Exercice 29 page 70

Sésamath

Maths 1S

Pour chacune des fonctions suivantes, donner son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité puis calculer sa dérivée.

1. $f : x \mapsto x^{1000} - 4x + 1$
2. $f : x \mapsto (x+1)\sqrt{x}$
3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$
4. $f : x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$

correction

1 $f(x) = x^{1000} + (-4x + 1),$

1 $f(x) = x^{1000} + (-4x+1)$,
f est la somme de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,

correction

1 $f(x) = x^{1000} + (-4x+1)$,
f est la somme de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,
$\left(x^{1000}\right)' = 1000x^{999}$ et $(-4x+1)' = -4$,

1 $f(x) = x^{1000} + (-4x+1)$,
f est la somme de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,
$\left(x^{1000}\right)' = 1000x^{999}$ et $(-4x+1)' = -4$,
donc $f'(x) = 1000x^{999} - 4$.

correction

2 f est le produit de deux fonctions définies sur $[0;+\infty[$, elle donc définie sur $[0;+\infty[$,

2 f est le produit de deux fonctions définies sur $[0;+\infty[$, elle donc définie sur $[0;+\infty[$,

f est le produit de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, elle donc dérivable sur $]0;+\infty[$,

2 f est le produit de deux fonctions définies sur $[0;+\infty[$, elle donc définie sur $[0;+\infty[$,
f est le produit de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, elle donc dérivable sur $]0;+\infty[$,
elle n'est pas dérivable en 0, en effet, pour $h > 0$,
$\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \sqrt{h} + \dfrac{1}{\sqrt{h}} \longrightarrow +\infty$ quand $h \longrightarrow 0$.

2 f est le produit de deux fonctions définies sur $[0;+\infty[$, elle donc définie sur $[0;+\infty[$,

f est le produit de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, elle donc dérivable sur $]0;+\infty[$,

elle n'est pas dérivable en 0, en effet, pour $h>0$,

$\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \sqrt{h}+\dfrac{1}{\sqrt{h}} \longrightarrow +\infty$ quand $h \longrightarrow 0$.

$(x+1)' = 1$ et $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

2 f est le produit de deux fonctions définies sur $[0;+\infty[$, elle donc définie sur $[0;+\infty[$,

f est le produit de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, elle donc dérivable sur $]0;+\infty[$,

elle n'est pas dérivable en 0, en effet, pour $h>0$,

$\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \sqrt{h} + \dfrac{1}{\sqrt{h}} \longrightarrow +\infty$ quand $h \longrightarrow 0$.

$(x+1)' = 1$ et $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

donc $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + (x+1) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3x+1}{2\sqrt{x}}$.

correction

3 f est l'inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$,

correction

3 f est l'inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,

3 f est l'inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$,
donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,
$\left(x^2+1\right)' = 2x$,

3 f est l'inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,
$\left(x^2+1\right)' = 2x$,
donc $f'(x) = -\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

4 f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, le dénominateur s'annulant en $x = 1$, alors $\mathscr{D}_f = \mathscr{D}'_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$,

correction

4 f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, le dénominateur s'annulant en $x = 1$, alors $\mathscr{D}_f = \mathscr{D}'_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$,
$(x)' = 1$ et $(x-1)' = 1$,

4 f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, le dénominateur s'annulant en $x = 1$, alors $\mathscr{D}_f = \mathscr{D}'_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$,
$(x)' = 1$ et $(x-1)' = 1$,
donc $f'(x) = \dfrac{1 \times (x-1) - x \times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$.