Exercice 10 page 68

Sésamath

Maths 1S

énoncé

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a)$, où a est un réel donné, puis déterminer si f est dérivable en a. Lorsque c'est le cas, donner $f'(a)$.

1. $f(x) = 2x - 7$, $a = 3$
2. $f(x) = mx + p$, $m \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$, a réel quelconque
3. $f(x) = -3x^2$, $a = 2$
4. $f(x) = -\dfrac{2}{x}$, $a = 1$
5. $f(x) = \sqrt{x-1}$, $a = 1$

correction

1. Pour $h \neq 0$, $\frac{\Delta f}{\Delta x}(3) = \dfrac{2(3+h)-7-(-1)}{h} = \dfrac{2h}{h} = 2$,

1 Pour $h \neq 0$, $\frac{\Delta f}{\Delta x}(3) = \dfrac{2(3+h) - 7 - (-1)}{h} = \dfrac{2h}{h} = 2$,

comme $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(3) = 2 \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 2$,

1 Pour $h \neq 0$, $\frac{\Delta f}{\Delta x}(3) = \dfrac{2(3+h)-7-(-1)}{h} = \dfrac{2h}{h} = 2$,
comme $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(3) = 2 \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 2$,
alors f est dérivable en 3 et $f'(3) = 2$.

correction

2 Pour $h \neq 0$, $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a) = \dfrac{m(a+h)+p-(ma+p)}{h} = \dfrac{mh}{h} = m$,

2 Pour $h \neq 0$, $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a) = \dfrac{m(a+h)+p-(ma+p)}{h} = \dfrac{mh}{h} = m$,

comme $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(a) = m \underset{h \to 0}{\to} m$,

correction

2 Pour $h \neq 0$, $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a) = \dfrac{m(a+h)+p-(ma+p)}{h} = \dfrac{mh}{h} = m$,
comme $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(a) = m \underset{h \to 0}{\to} m$,
alors f est dérivable en a et $f'(a) = m$.

3 Pour $h \neq 0$, $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a) = \dfrac{-3(2+h)^2 - (-12)}{h} = \dfrac{-12h - 3h^2}{h} = -12 - 3h$,

3 Pour $h \neq 0$, $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a) = \dfrac{-3(2+h)^2 - (-12)}{h} = \dfrac{-12h - 3h^2}{h} = -12 - 3h$,
comme $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(2) \underset{h \to 0}{\to} -12$,

3 Pour $h \neq 0$, $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a) = \dfrac{-3(2+h)^2 - (-12)}{h} = \dfrac{-12h - 3h^2}{h} = -12 - 3h$,
comme $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(2) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} -12$,
alors f est dérivable en 2 et $f'(2) = -12$.

4 Pour $h \neq 0$, $\frac{\Delta f}{\Delta x}(1) = \dfrac{-\dfrac{2}{1+h} - (-2)}{h} = \dfrac{\dfrac{-2+2+2h}{1+h}}{h} = \dfrac{\dfrac{2h}{1+h}}{h}$

4 Pour $h \neq 0$, $\frac{\Delta f}{\Delta x}(1) = \dfrac{-\dfrac{2}{1+h} - (-2)}{h} = \dfrac{\dfrac{-2+2+2h}{1+h}}{h} = \dfrac{\dfrac{2h}{1+h}}{h}$

or $\dfrac{\dfrac{2h}{1+h}}{h} = \dfrac{2}{1+h}$,

4 Pour $h \neq 0$, $\frac{\Delta f}{\Delta x}(1) = \dfrac{-\dfrac{2}{1+h} - (-2)}{h} = \dfrac{\dfrac{-2+2+2h}{1+h}}{h} = \dfrac{\dfrac{2h}{1+h}}{h}$

or $\dfrac{\dfrac{2h}{1+h}}{h} = \dfrac{2}{1+h}$,

donc $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(1) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 2$,

correction

or $\dfrac{\dfrac{2h}{1+h}}{h} = \dfrac{2}{1+h}$,

donc $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(1) \underset{h\to 0}{\to} 2$,

alors f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

5 Pour $h > 0$, $\frac{\Delta f}{\Delta x}(1) = \dfrac{\sqrt{1+h-1}-0}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$,

5 Pour $h > 0$, $\frac{\Delta f}{\Delta x}(1) = \dfrac{\sqrt{1+h-1}-0}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$,

comme $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(a) \underset{h \to 0}{\to} +\infty$,

5 Pour $h > 0$, $\frac{\Delta f}{\Delta x}(1) = \dfrac{\sqrt{1+h-1}-0}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$,

comme $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(a) \underset{h \to 0}{\to} +\infty$,

alors f n'est pas dérivable en 1.