Activités mentales ex 13 page 25

Sésamath

Maths TS obligatoire

énoncé

Dans les différents cas suivants, donner une inégalité ou un encadrement de la suite (u_n) permettant de déterminer sa limite par les théorèmes de comparaison ou des gendarmes.

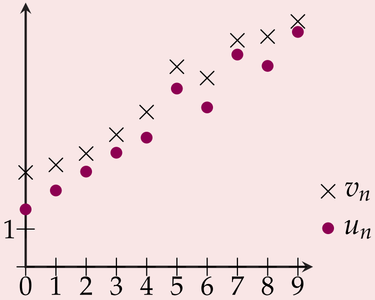
1. $u_n = 7\sqrt{n} + (-1)^n$
2. $u_n = \dfrac{\cos(n) + \sin(n^2) + 3(-1)^n}{n}$
3. $u_n = -n + \sin(n)$
4. $u_n = \sqrt{(n+2)^2 + 2}$

Théorème de comparaison

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

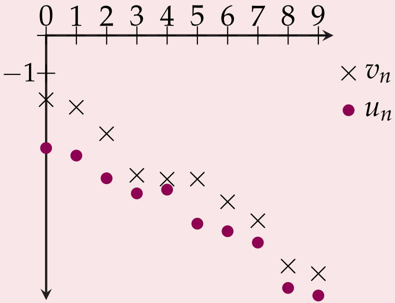
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$



- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

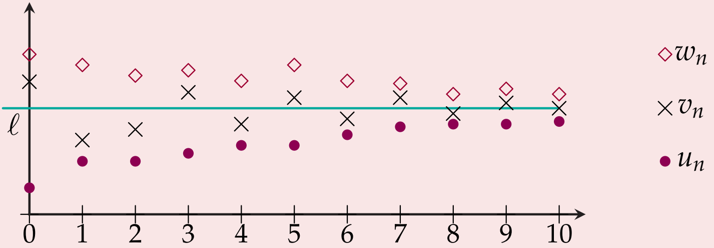


correction

Théorème des gendarmes

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.



1. On a pour tout entier naturel n :

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

correction

1. On a pour tout entier naturel n :

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

donc :

$$7\sqrt{n} - 1 \leq 7\sqrt{n} + (-1)^n \leq 7\sqrt{n} + 1$$

correction

1. On a pour tout entier naturel n :

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

donc :

$$7\sqrt{n} - 1 \leq 7\sqrt{n} + (-1)^n \leq 7\sqrt{n} + 1$$

soit

$$7\sqrt{n} - 1 \leq u_n \leq 7\sqrt{n} + 1$$

1. On a pour tout entier naturel n :

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

donc :

$$7\sqrt{n} - 1 \leq 7\sqrt{n} + (-1)^n \leq 7\sqrt{n} + 1$$

soit

$$7\sqrt{n} - 1 \leq u_n \leq 7\sqrt{n} + 1$$

L'inégalité

$$u_n \geq 7\sqrt{n} - 1$$

de la suite (u_n) permet de déterminer sa limite par le théorème de comparaison.

2 On a pour tout entier naturel n non nul :

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$

2. On a pour tout entier naturel n non nul :

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$
$$-1 \leq \sin(n^2) \leq 1$$

2 On a pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{gathered}-1 \leq \cos(n) \leq 1 \\ -1 \leq \sin(n^2) \leq 1 \\ -3 \leq 3(-1)^n \leq 3\end{gathered}$$

2 On a pour tout entier naturel n non nul :

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$
$$-1 \leq \sin(n^2) \leq 1$$
$$-3 \leq 3(-1)^n \leq 3$$

donc :

$$-5 \leq \cos(n) + \sin(n^2) + 3(-1)^n \leq 5$$

correction

2. On a pour tout entier naturel n non nul :

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$
$$-1 \leq \sin(n^2) \leq 1$$
$$-3 \leq 3(-1)^n \leq 3$$

donc :

$$-5 \leq \cos(n) + \sin(n^2) + 3(-1)^n \leq 5$$

alors :

$$\frac{-5}{n} \leq \frac{\cos(n) + \sin(n^2) + 3(-1)^n}{n} \leq \frac{5}{n}$$

correction

2 On a pour tout entier naturel n non nul :

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$
$$-1 \leq \sin(n^2) \leq 1$$
$$-3 \leq 3(-1)^n \leq 3$$

donc :

$$-5 \leq \cos(n) + \sin(n^2) + 3(-1)^n \leq 5$$

alors :

$$\frac{-5}{n} \leq \frac{\cos(n) + \sin(n^2) + 3(-1)^n}{n} \leq \frac{5}{n}$$

soit

$$\frac{-5}{n} \leq u_n \leq \frac{5}{n}$$

2 On a pour tout entier naturel n non nul :

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$
$$-1 \leq \sin(n^2) \leq 1$$
$$-3 \leq 3(-1)^n \leq 3$$

donc :

$$-5 \leq \cos(n) + \sin(n^2) + 3(-1)^n \leq 5$$

alors :

$$\frac{-5}{n} \leq \frac{\cos(n) + \sin(n^2) + 3(-1)^n}{n} \leq \frac{5}{n}$$

soit

$$\frac{-5}{n} \leq u_n \leq \frac{5}{n}$$

Cet encadrement de la suite (u_n) permet de déterminer sa limite par le théorème des gendarmes.

correction

3. On a pour tout entier naturel n :

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

3 On a pour tout entier naturel n :

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

donc :

$$-n-1 \leq -n+\sin(n) \leq -n+1$$

3. On a pour tout entier naturel n :

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

donc :

$$-n-1 \leq -n+\sin(n) \leq -n+1$$

soit

$$-n-1 \leq u_n \leq -n+1$$

correction

3 On a pour tout entier naturel n :

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

donc :

$$-n-1 \leq -n+\sin(n) \leq -n+1$$

soit

$$-n-1 \leq u_n \leq -n+1$$

L'inégalité

$$u_n \leq -n+1$$

de la suite (u_n) permet de déterminer sa limite par le théorème de comparaison.

4 On a pour tout entier naturel n :

$$(n+2)^2+2 \geq (n+2)^2$$

4 On a pour tout entier naturel n :

$$(n+2)^2+2 \geq (n+2)^2$$

Comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\sqrt{(n+2)^2+2} \geq \sqrt{(n+2)^2}$$

4 On a pour tout entier naturel n :

$$(n+2)^2+2 \geq (n+2)^2$$

Comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\sqrt{(n+2)^2+2} \geq \sqrt{(n+2)^2}$$

soit

$$u_n \geq n+2$$

4 On a pour tout entier naturel n :

$$(n+2)^2+2 \geq (n+2)^2$$

Comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\sqrt{(n+2)^2+2} \geq \sqrt{(n+2)^2}$$

soit

$$u_n \geq n+2$$

Cette inégalité de la suite (u_n) permet de déterminer sa limite par le théorème de comparaison.