4G2

Triangles et parallèles

EST-CE QUE TU TE SOUVIENS ?

1) On te donne une droite (d) et un point A n'appartenant pas à cette droite. Avec une équerre et une règle non graduée, sais-tu construire la parallèle à (d) passant par A ?

a. oui **b.** non

2) Construis le triangle ABC tel que AB=8cm, AC=7cm et BC=6cm.

3) Construis un segment oblique [AB]. Avec un compas et une règle non graduée, place le point I milieu de [AB].

4) Soit EFGH un parallélogramme de centre O. Quelles sont les phrases justes parmi :

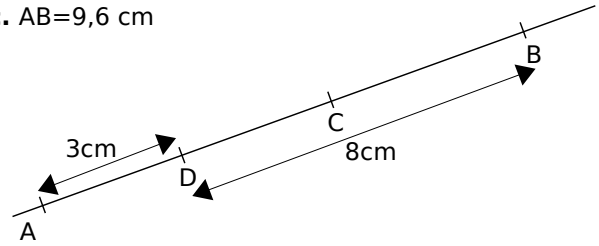
a. O est le milieu de [EG]. **b.** O est le milieu de [HE].

c. O est le milieu de [FG]. **d.** O est le milieu de [HF].

5) AB = $\frac{1}{2}$ AF. Sachant que AF=4,2 cm, alors

a. AB=4,8 cm **b.** AB=2,1 cm **c.** AB=9,6 cm

6) Calcule : $8 \times \frac{2}{25}$

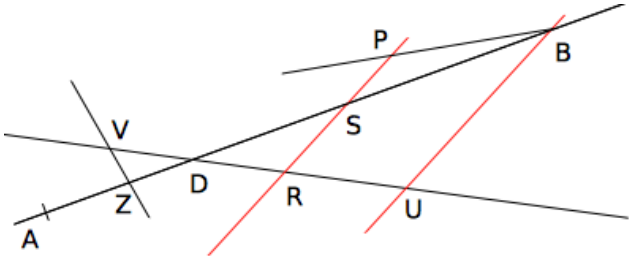


7) Exprime le rapport $\frac{AD}{AB}$ sous forme d'une fraction.

8) Complète le tableau suivant pour qu'il soit un tableau de proportionnalité :

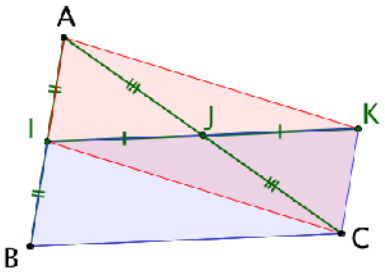
2,5	1
3,8	...

9) Sur la figure ci-dessous, cite deux triangles qui ont le même sommet et deux côtés parallèles : (les droites en couleur sont parallèles)



Partie 1
PROPRIETES DE LA DROITE DES MILIEUX

ECLAIRAGE



1 - Introduction : propriété des milieux

ABC est un triangle quelconque
et **I milieu de [AB] et J milieu de [AC]**.
Que peut-on dire du segment [IJ] ?
Pour répondre à cette question, construisons le point
K symétrique du point I par rapport au point J.
Remarquez les codages de la figure
Le quadrilatère AKCI est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu.
Comme deux côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles et égaux,
on en déduit que AI = FC et que (AI)//(KC).
Comme I est le milieu de [AB], on peut dire que AI=IB et que (AI)//(IB)
Donc IB = KC et (IB)//(KC)
Donc le quadrilatère IKCB est un parallélogramme.
Le segment [IJ] est donc parallèle à [BC].

De plus, IK=BC et $IJ=\frac{IK}{2}$ donc $IJ=\frac{BC}{2}$

La droite (IJ) est parallèle à (BC) et la longueur IJ est égale à la moitié de la longueur BC.

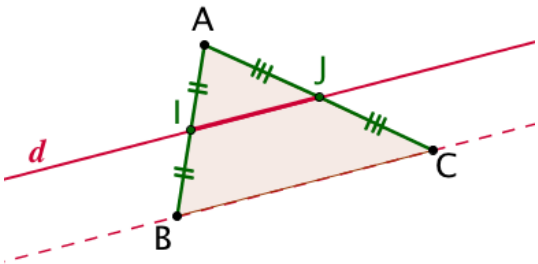
Ce résultat constitue le premier **théorème des milieux**.

2 - La propriété des milieux

La propriété des milieux

Si dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés du triangle, alors elle est parallèle au troisième côté.

Si dans un triangle, un segment a pour extrémités les milieux de deux côtés, alors sa longueur est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.

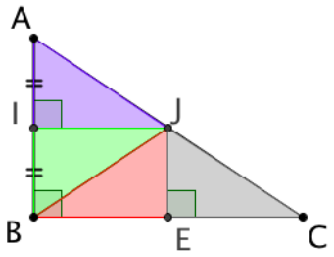


Si I est le milieu de [AB] et **si** J le milieu de [BC] **alors** : $IJ=\frac{1}{2}BC$

et **(IJ) est parallèle à (BC)**)

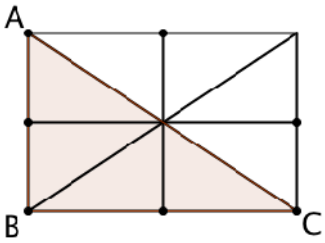
3 - Introduction : réciproque de la propriété du théorème des milieux

ABC est rectangle en B et I est le milieu de [AB].

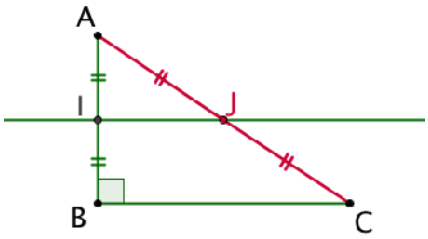


Comment construire le milieu de [AC] ?

Découpons le triangle, en commençant par construire la perpendiculaire à [AB] passant par I afin d'obtenir le point J, puis la perpendiculaire à [BC] passant par J afin d'obtenir le point E.



Comme un triangle rectangle peut être considéré comme " une moitié "d'un rectangle, remarquons que l'on retrouve ce découpage dans le découpage du rectangle qui donne 8 triangles identiques.



Les quatre triangles coloriés du triangle initial ABC sont donc identiques donc on a AJ = JC et donc J est le milieu de [AC].
Autrement dit, il **semble** qu'il suffise de construire la perpendiculaire à [AB], c'est à dire **la parallèle à la droite (BC)** passant par le **milieu de [AB]** pour obtenir le milieu de [AC] !

Ce résultat est encore vrai quand le triangle ABC est quelconque.

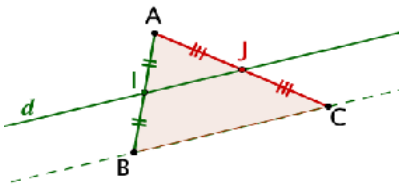
Ce résultat constitue le second théorème des milieux : le théorème "milieu et parallèle"

4 - La réciproque de la propriété des milieux

La réciproque de la propriété des milieux

Si, dans un triangle, une droite d passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors elle passe par le milieu du troisième côté.

La droite (d) passe par le point **I milieu de [AB]** et est **parallèle au segment [BC].**
Elle coupe le segment [AC] en J.



On en déduit que **J est le milieu de [AC]**.

Remarque :

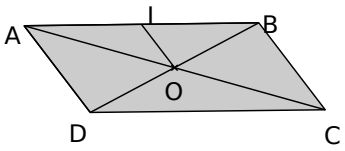
Ce second théorème permet de démontrer qu'un point est un milieu en utilisant un milieu et deux droites parallèles.
Le premier théorème permet de démontrer que deux droites sont parallèles en utilisant deux milieux.

ENTRAINE-TOI

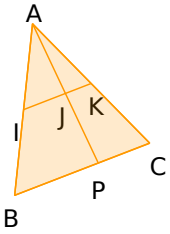
Exercice 1 Trace un triangle ABC. Place M le milieu de [AB] et N le milieu de [BC]. Démontre que (MN) et (AC) sont parallèles.

Exercice 2 Trace un triangle IJK. Place le point P, milieu de [IJ]. Trace la droite parallèle à [IK] passant par P. Elle recoupe [KJ] en R. Démontre que R est le milieu de [JK].

Exercice 3 ABCD est un parallélogramme de centre O et I est le milieu de [AB]. Démontre que les droites (OI) et (BC) sont parallèles.



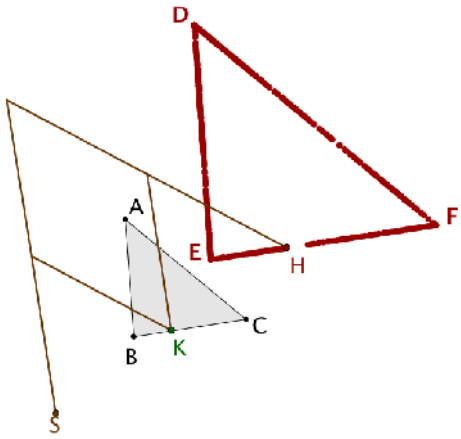
Exercice 4 Trace un triangle ABC un triangle tel que BC = 7 cm ; AB = 9 cm et AC = 13 cm. Place I le milieu de [AB] et K le milieu de [AC]. P est un point du segment [BC] tel que BP = 5 cm. La droite (IK) coupe le segment [AP] en J. Que peux-tu dire de J ? Calcule IJ.



Partie 2 :
Agrandissement - Réduction

1 - Introduction

Le **pantographe** est un instrument permettant de réduire ou d'agrandir des figures.
Edouard en a utilisé un afin d'agrandir un triangle ABC.
Le pantographe est fixé au point S et le point K décrit le triangle ABC.
A l'extrémité du pantographe, une mine est fixée au point H.
Cette mine dessine un triangle DEF.



Ce triangle DEF est un agrandissement du triangle ABC.

Edouard a réglé la pantographe afin que le **facteur d'agrandissement** soit égal à 2 :
DE = 2 AB , DF = 2 AC et EF = 2 BC
Remarquons que ABC est une réduction du triangle DEF.
Si on reporte les longueurs des deux triangles dans un tableau, on obtient un tableau de proportionnalité :

triangle ABC	AB	AC	BC
triangle DEF	DE	DF	EF

C'est un **tableau de proportionnalité** car les nombres de la seconde ligne s'obtiennent en multipliant ceux de la première ligne par un même nombre, appelé coefficient de proportionnalité (ici, ce coefficient vaut 2).

On peut dire également que les longueurs des côtés de DEF sont proportionnelles aux longueurs des côtés de ABC.

2 - Définition et propriétés

Définition :
Quand deux figures F et F' ont la **même forme** et que les longueurs des côtés de F' sont **proportionnelles** aux longueurs des côtés de F, on dit que F est un **agrandissement** (ou une **réduction**) de F'.

Dans la figure ci-dessus, le triangle DEF est un **agrandissement** de ABC et ABC est une **réduction** de DEF.

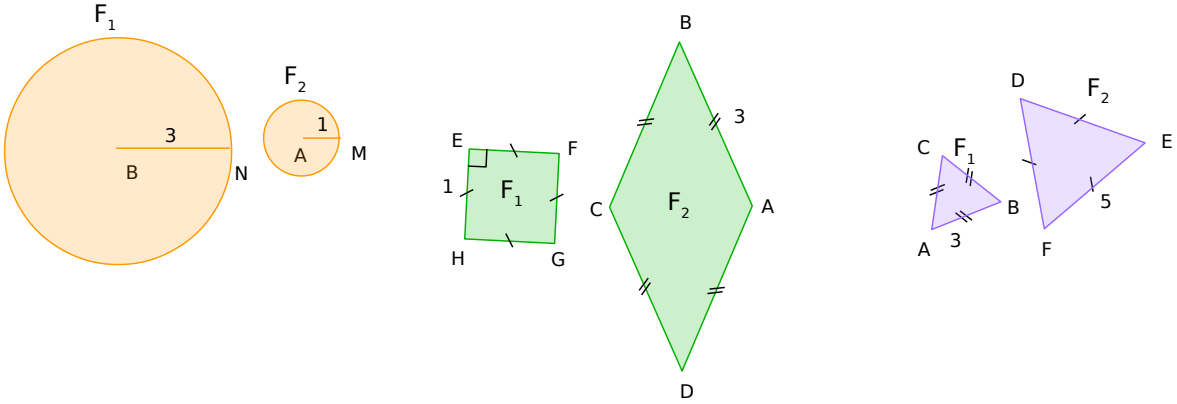
Propriétés :
Quand une figure est un agrandissement (ou un réduction) d'une autre, alors **les angles sont conservés**.

En particulier :

- si deux segments sont **parallèles** alors leurs agrandissements (resp. réductions) seront également **parallèles** dans la figure agrandie (resp. réduite).
- si deux segments sont **perpendiculaires** alors leurs agrandissements (resp. réductions) seront également perpendiculaires dans la figure agrandie (resp. réduite).

ENTRAINE-TOI

Exercice 5 Dans chacun des cas suivant, indique si la figure 2 est un agrandissement (ou une réduction) de la figure 1 et si c'est le cas, calcule le coefficient d'agrandissement (ou de réduction).



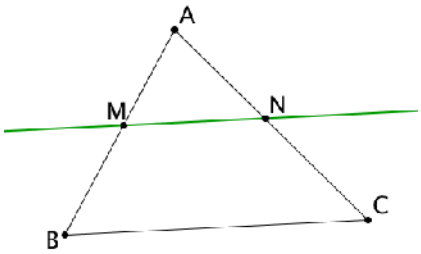
Exercice 6 **a.** Trace un triangle JKL tel que $\widehat{JKL} = 130°$, JK = 3 cm et KL = 2 cm et place le point M sur la demi-droite [JK) tel que JM = 7,5 cm.

b. En considérant que [JM] est l'agrandissement du segment [JK], construis l'agrandissement JMN du triangle JKL.

c. Que peux-tu dire des droites (KL) et (MJ) ?
Pourquoi ?

Partie 3 :
Proportionnalité dans le triangle

1 - Introduction



Soit un triangle ABC et M un point du segment [AB].
Soit **(d) la droite passant par M et qui est parallèle à [BC].**
(d) coupe [AC] en N.

Il semble que le triangle AMN soit un réduction du triangle ABC

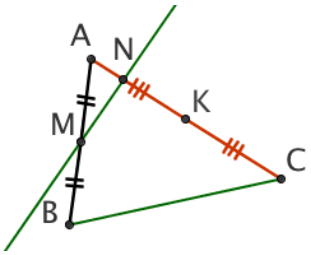
Prenons un exemple simple pour le vérifier
Supposons que M soit le milieu de [AB] : AM = 1/2 AB
Que peut-on dire de N ?
On reconnaît une des configurations de la partie précédente.
D'après le **second théorème des milieux**, la droite (d) passe par le milieu d'un côté, est parallèle à un deuxième côté donc elle coupe le troisième côté en son milieu.
Donc on peut dire que **N est le milieu de [AC] et donc: AN= 1/2 AC**
De plus d'après le **premier théorème des milieux,** le segment qui joint les deux milieux de deux côtés d'un triangle a une longueur égale à la moitié du troisième côté.
On a donc (1) : **AB = 2 AM , AC = 2 AN et MN = 1/2 BC**
Le tableau suivant est donc un **tableau de proportionnalité** :

triangle ABC	AB	AC	BC
triangle AMN	AM	AN	MN

AMN est effectivement une réduction de ABC d'un facteur égal à 2.
Les longueurs de AMN sont proportionnelles aux longueurs de ABC et le coefficient de proportionnalité vaut 1/2.
$\frac{AM}{AB}=\frac{1}{2}$, $\frac{AN}{AC}=\frac{1}{2}$, $\frac{MN}{BC}=\frac{1}{2}$,

On en déduit donc l'égalité des rapports : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

Attention : on obtient ce résultat car la droite (MN) est parallèle à (BC) !



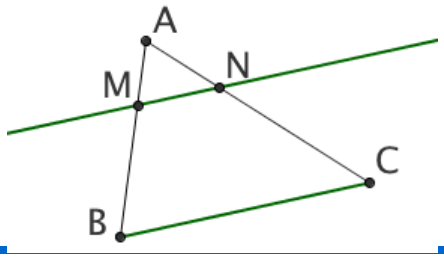
Ci-dessus, (MN) n'est pas parallèle à (BC) , et le tableau **n'est pas un tableau de proportionnalité**

Triangle ABC	AB	AC
Triangle AMN	AM	AN

puisque $AB = AM \times 2$
alors que $AC \neq AM \times 2$
Ce résultat se généralise pour toutes les positions du point M sur le segment [AB] :

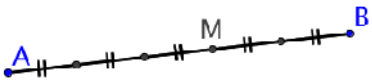
2 - Application :

Petit théorème de Thalès :
Soit ABC un triangle,
un point M du segment [AB] et un point
N appartenant au segment [AC].
Si les droites **(MN) et (BC) sont parallèles**,
alors on a $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$



Remarque :

Pour décrire la position d'un point sur un segment, on utilise des fract˙
Par exemple dans le cas ci-contre, pour préciser la position de M sur le segment [AB], il suffit d'écrire $\frac{AM}{AB}=\frac{3}{5}$.



On peut donc interpréter les égailtés du théorème précédent comme ceci:

$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ signifie que **la position de M sur le segment [AB] est la même que celle de N sur le segment [AC].**
Par exemple, si M est au tiers du segment [AB] ET SI les droites (MN) et (BC) sont parallèles ALORS le point N sera également au tiers du segment [AC].

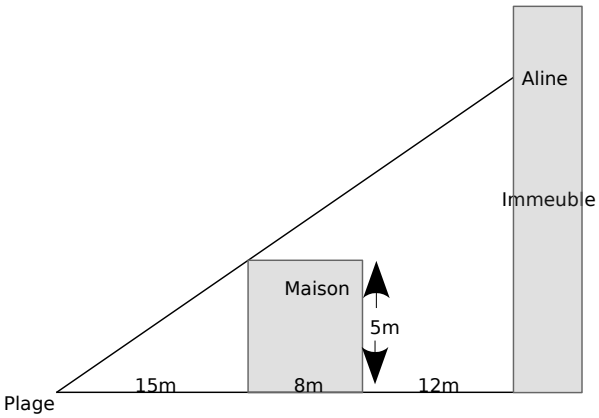
Remarque :

Si les rapports ne sont pas égaux alors les droites ne peuvent pas être parallèles.
Le petit théorème de Thalès permet donc de démontrer que deux droites ne sont pas parallèles.

ENTRAINE-TOI

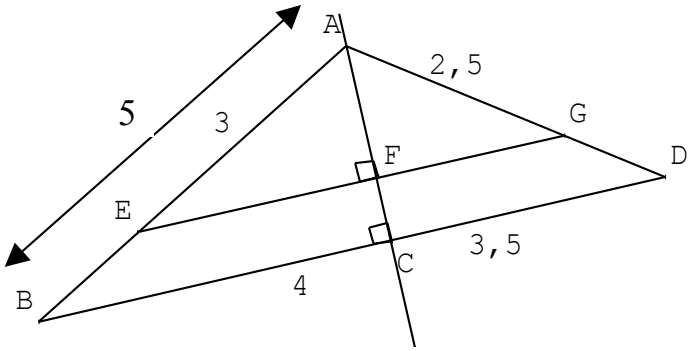
Exercice 7 Soit un triangle ABC tel que AB = 7,2 cm, BC = 6,6 cm et AC = 6 cm. Soit E le point du segment [BC] tel que CE = 3 cm. La droite parallèle à (AB) passant par E coupe [AC] en F. Calcule EF et CF.

Exercice 8 Aline veut louer un appartement dans un immeuble situé près de la mer. Une maison est malheureusement construite entre la plage et son immeuble.
À quelle hauteur minimale doit se situer son appartement pour que Aline puisse apercevoir la mer ?



EXERCICES DE SYNTHESE

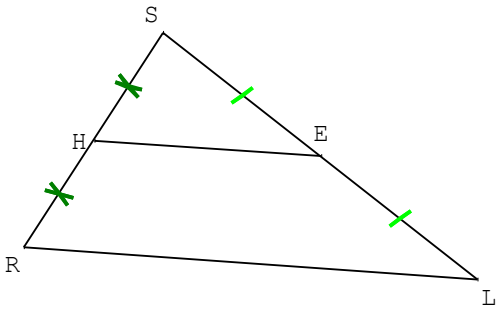
Exercice 1 **LA CHARPENTE**



Sur le schéma de charpente ci-contre , les unités sont en m.
a) Montre que les droites (EG) et (BD) sont parallèles.
b) Calcule EF
c) Calcule EG. et AD.
d) Nomme un agrandissement du triangle AFG; et donne le coefficient de proportionnalité.
e) Calcule AC. Donne la longueur totale de bois nécessaire pour réaliser cette charpente.
f) Cette charpente sera en pignon ouest d'une maison bretonne, et couverte d'ardoises. Quelle surface d'ardoises doit-on prévoir pour couvrir ce pignon?

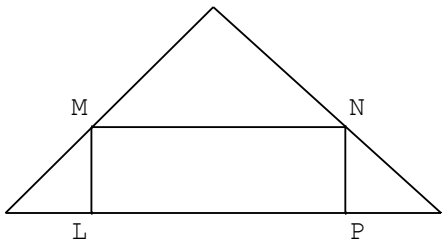
Exercice 2

a) Prouver que (HE) est parallèle à (RL)
b) Construire T, symétrique de E par rapport à S.
La droite (TH) coupe [RL] en A .
c) On donne HE = 12 cm .
Calculer RA .
Justifie chacune des étapes du raisonnement.



Exercice 3

Un problème de Muhammad Al-Khwarizmi , *brillant mathématicien perse, fondateur des mathématiques arabes, né au VIIIème siècle. Il est surnommé « le père de l'algèbre »*

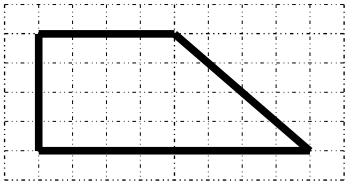


Muhammad veut aménager une pièce dans le grenier de sa maison. La coupe de son grenier est un triangle isocèle de base 6m et de hauteur 3,5m. La coupe de la pièce est un rectangle MNPL. Muhammad veut que la hauteur de la pièce soit LM = 2,1m, et qu'elle soit la plus large possible. Calculer la largeur LP de la pièce qu'il obtiendra.

JEUX

Enigme 1 **Partage équitable!**

Voici ce qu'il reste d'une plaquette de chocolat. Régale quatre gourmands de 4ème en la partageant en quatre parts identiques et de même forme.



Enigme 2 **De eux à toi**

Trace un triangle EUX. Puis trace le triangle TOI tel que E soit le milieu de [TO], U le milieu de [TI] et X le milieu de [OI].

Enigme 3 **Une bien vieille énigme... résolue**

Plus de 5 siècles avant notre ère, le souverain égyptien Amasis souhaitait connaître la hauteur de la pyramide de Khéops, inconnue jusqu'alors. La légende rapporte que le philosophe-mathématicien grec Thalès résolut cette énigme .

Invité par le pharaon, Thalès s'inspira d'une méthode apprise des Babyloniens et s'écria *« Le rapport que j'entretiens avec mon ombre est le même que celui que la pyramide entretient avec la sienne ».* Il aurait tracé un cercle de même rayon que sa taille, se serait positionné au centre, et aurait attendu que son ombre touche le bord du cercle. A ce moment, il ne restait plus qu'à mesurer l'ombre de la pyramide...égale à sa hauteur.

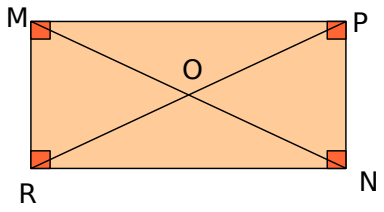
Illustre la solution de Thalès par un dessin.

Cette légende explique que les collégiens Allemands connaissent ce théorème sous le joli nom de « Strahlensatz » (th des rayons).

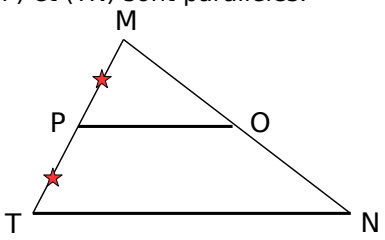
AS-TU COMPRIS LE CHAPITRE ?

1) Pour chaque figure, explique pourquoi le point O est le milieu du segment [MN].

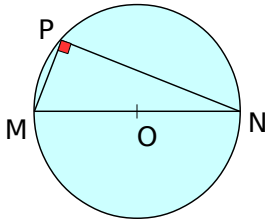
a.



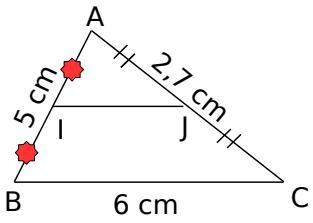
b. (OP) et (TN) sont parallèles.



c. O est le centre du cercle.



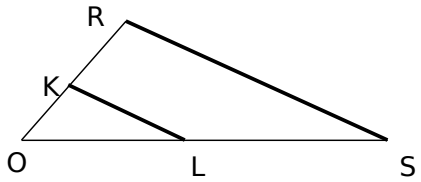
2) Que peux-tu déduire de la figure ci-contre ?



3) Indique la valeur de x dans chacun des cas suivants:

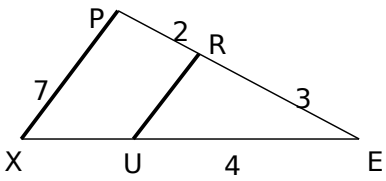
$\frac{7}{21} = \frac{x}{30}$	90	5	10
$\frac{17}{18} = \frac{8,5}{x}$	9,5	36	9
$\frac{3,5}{x} = \frac{4,9}{2}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{28}{10}$	$\frac{7}{10}$

4) Sur la figure ci-contre, les droites (KL) et (RS) sont parallèles.
D'après la propriété sur la proportionnalité des longueurs des côtés d'un triangle, on peut écrire :



a. $\frac{OL}{LS} = \frac{OK}{KR} = \frac{KL}{RS}$ | **b.** $\frac{OL}{OS} = \frac{OK}{OR} = \frac{KL}{RS}$ | **c.** $\frac{OL}{LS} = \frac{OR}{OK} = \frac{RS}{KL}$ | **d.** $\frac{OL}{OK} = \frac{OS}{OR} = \frac{KL}{RS}$

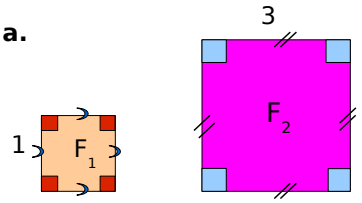
5) Calcule les longueurs EX et RU.
Les droites (PX) et (RU) sont parallèles.



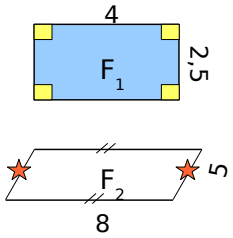
6) A quelle(s) condition(s) peut-on affirmer qu'une figure F_1 est la réduction / l'agrandissement d'une figure F_2 ?

7) Dans quel(s) cas, la figure F_1 est-elle une réduction de la figure F_2 ?

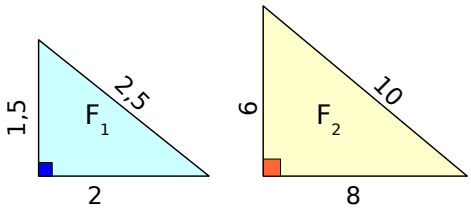
a.



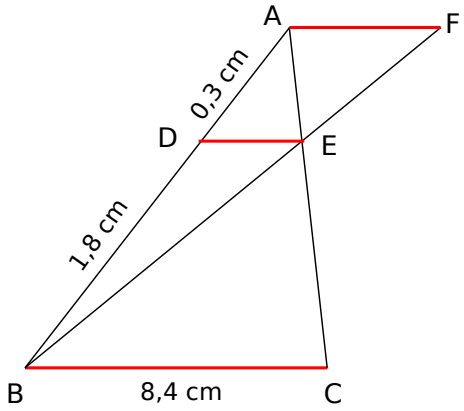
b.



c.



8) On considère la figure suivante dans laquelle (AF), (DE) et (BC) sont parallèles.
Calcule DE et AF.



DEVOIR SURVEILLE

EXERCICE 1 : **/4 points**

Les questions du tableau ci-dessous sont indépendantes et s'appliquent au triangle CAB tracé à droite. R, S et T sont respectivement des points de [AC], [BC] et [AB].

Dans chaque cas, écris les lettres de toutes les réponses correctes dans la colonne de droite. Il y a au moins une réponse possible par ligne.

Si on sait que...	**on peut en déduire que...**			**Ton choix :**
	Réponse A	**Réponse B**	**Réponse C**	
R milieu de [AC] et T milieu de [AB]...	S milieu de [BC].	(ST) parallèle à (AC).	BC = 2RT.	
(ST) parallèle à (AC) et R milieu de [AC]...	$\frac{BC}{BS} = \frac{BA}{BT} = \frac{CA}{ST}$.	T milieu de [AB].	ST = $\frac{AC}{2}$.	
T milieu de [AB] et (TR) parallèle à (BC)...	$\frac{BA}{BT} = \frac{CA}{CR} = \frac{BC}{TR}$.	$\frac{AT}{AB} = \frac{AR}{AC} = \frac{1}{2}$.	R milieu de [AC].	

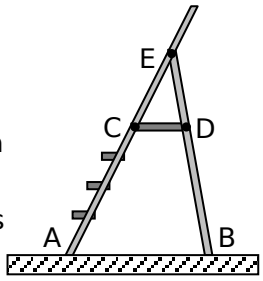
EXERCICE 2 : **/4 points** (1 + 2 + 1)

Trace en vraie grandeur un triangle TUV tel que TU = 9,8 cm, TV = 8,4 cm et UV = 4,2 cm. Sur [TV], place un point M tel que TM = 3 cm. Trace la droite (d) parallèle à (UV) passant par M. Elle coupe [TU] en un point N.

Détermine, en justifiant et en détaillant tes calculs, les distances TN et MN.

EXERCICE 3 : **/2 points**

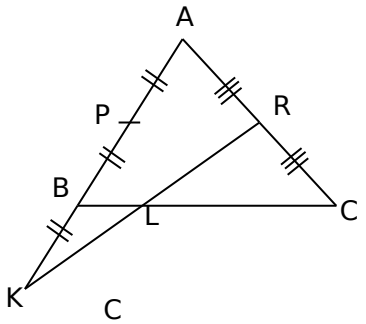
Dans cette vue de profil d'un escabeau touchant le sol en deux points A et B, la planche d'appui [CD] est parallèle à [AB], EA = 2,40 m, AC = 2 m et CD = 0,25 m.



Détermine, en justifiant et en détaillant tes calculs, la distance AB séparant les deux pieds de l'escabeau.

EXERCICE 4 : **/5 points** (1,5 + 1,5 + 2)

Dans la figure ci-contre, P est le milieu de [AB], R le milieu de [AC] et B le milieu de [PK].



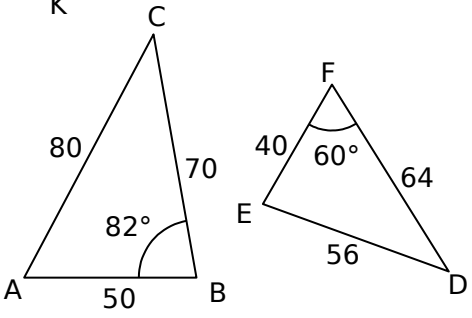
a. Que peut–on dire des droites (PR) et (BC) ? Justifie.

b. En remarquant que les droites (BL) et (BC) sont confondues, démontre que L est le milieu de [KR].

c. On donne maintenant BC = 18 cm. Détermine en justifiant la distance BL.

EXERCICE 5 : **/5 points** (2 + 3)

Dans les triangles ABC et DEF, les longueurs sont exprimées en centimètres. Les mesures des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{EFD}$ sont données au degré le plus proche. Sur le dessin, les dimensions ne sont pas respectées.



a. Prouve en détaillant tes calculs que le triangle EFD est une réduction du triangle ABC. Tu préciseras le coefficient de cette réduction.

b. Donne, en justifiant, les mesures des angles $\widehat{CAB}$, $\widehat{FED}$ et $\widehat{ACB}$ au degré le plus proche.