3N1

Nombres entiers et rationnels

EST-CE QUE TU TE SOUVIENS ?

1) Sais-tu ce qu'est un multiple d'un nombre ?

a. oui   b. non

2) Parmi ces nombres, lequel est un multiple de 15 ? (plusieurs bonnes réponses possibles)

a. 30   b.5   c. 55   d.15

3) Sans calcul, indique si 795 est divisible. (plusieurs bonnes réponses possibles)

a. par 2   b. par 5   c. par 3   d. par 4   e. par 9

4) Sais-tu ce qu'est un diviseur d'un nombre ?

a. oui   b. non

5) Parmi ces nombres, lesquels divisent 27 ? (plusieurs bonnes réponses possibles)

a. 54   b.7   c.3   d.1   e.0

6) Effectue la division euclidienne de 68 par 14 et écris ta réponse sous forme d'une égalité.

7) $71 = 13 \times 5 + 6$. Quel est le reste de la division euclidienne de 71 par 5 ?

8) Sais-tu simplifier une fraction ?

a. oui   b. non

9) Simplifie le plus possible la fraction suivante : $\frac{90}{84}$.

Partie 1
DÉTERMINER UN PGCD

ECLAIRAGE

1 - Qu'est-ce que le PGCD de deux entiers non nuls ?

Considérons par exemple le nombre entier 24.
Cet entier admet plusieurs diviseurs.
En effet, on a 24 = 1 × 24 = 2 × 12 = 3 × 8 = 4 × 6.
On en déduit que **24 admet pour diviseurs : 1, 2 , 3 , 4, 6 , 8 , 12 et 24.**

Remarque :
− Tout nombre entier positif autre que 0 et 1 admet au moins deux diviseurs : 1 et lui-même.
− Les diviseurs d'un entier sont nécessairement inférieurs ou égaux à cet entier.

On s'intéresse maintenant aux diviseurs communs que peuvent avoir deux nombres entiers positifs, c'est-à-dire un nombre entier qui divise chacun d'eux.
On est déjà assuré que 1 sera un diviseur commun aux deux nombres car 1 divise tous les nombres mais il peut y en avoir d'autres.

Exemple :
− Les diviseurs de 18 sont 1, 2, 3, 6, 8, 9 et 18 et les diviseurs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24.
− Les diviseurs communs à 18 et 24 sont donc : 1, 2, 3 et 6.

Et il est parfois utile de chercher le plus grand de ces diviseurs communs comme par exemple dans le cas où on souhaite simplifier une fraction ou alors réaliser un problème de partage (voir la partie II).

Définition :
Le plus grand des diviseurs communs de deux entiers est appelé **PGCD** des deux entiers.

Remarques :
− Le PGCD de deux entiers est nécessairement inférieur ou égal aux deux entiers.
− Il se peut que seul 1 divise les deux entiers : on dit qu'ils sont premiers entre eux.
− Il se peut que l'un des entiers divise l'autre.
4 est un diviseur commun à 4 et 12 et c'est nécessairement le plus grand diviseur commun car 4 est le plus grand des diviseurs de 4. Le PGCD des deux nombres 4 et 12 est donc égal à 4.
− Connaître le PGCD des deux nombres permet de connaître tous leurs diviseurs communs :
le PGCD de 18 et 24 est 6 et tous les diviseurs communs de 18 et 24 divisent 6.
Les diviseurs communs sont donc 1,2,3 et 6.

2 - Déterminer un PGCD en déterminant les listes de diviseurs.

Exemple :. *Détermine le PGCD de 70 et de 42.*

70 = **1** × 70 42 = 1 × 42 70 = **2** × 35 42 = 2 × 21 70 = **5** × 14 42 = 3 × 14 70 = **7** × **10** 42 = 6 × **7**	Tu décomposes 70 en produit de deux nombres en testant tous les entiers à partir de 1. 70 est divisible par **1** et **2** mais pas par **3** et **4**. Ensuite, 70 est divisible par **5**, pas par **6**, par **7** mais pas par **8** et **9**. 70 est bien divisible par **10** mais **10** est déjà dans la liste. Tu as donc trouvé tous les diviseurs de 70.
Les diviseurs de 70 sont : 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70. Les diviseurs de 245 sont : 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42.	Tu établis ensuite la liste des diviseurs des deux nombres. C'est plus simple si tu les ranges dans l'ordre croissant. Enfin, on repère les diviseurs qui sont communs à 70 et 245. Le PGCD est le plus grand de ces diviseurs communs.
Le PGCD de 70 et 42 est 14 ou PGCD(70,42) = 14.	Deux manières de noter la réponse : l'écriture en toute lettre ou avec les symboles mathématiques.

Écrire TOUS les diviseurs de deux nombres puis rechercher le plus grand diviseur commun peut être très long et fastidieux.
Heureusement, il existe des méthodes permettant de déterminer le PGCD plus rapidement.
Ces méthodes sont appelées **algorithmes** car on répète plusieurs fois des opérations qui se ressemblent jusqu'à ce que l'on trouve le PGCD.

3 - Calculer un PGCD par la méthode des soustractions successives

Exemple : *Calcule le PGCD de 504 et de 189 avec la méthode des soustractions successives.*

a	b	a – b
504	189	504 – 189 = 315
315	189	315 – 189 = 126
189	126	189 – 126 = 63
126	63	126 – 63 = 63
63	63	63 – 63 = 0

Tu effectues la soustraction de 504 et de 189.
Le PGCD de 504 et 189 est égal au PGCD de 189 et 315.

Tu recommences la méthode avec 315 et 189.
Attention, le plus grand nombre est dans la première colonne.
Le PGCD de 315 et 189 est égal au PGCD de 189 et 126.

Le PGCD de 189 et de 126 est égal au PGCD de 126 et 63.

Le PGCD de 126 et de 63 est égale au PGCD de 63 et 63.

La différence est nulle donc le PGCD cherché est le dernier résultat non nul, soit 63.

PGCD(504,189) = 63

4 - Calculer un PGCD par la méthode des divisions successives

Exemple : *Calcule le PGCD de 2208 et de 216 avec la méthode des divisions successives.*

a	b	a – b
2208	**216**	2208 = **216** × 10+**48**
216	**48**	216= **48** × 4+**24**
48	**24**	48= **24** × 2+**0**

Tu effectues la division euclidienne de 2208 par 216.
Le PGCD de 2208 et **216** est égal au PGCD de **216** et **48** (reste de la division).

On recommence la méthode avec 216 et 48.
Le PGCD de **216** et **48** est égal au PGCD de **48** et **24**.

Le reste est nul donc le PGCD est le dernier reste non nul soit **24**.

Remarque : cette méthode s'appelle aussi **algorithme d'Euclide.**

PGCD(2208,216) = 24

ENTRAINE-TOI

Exercice1 Sans calcul, trouve le PGCD des nombres suivants et entoure les nombres premiers entre eux :

a. 1 et 154 :.........................

b. 21 et 28 : ....

c. 8 et 24 : ....

d. 17 et 19 : ....

Exercice2 Calcule le PGCD de 175 et de 245 en listant leurs diviseurs communs.

Exercice3 Calcule le PGCD de 132 et de 54 avec la méthode des soustractions successives.

Exercice4 Calcule le PGCD de 5 916 et de 6 273 avec la méthode des divisions successives.

Exercice5 Calcule le PGCD de 6 783 et de 8 415.

Partie 2 : UTILISER UN PGCD

1 - Simplifier une fraction

Pour simplifier $\frac{18}{24}$, tu remarques que 2 est un diviseur commun de 18 et 24 alors on peut écrire :

$\frac{18}{24} = \frac{2\times 9}{2\times 12} = \frac{9}{12}$ mais tu peux encore simplifier la fraction obtenue par 3.

Méthode:
Si tu simplifies la fraction par le **PGCD** du numérateur et du dénominateur, tu simplifieras au maximum la fraction du premier coup.

Exemple :

Simplifier $\frac{471}{1\,099}$

Avec la méthode des divisions successives :

$1099 = 471 \times 2 + 157$
$471 = 157 \times 3 + 0$
donc PGCD(1099,471) = **157**

Tu calcules d'abord le PGCD en utilisant la méthode de ton choix.

$471 = 157 \times 3$ et $1099 = 157 \times 7$

Tu décomposes chaque nombre à l'aide du PGCD.

$\frac{471}{1\,099} = \frac{157\times 3}{157\times 7} = \frac{3}{7}$

Tu simplifies le quotient par le PGCD obtenu.

2 - Résoudre un problème à l'aide du PGCD

Exemple :

*On dispose de 132 bonbons et de 60 chocolats. Combien peut-on faire un maximum de paquets identiques de telle sorte que chaque paquet contienne le même nombre de bonbons et de chocol*ats ?

Comme 2 est un diviseur commun à 132 et 60, on peut faire 2 paquets contenant chacun 66 bonbons et 30 chocolats car 132 = 2 × 66 et 60 = 2 × 30.

Mais peut-on obtenir un nombre supérieur de paquets ?

Comme le nombre de paquets est un diviseur commun à 132 et 60, pour obtenir le plus grand nombre possible de paquets, il suffit de calculer le PGCD de 132 et 60.

Avec la méthode des divisions successives :

132 = 60 × 2 + 12

60 = 12 × 5 + 0

donc le PGCD de 132 et 60 est égal à 12.

Le nombre maximum de paquets est égal à 12. Comme 132 = 12 × 11 et 60 = 12 × 5, chaque paquet contiendra 11 bonbons et 5 chocolats.

ENTRAINE-TOI

Exercice6 (D'après brevet 2009)

a. Comment, sans calcul, peut-on justifier que la fraction $\frac{1\,848}{2\,040}$ 'est pas irréductible ?

b. Calcule le PGCD des nombres 1 848 et 2 040 en indiquant la méthode.

c. Simplifie la fraction $\frac{1\,848}{2\,040}$ pour la rendre irréductible.

Exercice7 Un centre aéré organise une sortie à la mer pour 315 enfants. L'équipe des accompagnateurs comprend 35 membres. Combien de groupes comportant le même nombre d'enfants et le même nombre d'accompagnateurs peut-on faire ?

Exercice8 Un chocolatier dispose de 168 chocolats noirs et de 210 chocolats au lait, il veut faire un maximum de ballotins contenant le même nombre de chocolats noirs et de chocolats au lait en utilisant tous les chocolats.

a. Combien de ballotins peut-il faire ?

b. Quelle sera la composition d'un ballotin ?

Exercice9 (D'après brevet 2000). Un ouvrier dispose d'une plaque de métal de 110 cm de longueur et de 88 cm de largeur. Il doit découper des carrés tous identiques, les plus grands possibles sans avoir de perte.

a. Quelle sera la longueur du côté d'un carré ?

b. Combien de carrés sobtiendra-t-il ?

Exercice10 (D'après brevet 2000).

a. Détermine le plus grand commun diviseur à 640 et 520.

b. Le sol d'un local est un rectangle de 6,40 m par 5,20 m. Il doit être entièrement recouvert par des dalles carrées de même dimension. L'entreprise a le choix entre les dalles de côté 20 cm, 30 cm, 35 cm, 40 cm ou 45 cm.

Parmi ces dimensions, lesquelles peut-on choisir pour que les dalles puissent être posées sans découpe

Dans chacun des cas trouvés, combien faut-il utiliser de dalles ?

Partie 3 : CALCULER AVEC LES QUOTIENTS

1 - Calculer une expression

Une règle:
Quand plusieurs opérations s'enchaînent dans un calcul , l'**ordre d'exécution des opérations** est le suivant : calculs entre Parenthèses, Exposants, Multiplications et Divisions, Additions et Soustractions.
Une astuce pour mémoriser cet ordre : les initiales donnent **PEMDAS**.
De plus, il faut simplifier les fractions dès que possible comme cela est expliqué dans le paragraphe précédent.

Exemple :

Calculer $\frac{5}{3} - \frac{1}{3} : \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{10}\right)$

$$\frac{5}{3} - \frac{1}{3} : \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{10}\right) = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} : \left(\frac{8}{10} - \frac{1}{10}\right)$$

$$= \frac{5}{3} - \frac{1}{3} : \frac{7}{10}$$

Tu commences par le calcul par la parenthèse donc par la soustraction et non par la première opération du calcul même s'il est tentant d'effectuer d'abord $\frac{5}{3} - \frac{1}{3}$.

$$= \frac{5}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{10}{7}$$

Ensuite, la division est l'opération prioritaire.

$$= \frac{5}{3} - \frac{10}{21}$$

$$= \frac{35}{21} - \frac{10}{21}$$

$$= \frac{25}{21}$$

Enfin la soustraction est la dernière opération à effectuer.

2 - Utilisation de la calculatrice

Exemple 1 :

Trouve le PGCD de 26 187 et de 11 223 à la calculatrice sans utiliser la fonction pgcd.

Tu simplifies $\frac{26\,187}{11\,223}$ à la calculatrice, tu obtiens $\frac{7}{3}$.

or 26 187 ÷ 7 = 3 741 et 11 223 ÷ 3 = 3 741

Le PGCD de 26 187 et 11 223 est égal à 3 741.

Exemple 2 :

Trouve la valeur approchée au centième de $\dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{9}{4} - \frac{7}{25}}$ *en n'utilisant que les quatre opérations et les parenthèses..*

Avant de taper le calcul à la calculatrice, il convient d'écrire le calcul en ligne avec les quatre opérations en rajoutant les parenthèses nécessaires pour que la calculatrice respecte l'ordre des opérations :

$\dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{9}{4} - \frac{7}{25}} = (5 \div 3) \div [(9 \div 4) - (7 \div 25)]$. A la calculatrice, on obtient : 0,84.

L'écriture d'expression sous forme fractionnaire permet une meilleure compréhension que l'écriture en ligne.

ENTRAINE-TOI

Exercice11 Calcule : $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ $\qquad B = \frac{7}{8} \div \frac{7}{4}$

Exercice12 Écris sous la forme d'une fraction irréductible les expressions suivantes :

$A = \frac{7}{5} - \frac{11}{21} \div \frac{6}{7}$ $\qquad B = \frac{3}{8} - \frac{5}{8} \times \frac{2}{3}$ $\qquad C = \frac{5 - \frac{2}{5}}{\frac{8}{5} \times 3}$

Exercice13 (D'après brevet 2009)

a) Calcule $A = \frac{8 + 3 \times 4}{1 + 2 \times 1{,}5}$

b) Pour calculer A, un élève a tapé sur sa calculatrice la succession de touches ci-dessous :

8	+	3	x	4	÷	1	+	2	x	1,5	=

Explique pourquoi il n'obtient pas le bon résultat.

Exercice14 (D'après brevet 2008)

Trois points A, B et C d'une droite graduée ont respectivement pour abscisse : $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$ et $\frac{5}{12}$. Ces trois points sont-ils régulièrement espacés sur la droite graduée ? Justifie.

EXERCICES DE SYNTHESE

Exercice1

Calcule $\frac{645}{1505} + \frac{11}{21}$ en détaillant les étapes de ton calcul. (corrigé avec pgcd et calculatrice)

Exercice2

Un fleuriste veut faire des bouquets de tulipes et de marguerites. Il souhaite que toutes les fleurs soient utilisées, que tous les bouquets aient le même nombre de tulipes et de marguerites. Il constate qu'il a 198 tulipes et 330 marguerites. De plus il veut faire le maximum de bouquets.

1. Combien de bouquets peut-il faire ?

2. Combien chaque bouquet contiendra-t-il de tulipes ? De marguerites ?

3. Il voudrait ajouter des mimosas dans son bouquet, le même nombre de brins dans chaque bouquet et utiliser tout son stock de 154 brins. Pourra-t-il réaliser son souhait ?Si non, comment peut-il faire ?

Exercice3 *(pense à un schéma représentant la situation concrète)*

La piscine de Monsieur Ducasse mesure 14,8 m de longueur sur 4,8 m de largeur. Elle est entourée d'une plage large de 1,6 m. Il souhaite paver cette plage avec des carreaux carrés dont le côté mesure un nombre entier de centimètres tout en ayant aucune découpe.

1. Quelle sont les dimensions possibles des carreaux ?

2. Monsieur Ducasse se décide pour des carreaux les plus grands possibles. Quelles sera la taille des carreaux ?

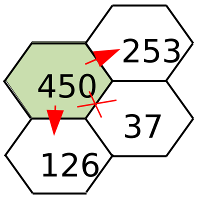
3. Combien devra-t-il en utiliser ?

4. Un paquet vendu 38,50 € contient le nombre de carreaux minimum pour paver 1 m². Combien y a-t-il de carreaux dans un paquet ?

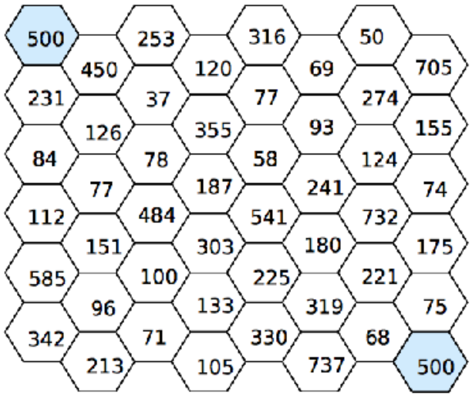
5. Combien Monsieur Ducasse paiera-t-il les carreaux ?

JEUX

LABYRINTHE



Aller de 500 à 500 en se déplaçant d'une case à l'autre selon la règle suivante :
On peut descendre vers une case dont le nombre possède au moins deux diviseurs en commun avec le nombre de la case où on se situe.
On peut monter vers une case contenant un nombre premier avec le nombre de la case où on se situe.
Par exemple de 450,
on peut descendre vers 126 car 2 et 1 sont des diviseurs communs à 450 et 126 ;
on ne peut pas descendre de 450 à 37 car ce sont des nombres premiers entre eux ;
on peut monter de 450 à 253 car ils sont premiers entre eux.



Énigme 1

Trouver deux nombres dont le PGCD est 45 et dont la somme est 495.

Énigme 2

L'escalier d'une tour a un nombre de marches compris entre 130 et 150.
Si je les monte trois par trois, j'arrive en haut.
Si j'étais capable de les monter 4 par 4, je finirais par 1 marche.
Combien y a-t-il de marches ?

Qui suis je ?

Je suis un nombre plus petit que 175. En outre, 210, 126 et moi avons quatre diviseurs communs.
Enfin, je suis premier avec 87.

AS-TU COMPRIS LE CHAPITRE ?

1) Les diviseurs de 462 sont : 1, 2, 3, 6, 7, 11, 66, 77, 153, 231 et 462.
Quel est le PGCD de 28 et 462 ?

2) Le calcul du PGCD de 2401 et 1225 par la méthode des soustractions successives donne $2401 - 1225 = 1176$.
Que dois-tu maintenant calculer ?

3) Les dernières étapes d'un calcul de PGCD sont : $8 - 4 = 4$; $4 - 4 = 0$.
Quel est le PGCD obtenu ?

4) Le calcul du PGCD de 5228 et 1327 par la méthode des divisions successives donne $5228 = 1327 \times 3 + 1\,247$.
Que dois-tu calculer maintenant?

5) Les dernières étapes d'un calcul de PGCD sont : $27 = 4 \times 6 + 3$ puis $6 = 3 \times 2 + 0$.

Quel est le PGCD obtenu ?

6) On donne le calcul suivant : $\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{5}{2}$.
Par quelle opération dois-tu commencer le calcul ?

7) Avec 28 feuilles roses et 42 feuilles bleues, on veut faire des livres contenant le même nombre de feuilles de chacune des couleurs.
Combien de livres identiques peut-on faire au maximum ?

8) Quelle fraction obtiens-tu quand tu rends $\frac{1\,725}{1\,995}$ irréductible ?

a. $\frac{345}{399}$ b. $\frac{115}{133}$ c. $\frac{17}{19}$

9) PGCD(a,42) = 7 et a est plus grand que 42.
Donne plusieurs valeurs possibles pour a

10) Deux nombres entiers consécutifs sont :
a. toujours premiers entre eux b. jamais premiers entre eux c. ça dépend

DEVOIR SURVEILLE

La calculatrice n'est pas autorisée.

EXERCICE 1 : **/3 points**

Dans chaque cas, calcule le PGCD des nombres donnés en détaillant la méthode.

a. 36 et 60 **b.** 321 et 112 **c.** 1 053 et 325

EXERCICE 2 : **/3 points**

Un collège organise un tournoi sportif par équipes pour tous ses élèves. Chaque équipe doit comporter le même nombre de filles et le même nombre de garçons. Les professeurs souhaitent constituer le plus grand nombre possible d'équipes. Il y a 210 filles et 294 garçons.

a. Quel est le plus grand nombre d'équipes que l'on peut constituer ?

b. Combien y a-t-il alors de filles et de garçons dans chaque équipe ?

EXERCICE 3 : **/3 points**

Un ouvrier dispose de plaque de métal de 3,15 m de long et 2,80 m de large. Son patron lui a demandé de découper, dans ces plaques, des carrés tous identiques, les plus grands possibles, de façon à ne pas avoir de perte.

a. Quelle sera la longueur du côté d'un carré ?

b. Combien découpera-t-il de carrés par plaque ?

EXERCICE 4 : **/2 points**

Les nombres suivants sont-ils premiers entre eux ? Justifie ta réponse.

a. 357 et 561 **b.** 133 et 185

EXERCICE 5 : **/3 points**

Rends les fractions suivantes irréductibles, détaille la démarche.

a. $\frac{240}{105}$ **b.** $\frac{972}{648}$ **c.** $\frac{119}{187}$

EXERCICE 6 : **/6 points**

Calcule et donne le résultat sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un entier relatif.

$A = \frac{5}{7} - \frac{2}{7} \times \frac{1}{6}$

$B = \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) \times \frac{5}{2}$

$C = \left(\frac{2}{3} - 3\right) \div \frac{1}{9}$

$D = \frac{1}{3} + \frac{5}{6} \div \frac{3}{2}$

$E = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \times \left(7 + \frac{37}{9}\right)$

$F = \frac{35}{15} \times \left(\frac{4}{9} + \frac{7}{12}\right)$