Exercice 16 page 26

Sésamath

Maths TS obligatoire

énoncé

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 5 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer par récurrence que $2 \leqslant u_n \leqslant 5$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Méthode : Démontrer par récurrence une propriété

La démonstration par récurrence est un type de démonstration utilisé pour démontrer qu'une propriété est vraie pour des entiers positifs à partir d'un rang donné n_0.

Pour démontrer par récurrence qu'une propriété est vraie pour tout entier positif $n \geqslant n_0$, on procède par étapes :

- On énonce la propriété à démontrer.
- **Initialisation** : on vérifie que la propriété est vraie pour $n = n_0$.
- **Hérédité** : on vérifie que si l'on suppose que la propriété est vraie à un rang $n \geqslant n_0$ (c'est ce que l'on appelle l'**hypothèse de récurrence**) alors la propriété est vraie au rang $n + 1$ (le rang suivant n).
- **Conclusion** : la propriété est vraie pour $n = n_0$ et elle est héréditaire ; donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

correction

Propriété à démontrer :

Propriété à démontrer :

$$(\mathcal{P}_n) : 2 \leqslant u_n \leqslant 5 \text{ pour tout entier } n \geqslant 0$$

Propriété à démontrer :

$$(\mathcal{P}_n) : 2 \leqslant u_n \leqslant 5 \text{ pour tout entier } n \geqslant 0$$

Initialisation pour $n = 0$:

Propriété à démontrer :

$$(\mathcal{P}_n) : 2 \leqslant u_n \leqslant 5 \text{ pour tout entier } n \geqslant 0$$

Initialisation pour $n = 0$:

$$u_0 = 5$$

Propriété à démontrer :

$(\mathcal{P}_n)$: $2 \leqslant u_n \leqslant 5$ pour tout entier $n \geqslant 0$

Initialisation pour $n = 0$:

$$u_0 = 5$$

On a donc bien

$$2 \leq u_0 \leq 5$$

Propriété à démontrer :

$$(\mathcal{P}_n) : 2 \leqslant u_n \leqslant 5 \text{ pour tout entier } n \geqslant 0$$

Initialisation pour $n = 0$:

$$u_0 = 5$$

On a donc bien

$$2 \leq u_0 \leq 5$$

La propriété $(\mathcal{P}_n)$ est donc initialisée au rang 0.

Hérédité :

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que

$(\mathcal{P}_k)$: $2 \leqslant u_k \leqslant 5$ soit vrai (Hypothèse de récurrence)

et montrons que

$$(\mathcal{P}_{k+1}) : 2 \leqslant u_{k+1} \leqslant 5$$

est alors vrai.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que

$(\mathcal{P}_k)$: $2 \leqslant u_k \leqslant 5$ soit vrai (Hypothèse de récurrence)

et montrons que

$$(\mathcal{P}_{k+1}) : 2 \leqslant u_{k+1} \leqslant 5$$

est alors vrai.

$$2 \leqslant u_k \leqslant 5 \Rightarrow 1 \leqslant \frac{1}{2}u_k \leqslant \frac{5}{2}$$

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que

$$(\mathcal{P}_k) : 2 \leqslant u_k \leqslant 5 \text{ soit vrai (Hypothèse de récurrence)}$$

et montrons que

$$(\mathcal{P}_{k+1}) : 2 \leqslant u_{k+1} \leqslant 5$$

est alors vrai.

$$\begin{aligned} 2 \leqslant u_k \leqslant 5 &\Rightarrow 1 \leqslant \frac{1}{2}u_k \leqslant \frac{5}{2} \\ &\Rightarrow 2 \leqslant \frac{1}{2}u_k + 1 \leqslant \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que

$(\mathcal{P}_k)$: $2 \leqslant u_k \leqslant 5$ soit vrai (Hypothèse de récurrence)

et montrons que

$$(\mathcal{P}_{k+1}) : 2 \leqslant u_{k+1} \leqslant 5$$

est alors vrai.

$$\begin{aligned} 2 \leqslant u_k \leqslant 5 &\Rightarrow 1 \leqslant \frac{1}{2}u_k \leqslant \frac{5}{2} \\ &\Rightarrow 2 \leqslant \frac{1}{2}u_k + 1 \leqslant \frac{7}{2} \\ &\Rightarrow 2 \leqslant u_{k+1} \leqslant \frac{7}{2} \leq 5 \end{aligned}$$

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que

$(\mathcal{P}_k)$: $2 \leqslant u_k \leqslant 5$ soit vrai (Hypothèse de récurrence)

et montrons que

$$(\mathcal{P}_{k+1}) : 2 \leqslant u_{k+1} \leqslant 5$$

est alors vrai.

$$\begin{aligned} 2 \leqslant u_k \leqslant 5 &\Rightarrow 1 \leqslant \frac{1}{2}u_k \leqslant \frac{5}{2} \\ &\Rightarrow 2 \leqslant \frac{1}{2}u_k + 1 \leqslant \frac{7}{2} \\ &\Rightarrow 2 \leqslant u_{k+1} \leqslant \frac{7}{2} \leq 5 \end{aligned}$$

La propriété $(\mathcal{P}_n)$ est donc héréditaire.

Conclusion :

Conclusion :

La propriété $(\mathcal{P}_n)$ étant initialisée au rang 0 et héréditaire, par récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, c'est-à-dire $2 \leqslant u_n \leqslant 5$ pour tout entier naturel n.