S'entrainer 14 page 141

Sésamath

Maths 1S

énoncé

Étudier la monotonie de la suite u en déterminant une fonction f définie sur un intervalle de type $[a\ ;\ +\infty[$ avec $a > 0$ telle que $u_n = f(n)$ dont on étudiera les variations.

1. $u_n = 4n - 7$
2. $u_n = \sqrt{n}$
3. $u_n = n^2 - 4n + 5$
4. $u_n = \dfrac{1}{4n}$

correction

1. $u_n = 4n - 7$

correction

1. $u_n = 4n - 7$

   On considère la fonction associée f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 4x - 7$.

correction

1. $u_n = 4n - 7$

   On considère la fonction associée f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 4x - 7$.

   f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $f'(x) = 4$

correction

1. $u_n = 4n - 7$

   On considère la fonction associée f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 4x - 7$.

   f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $f'(x) = 4$

   donc $f'(x)$ est strictement positif sur $[0; +\infty[$ donc la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

correction

1. $u_n = 4n - 7$

   On considère la fonction associée f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 4x - 7$.

   f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $f'(x) = 4$

   donc $f'(x)$ est strictement positif sur $[0; +\infty[$ donc la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

   On en déduit que la suite u est strictement croissante.

correction

2 $u_n = \sqrt{n}$

2 $u_n = \sqrt{n}$

On considère la fonction associée f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

correction

2 $u_n = \sqrt{n}$

On considère la fonction associée f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

f est dérivable sur $]0; +\infty]$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2. $u_n = \sqrt{n}$

On considère la fonction associée f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

f est dérivable sur $]0;+\infty]$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

donc $f'(x)$ est strictement positif sur $]0;+\infty]$ donc la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

2. $u_n = \sqrt{n}$

On considère la fonction associée f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

f est dérivable sur $]0; +\infty]$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

donc $f'(x)$ est strictement positif sur $]0; +\infty]$ donc la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

On en déduit que la suite u est strictement croissante pour tout $n \geqslant 1$ de plus $u_0 = \sqrt{0}$ et $u_1 = \sqrt{1}$ donc $u_0 < u_1$ donc la suite u est croissante.

correction

3. $u_n = n^2 - 4n + 5$

correction

3. $u_n = n^2 - 4n + 5$

   On considère la fonction associée f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

3. $u_n = n^2 - 4n + 5$

   On considère la fonction associée f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

   f est dérivable sur $[0;+\infty]$ et $f'(x) = 2x - 4$

correction

3. $u_n = n^2 - 4n + 5$

On considère la fonction associée f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

f est dérivable sur $[0;+\infty]$ et $f'(x) = 2x - 4$

donc $f'(x)$ est positif sur $[2;+\infty[$ donc la fonction f est croissante sur $[2;+\infty[$.

correction

3. $u_n = n^2 - 4n + 5$

   On considère la fonction associée f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

   f est dérivable sur $[0; +\infty]$ et $f'(x) = 2x - 4$

   donc $f'(x)$ est positif sur $[2; +\infty[$ donc la fonction f est croissante sur $[2; +\infty[$.

   La suite u est croissante pour $n \geqslant 2$

3 $u_n = n^2 - 4n + 5$

On considère la fonction associée f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

f est dérivable sur $[0; +\infty]$ et $f'(x) = 2x - 4$

donc $f'(x)$ est positif sur $[2; +\infty[$ donc la fonction f est croissante sur $[2; +\infty[$.

La suite u est croissante pour $n \geqslant 2$

De plus $u_0 = 0^2 - 4 \times 0 + 5 = 5$, $u_1 = 1^2 - 4 \times 1 + 5 = 2$ et $u_2 = 2^2 - 4 \times 2 + 5 = 1$ donc $u_0 > u_1 > u_2$ donc la suite u n'est pas monotone.

correction

4 $u_n = \dfrac{1}{4n}$

4. $u_n = \dfrac{1}{4n}$

On considère la fonction associée f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4x}$.

correction

4 $u_n = \dfrac{1}{4n}$

On considère la fonction associée f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4x}$.

f est dérivable sur $[1;+\infty[$ et $f'(x) = -\dfrac{4}{(4x)^2} = -\dfrac{4}{16x^2} = -\dfrac{1}{4x^2}$

4 $u_n = \dfrac{1}{4n}$

On considère la fonction associée f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4x}$.

f est dérivable sur $[1; +\infty[$ et $f'(x) = -\dfrac{4}{(4x)^2} = -\dfrac{4}{16x^2} = -\dfrac{1}{4x^2}$

donc $f'(x)$ est strictement négatif sur $[1; +\infty[$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

correction

4. $u_n = \dfrac{1}{4n}$

On considère la fonction associée f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4x}$.

f est dérivable sur $[1;+\infty[$ et $f'(x) = -\dfrac{4}{(4x)^2} = -\dfrac{4}{16x^2} = -\dfrac{1}{4x^2}$

donc $f'(x)$ est strictement négatif sur $[1;+\infty[$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.

La suite u est strictement décroissante pour $n \geqslant 1$