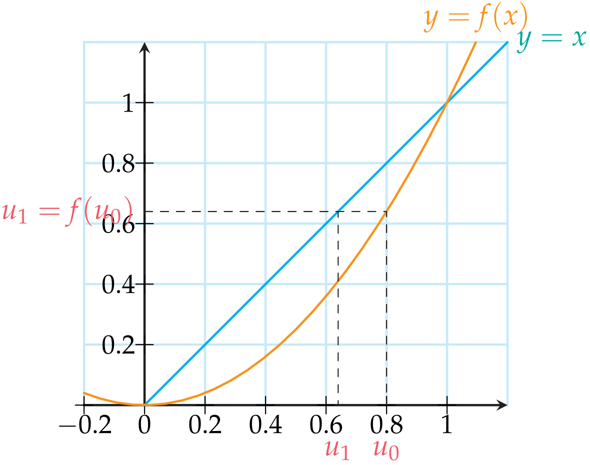
1



1

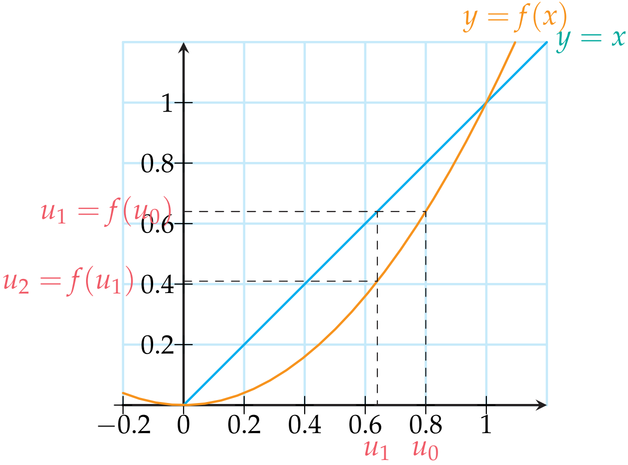


1



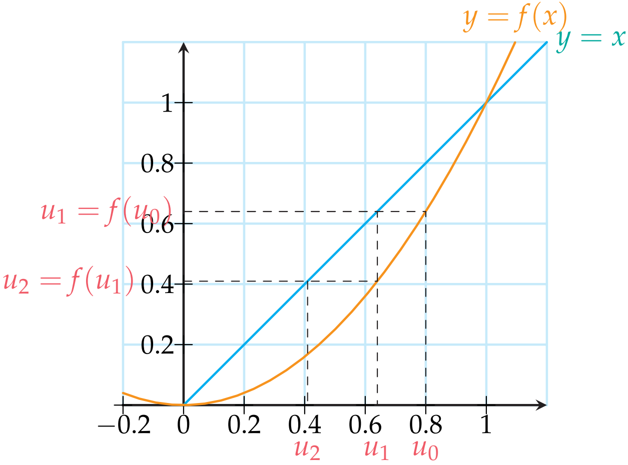
correction

1



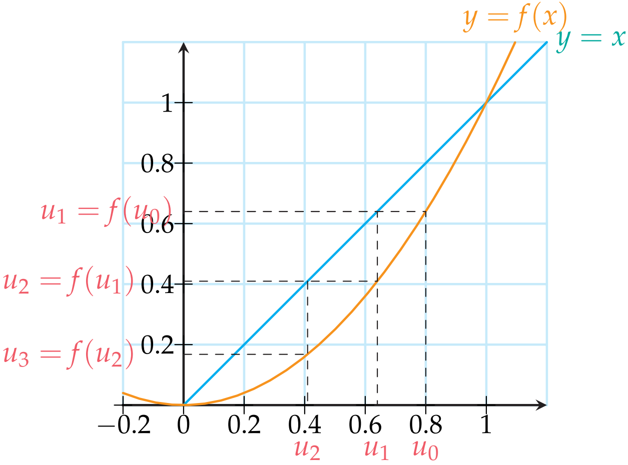
correction

1

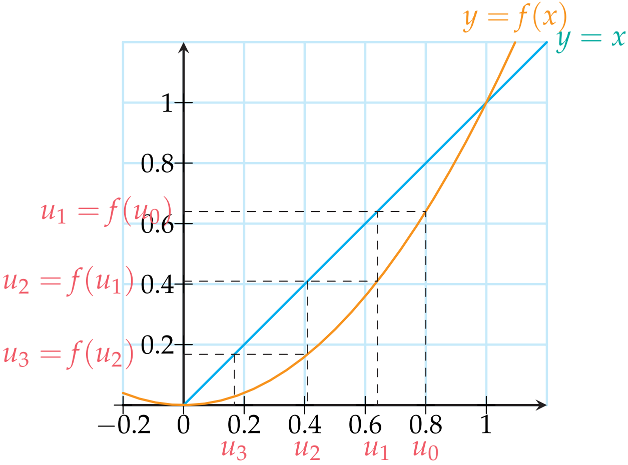


correction

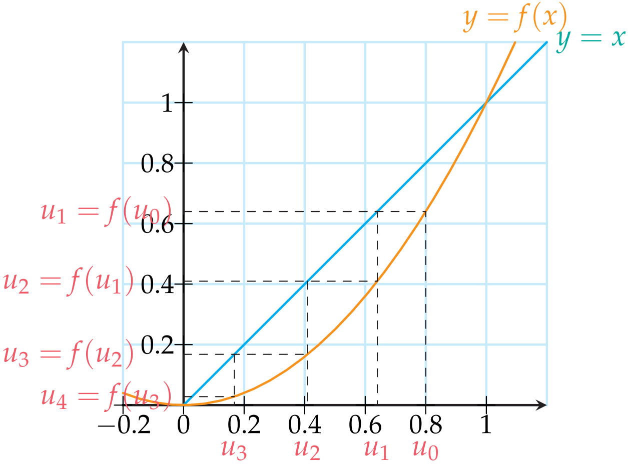
1



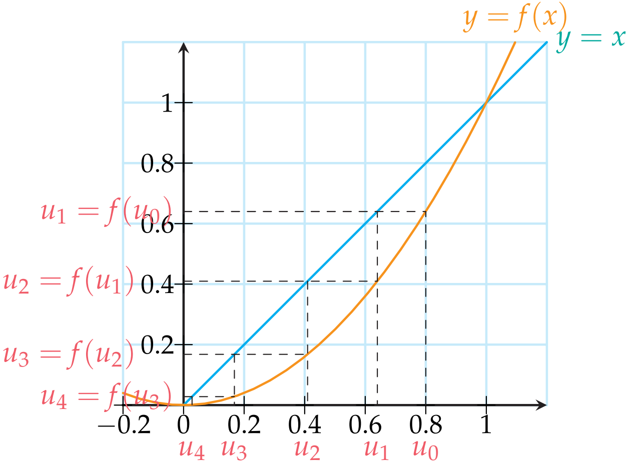
1



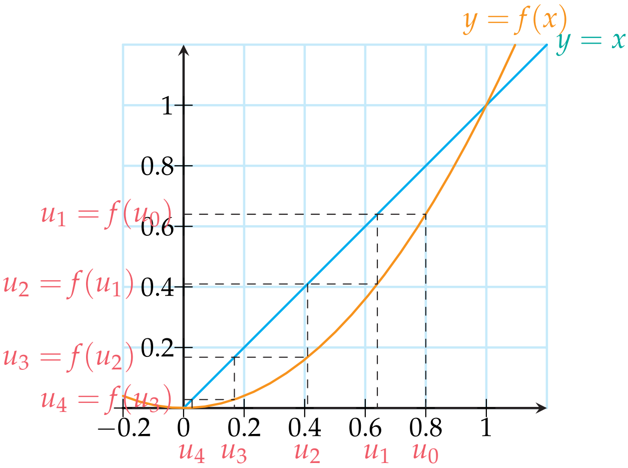
1


$y = f(x)$
$y = x$
1
0.8
$u_1 = f(u_0)$
0.6
$u_2 = f(u_1)$
0.4
$u_3 = f(u_2)$
0.2
$u_4 = f(u_3)$
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
u_3
u_2
u_1
u_0

1


$y = f(x)$
$y = x$
1
0.8
$u_1 = f(u_0)$
0.6
$u_2 = f(u_1)$
0.4
$u_3 = f(u_2)$
0.2
$u_4 = f(u_3)$
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
u_4
u_3
u_2
u_1
u_0

1



On conjecture que

la suite (u_n) semble décroissante.

2

Méthode : Démontrer par récurrence une propriété

La démonstration par récurrence est un type de démonstration utilisé pour démontrer qu'une propriété est vraie pour des entiers positifs à partir d'un rang donné n_0.
Pour démontrer par récurrence qu'une propriété est vraie pour tout entier positif $n \geqslant n_0$, on procède par étapes :

- On énonce la propriété à démontrer.
- **Initialisation** : on vérifie que la propriété est vraie pour $n = n_0$.
- **Hérédité** : on vérifie que si l'on suppose que la propriété est vraie à un rang $n \geqslant n_0$ (c'est ce que l'on appelle l'**hypothèse de récurrence**) alors la propriété est vraie au rang $n + 1$ (le rang suivant n).
- **Conclusion** : la propriété est vraie pour $n = n_0$ et elle est héréditaire ; donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

2

Propriété à démontrer :

2

Propriété à démontrer :

$$(\mathcal{P}_n) : 0 \leq u_{n+1} \leqslant u_n \text{ pour tout entier } n \geqslant 0$$

2

Propriété à démontrer :

$$(\mathcal{P}_n) : 0 \leq u_{n+1} \leqslant u_n \text{ pour tout entier } n \geqslant 0$$

Initialisation pour $n = 0$:

2

Propriété à démontrer :

$$(\mathcal{P}_n) : 0 \leq u_{n+1} \leqslant u_n \text{ pour tout entier } n \geqslant 0$$

Initialisation pour $n = 0$:

$$u_0 = 0,8$$

2

Propriété à démontrer :

$$(\mathcal{P}_n) : 0 \leq u_{n+1} \leqslant u_n \text{ pour tout entier } n \geqslant 0$$

Initialisation pour $n = 0$:

$$u_0 = 0,8$$

$$u_1 = (u_0)^2 = 0,64$$

2

Propriété à démontrer :

$$(\mathcal{P}_n) : 0 \leq u_{n+1} \leqslant u_n \text{ pour tout entier } n \geqslant 0$$

Initialisation pour $n = 0$:

$$u_0 = 0,8$$

$$u_1 = (u_0)^2 = 0,64$$

On a donc bien

$$0 \leq u_1 \leqslant u_0$$

2

Propriété à démontrer :

$$(\mathcal{P}_n) : 0 \leq u_{n+1} \leqslant u_n \text{ pour tout entier } n \geqslant 0$$

Initialisation pour $n = 0$:

$$u_0 = 0,8$$

$$u_1 = (u_0)^2 = 0,64$$

On a donc bien

$$0 \leq u_1 \leqslant u_0$$

La propriété $(\mathcal{P}_n)$ est donc initialisée au rang 0.

Hérédité :

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que

$(\mathcal{P}_k) : 0 \leq u_{k+1} \leqslant u_k$ soit vrai (Hypothèse de récurrence)

et montrons que

$$(\mathcal{P}_{k+1}) : 0 \leq u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$$

est alors vrai.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que

$(\mathcal{P}_k) : 0 \leq u_{k+1} \leqslant u_k$ soit vrai (Hypothèse de récurrence)

et montrons que

$$(\mathcal{P}_{k+1}) : 0 \leq u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$$

est alors vrai.

Comme la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a :

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que

$(\mathcal{P}_k) : 0 \leq u_{k+1} \leqslant u_k$ soit vrai (Hypothèse de récurrence)

et montrons que

$$(\mathcal{P}_{k+1}) : 0 \leq u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$$

est alors vrai.

Comme la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$0 \leq u_{k+1} \leqslant u_k \Rightarrow 0^2 \leq (u_{k+1})^2 \leqslant (u_k)^2$$

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que

$$(\mathcal{P}_k) : 0 \leq u_{k+1} \leqslant u_k \text{ soit vrai (Hypothèse de récurrence)}$$

et montrons que

$$(\mathcal{P}_{k+1}) : 0 \leq u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$$

est alors vrai.

Comme la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$0 \leq u_{k+1} \leqslant u_k \Rightarrow 0^2 \leq (u_{k+1})^2 \leqslant (u_k)^2$$

soit

$$0 \leq u_{k+1} \leqslant u_k \Rightarrow 0 \leq u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$$

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que

$$(\mathcal{P}_k) : 0 \leq u_{k+1} \leqslant u_k \text{ soit vrai (Hypothèse de récurrence)}$$

et montrons que

$$(\mathcal{P}_{k+1}) : 0 \leq u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$$

est alors vrai.

Comme la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$0 \leq u_{k+1} \leqslant u_k \Rightarrow 0^2 \leq (u_{k+1})^2 \leqslant (u_k)^2$$

soit

$$0 \leq u_{k+1} \leqslant u_k \Rightarrow 0 \leq u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$$

La propriété $(\mathcal{P}_n)$ est donc héréditaire.

Conclusion :

Conclusion :

La propriété $(\mathcal{P}_n)$ étant initialisée au rang 0 et héréditaire, par récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, c'est-à-dire $0 \leq u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Conclusion :

La propriété $(\mathcal{P}_n)$ étant initialisée au rang 0 et héréditaire, par récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, c'est-à-dire $0 \leq u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Comme $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$, on en déduit que

Conclusion :

La propriété $(\mathcal{P}_n)$ étant initialisée au rang 0 et héréditaire, par récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, c'est-à-dire $0 \leq u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Comme $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$, on en déduit que

(u_n) est décroissante.