

3G1

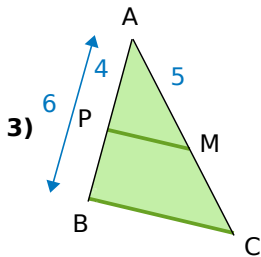
Théorème de Thalès

EST-CE QUE TU TE SOUVIENS ?

1) On te donne une droite (d) et un point A n'appartenant pas à cette droite. Avec un compas et une règle non graduée, sais-tu construire la parallèle à (d) passant par A ?

- a. oui b. non

2) Sachant que $\frac{3}{a} = \frac{7}{10,5}$, calcule a.



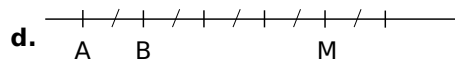
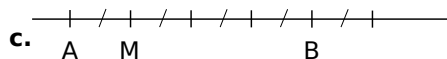
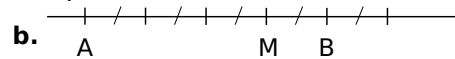
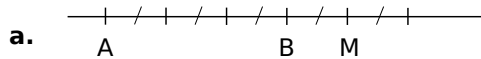
Sachant que (PM) et (BC) sont parallèles, calcule la longueur AC.

4) Les quotients $\frac{4}{3}$ et $\frac{6,912}{5,2}$ sont-ils égaux ?

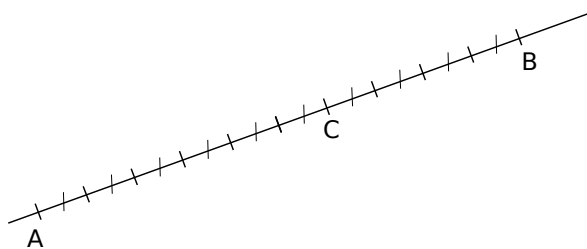
- a. oui b. non

5) A, M, B et C sont alignés dans cet ordre. Sachant que $AM = 7$ cm ; $AB = 9$ cm et $MC = 8$ cm, calcule MB et AC.

6) Parmi les figures suivantes, dans quel cas a-t-on $AM = \frac{3}{4} AB$?



7)



$$\frac{AC}{AB} = \dots$$

- a. $\frac{4}{10}$ b. $\frac{7}{10}$ c. $\frac{3}{5}$

Partie 1 LE THEOREME DE THALES

ECLAIRAGE

1 - Introduction

Dans la figure ci-contre, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
 $AB = 8$, $AM = 6$ et $BC = 3$.

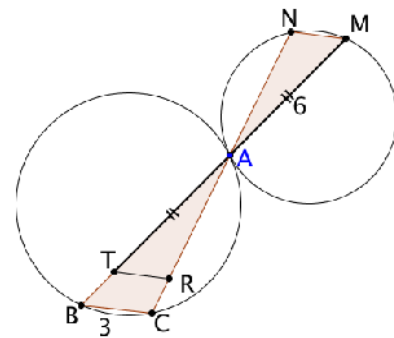
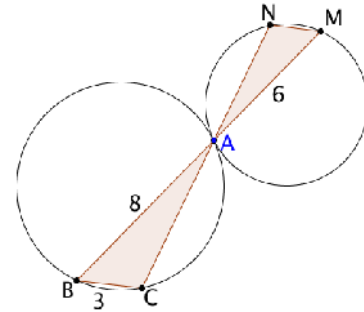
Peut-on calculer MN ?

On ne peut utiliser ni le théorème de Pythagore, ni le cosinus car il nous faut un triangle rectangle !

En quatrième, nous avons vu un théorème qui permet de calculer des longueurs si nous disposons d'une configuration composée d'un triangle et de deux parallèles.

Essayons d'utiliser ce théorème.

Pour cela construisons les points T et R symétriques respectifs des points M et N par rapport au point A.
 On peut démontrer que (TR) est parallèle à (MN) et donc à (BC).



Donc d'après le théorème vu en quatrième, on en déduit que : $\frac{AT}{AB} = \frac{TR}{BC}$

Or on sait que : $AM = AT$ et $MN = TR$

On obtient alors les égalités : $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ en remplaçant AT par AM et TR par MN.

$$\text{Finalement } MN = \frac{AM \times BC}{AB} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

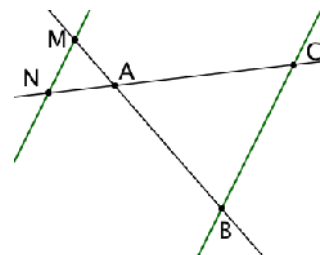
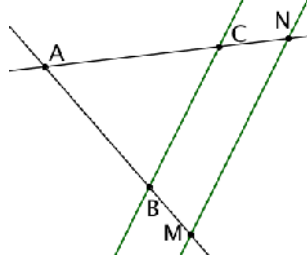
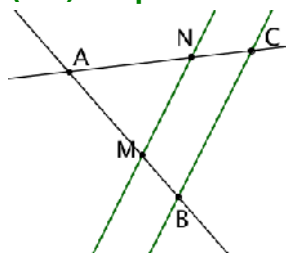
C'est une généralisation du théorème vu en quatrième.

2 - Le théorème de Thalès

Le théorème de Thalès

Soit deux droites (AB) et (AC), M appartient à (AB) et N appartient à (AC).

Si **(MN) est parallèle à (BC)**, alors trois configurations sont possibles :



Dans chaque cas, on a : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Remarque :

Le théorème de Thalès permet de démontrer que **deux droites ne sont pas parallèles**.

Par exemple, si dans la première configuration ci-dessus, on a $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$, alors les droites (MN) et (BC) ne peuvent pas être parallèles car sinon les rapports seraient égaux.

3 - Application

Dans la figure ci-dessous, les droites (HK) et (FG) sont parallèles. On sait que $EK = 5$, $EF = 7$, $EH = 6$ et $FG = 9$. Calculer HK et EG.

On reconnaît la troisième configuration : la configuration en papillon

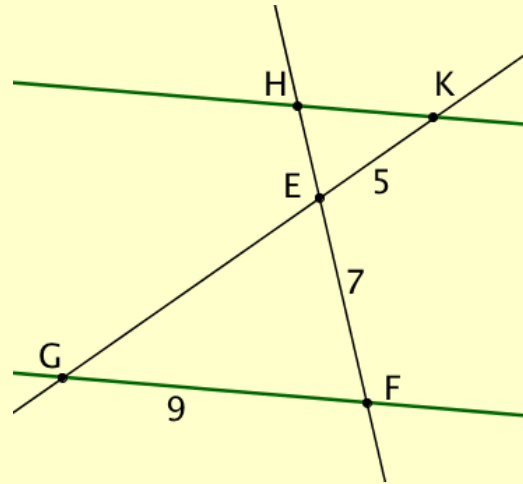
(HF) et (KG) se coupent en E et (HK) est parallèle à (FG), on a donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{EK}{EG} = \frac{EH}{EF} = \frac{KH}{GF}$$

C'est à dire : $\frac{5}{7} = \frac{6}{EG} = \frac{HK}{9}$

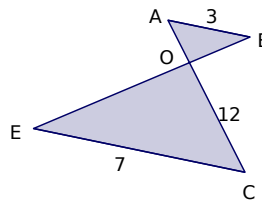
$$\frac{5}{7} = \frac{6}{EG} \text{ donc } EG = \frac{7 \times 6}{5} = \frac{42}{5}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{HK}{9} \text{ donc } HK = \frac{5 \times 9}{7} = \frac{45}{7}$$



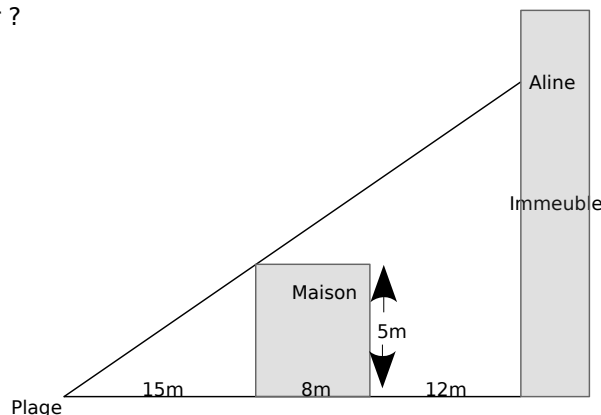
ENTRAINE-TOI

Exercice 1 (AB) et (EC) sont deux droites parallèles. Calcule AO.

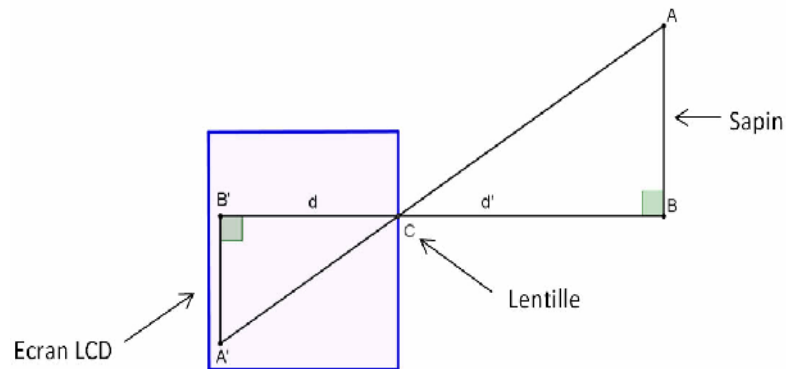


Exercice 2 Soit un triangle ABC tel que $AB = 7,2$ cm, $BC = 6,6$ cm et $AC = 6$ cm. Soit E le point du segment [BC] tel que $CE = 3$ cm. La droite parallèle à (AB) passant par E coupe [AC] en F. Calcule EF et CF.

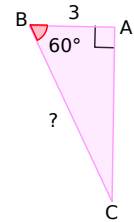
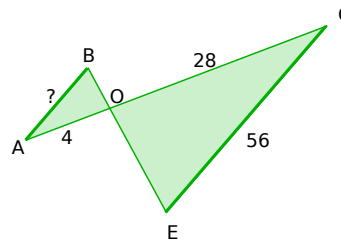
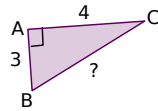
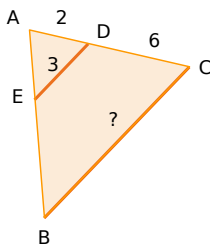
Exercice 3 Aline veut louer un appartement dans un immeuble situé près de la mer. Une maison est malheureusement construite entre la plage et son immeuble. À quelle hauteur minimale doit se situer son appartement pour que Aline puisse apercevoir la mer ?



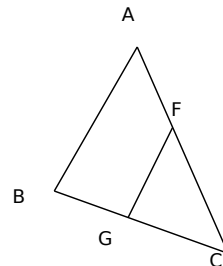
Exercice 4 Ci-contre le schéma simplifié du fonctionnement d'un appareil photographique numérique photographiant un sapin. Pour cet appareil, la distance focale d' est égale à 50 mm. Un sapin de 6 m de hauteur se trouve à une distance d de 15 m du photographe. Quelle est la hauteur qu'aura le sapin sur l'écran LCD de l'appareil ? (l'écran a une hauteur de 3 cm).



Exercice 5 Calcule la longueur cherchée de tête et indique la propriété utilisée. (Les droites en gras sont parallèles).



Exercice 6 Sur la figure ci-contre, on sait que :
 $CF = 2,7$ cm ; $CA = 8,1$ cm ; $CG = 1,7$ cm
 et $CB = 6,8$ cm.
 Les droites (FG) et (AB) sont-elles parallèles ?



Partie 2 : La réciproque du théorème de Thalès

1 - Introduction

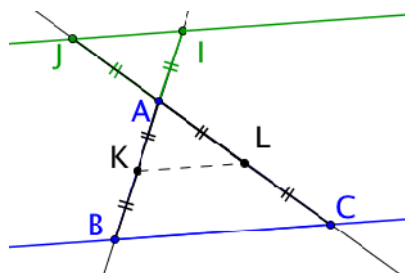
ABC est un triangle.

I appartient à (AB) et J appartient à (AC). Supposons que $\frac{AI}{AB} = \frac{1}{2}$ et que $\frac{AJ}{AC} = \frac{1}{2}$.

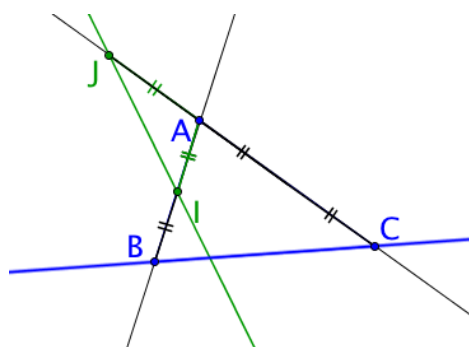
On a donc : $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{1}{2}$

Que peut-on déduire pour les droites (IJ) et (BC) ?

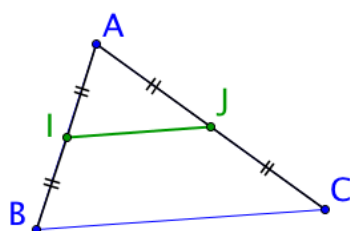
Plusieurs configurations sont possibles :



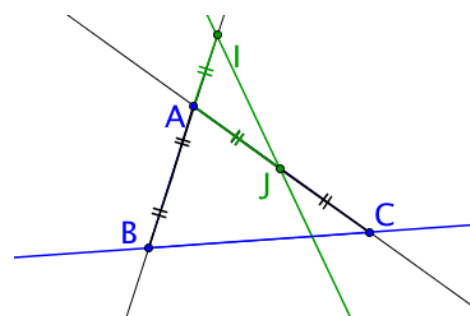
configuration 1



configuration 2



configuration 3



configuration 4

- Dans la *configuration n°3*, en utilisant le *théorème de la droite des milieux* vu en quatrième, on peut en déduire que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.
- Dans les *configurations n°2 et 4*, les droites (IJ) et (BC) sont sécantes !
- Dans la *configuration n°1*, on a ajouté les symétriques respectifs K et L de I et J par rapport au point A. Les droites (IJ) et (LK) sont donc parallèles.

Comme $AK = AI = \frac{AB}{2}$ et comme K appartient au segment [AB], on peut en déduire que K est le milieu de [AB]. De même L est le milieu de [AC].

Donc les droites (LK) et (BC) sont parallèles. On en déduit que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

Récapitulons :

Si $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{1}{2}$ et si l'ordre des points A, I, B sur la droite AB est le même que l'ordre des points A, J, C sur la droite (AC) alors les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

Et ce résultat est encore vrai, si les rapports $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC}$ valent autre chose que $\frac{1}{2}$.

Ce théorème important est appelé la **réciproque du théorème de Thalès**.

2 - La réciproque du théorème de Thalès

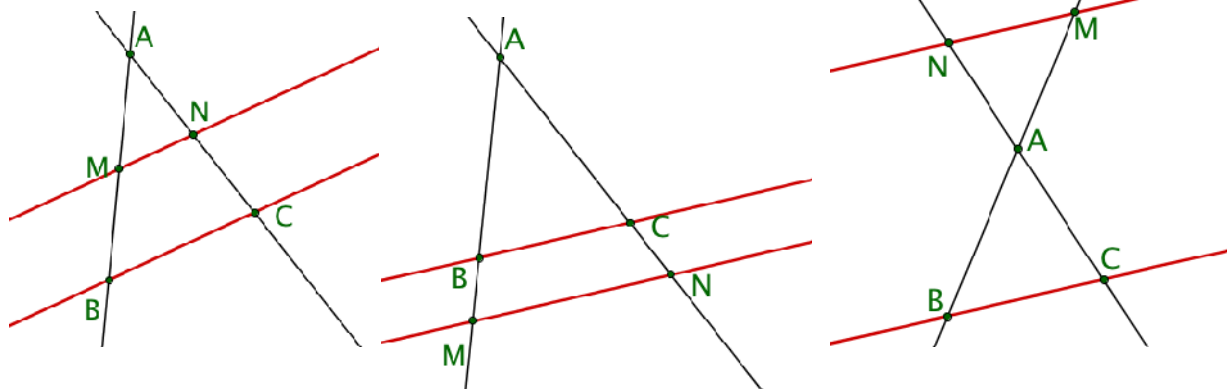
Réciproque du théorème de Thalès

Soit deux droites (AB) et (AC) sécantes en A.

Si des points A,M,B de la droite (AB) sont dans le même ordre que des points A,N,C

de la droite (AC) et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

alors **les droites (MN) et (BC) sont parallèles.**



3 - Application

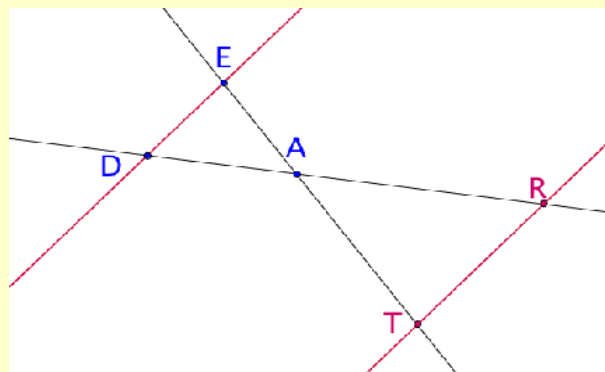
Sur la figure ci-dessous, on donne : $AE = 3$, $AD = 4$, $AT = 5$ et $AR = 20/3$.
Démontrer que les droites (ED) et (TR) sont parallèles.

L'ordre des points A,E,T sur la droite (AE) est le même que l'ordre des points A,D,R sur la droite (AD)

De plus, $\frac{AE}{AT} = \frac{3}{5}$ et $\frac{AD}{AR} = \frac{4}{\frac{20}{3}} = \frac{4 \times 3}{20} = \frac{3}{5}$

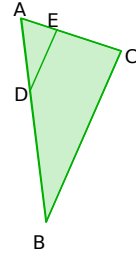
Donc $\frac{AE}{AT} = \frac{AD}{AR}$

On en déduit que d'après **la réciproque du théorème de Thalès**, les droites (ED) et (TR) sont parallèles.



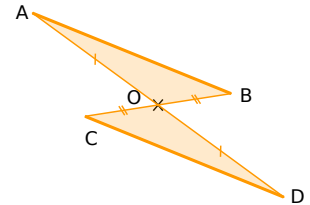
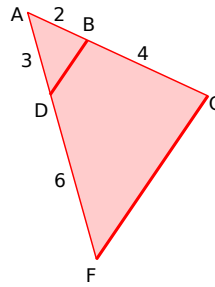
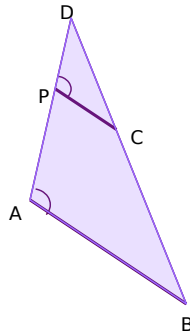
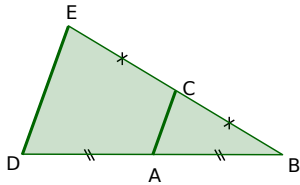
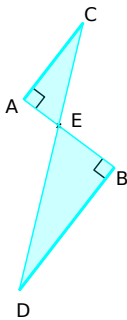
ENTRAINE-TOI

Exercice 7 On donne les longueurs suivantes :
 $AE = 3,5 \text{ cm}$; $AC = 7,7 \text{ cm}$; $AD = 6,5 \text{ cm}$ et $AB = 14,3 \text{ cm}$.
 Démontre que (DE) est parallèle à (BC)



Exercice 8 Trace un triangle ABC tel que $AB = 5,1 \text{ cm}$; $AC = 3,6 \text{ cm}$ et $BC = 3 \text{ cm}$.
 Place le point E sur la demi-droite $[BA)$ tel que $AE = 11,9 \text{ cm}$ et le point F sur la demi-droite $[CA)$ tel que $AF = 8,4 \text{ cm}$.
 Les droites (EF) et (BC) sont-elles parallèles ?
 Pourquoi ?

Exercice 9 Dans chacun des cas, quelle propriété permet de démontrer que les droites en gras sont parallèles ?



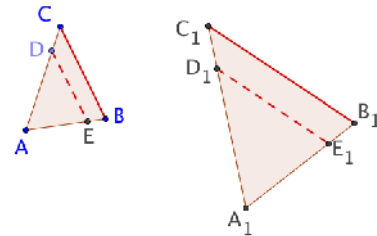
Partie 3 : AGRANDISSEMENT ET REDUCTION

1 - Agrandissement et réduction d'une figure

Si l'on mesure les longueurs de chacun des triangle, on peut vérifier que :

$$A_1C_1 = 1,7 AC, \quad A_1B_1 = 1,7 AB, \quad B_1C_1 = 1,7 BC$$

$$A_1D_1 = 1,7 AD \quad \text{etc}$$



Définition:

Quand deux figures F et F' ont la même forme et que les longueurs des côtés de la figure F' sont **proportionnelles** aux longueurs des côtés de la figure F, on dit que la figure F est un **agrandissement** (ou une **réduction**) de la figure F'.

Ici, le triangle $A_1B_1C_1$ est un **agrandissement** de ABC et ABC est une **réduction** de $A_1B_1C_1$.

Supposons que (DE) et (CB) soient parallèles. Que peut-on en déduire pour les droites (D_1E_1) et (C_1B_1) ?

Propriété

Quand une figure est un agrandissement (ou un réduction) d'une autre, alors les angles sont conservés. En particulier, si deux segments sont parallèles alors leurs agrandissements seront également parallèles dans la figure agrandie.

Par exemple, si dans ABC les segments [BC] et [DE] sont parallèles alors dans la figure agrandie les segments $[B_1C_1]$ et $[D_1E_1]$ sont également parallèles.

2 - Application :

Nous allons agrandir la figure ci-contre d'un facteur égal à 1,5.

L'unité de la figure est le centimètre.

Commençons par construire un segment $[A'B']$ de longueur $3 \times 1,5 = 4,5 \text{ cm}$.

Le triangle ACB est isocèle car l'angle ABC mesure également 45° .

Donc le triangle $A'C'B'$ est également isocèle car dans un agrandissement, les mesures des angles sont conservées. Donc comme $C'A' = C'B'$, C' appartient à la médiatrice du segment $[A'B']$.

De plus comme ACB est rectangle en C, $A'C'B'$ est également rectangle en C' .

Donc C' appartient au cercle de diamètre $[A'B']$.

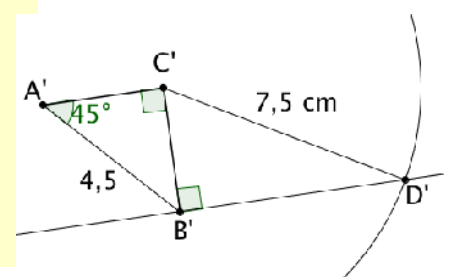
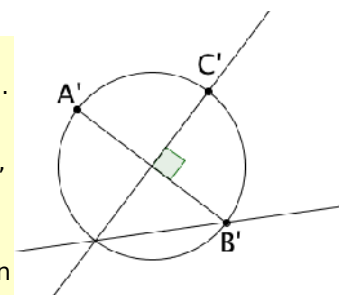
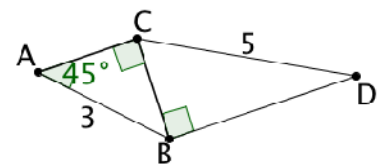
On peut donc construire le point C' .

L'angle $C'B'D'$ est également droit.

La longueur $C'D'$ est égale à $5 \times 1,5 = 7,5 \text{ cm}$

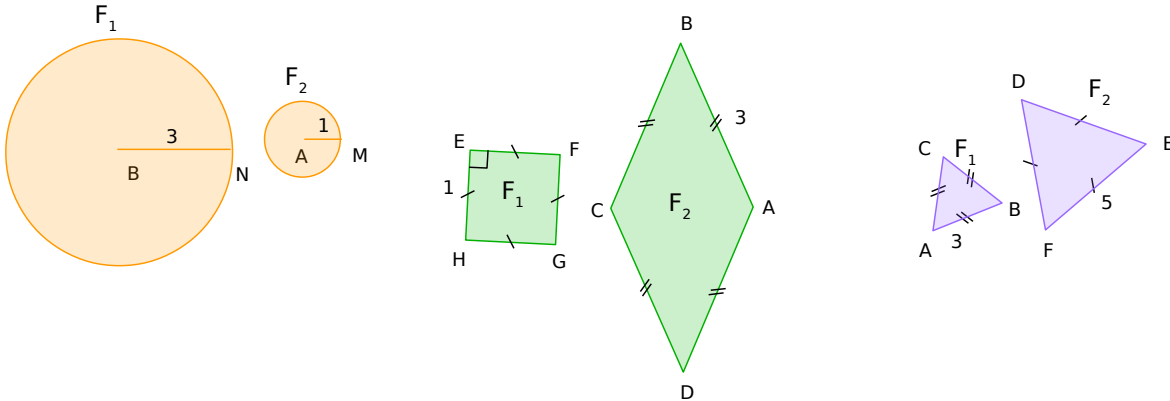
D' appartient donc au cercle de centre C' et de rayon $7,5 \text{ cm}$.

On peut donc construire le point D' car il appartient également à la perpendiculaire à $[B'C']$ passant par B'



ENTRAINE-TOI

Exercice 10 Dans chacun des cas suivant, indique si la figure 2 est un agrandissement (ou une réduction) de la figure 1 et si c'est le cas, calcule le coefficient d'agrandissement (ou de réduction).



Exercice 11

- Trace un triangle JKL tel que $\widehat{JKL} = 130^\circ$, JK = 3 cm et KL = 2 cm et place le point M sur la demi-droite [JK) tel que JM = 7,5 cm.
- En considérant que [JM] est l'agrandissement du segment [JK], construis l'agrandissement JMN du triangle JKL.
- Que peux-tu dire des droites (KL) et (MJ) ? Pourquoi ?

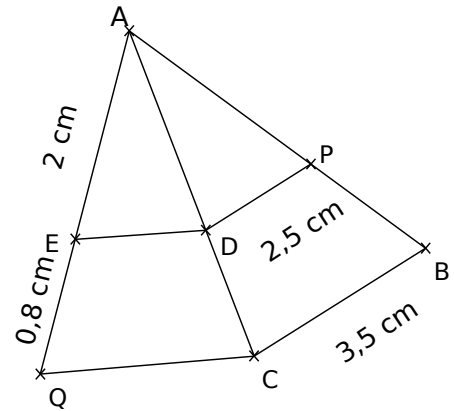
EXERCICES DE SYNTHÈSE

Exercice 1

La figure ci-contre n'est pas faite en vraie grandeur.
Les droites (DP) et (CB) sont parallèles.

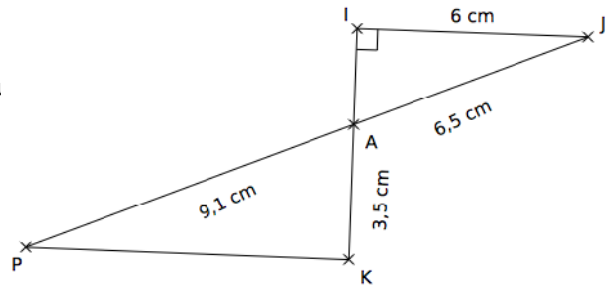
Déterminer la valeur du rapport $\frac{AD}{AC}$.

Montrer que les droites (DE) et (CQ) sont parallèles.

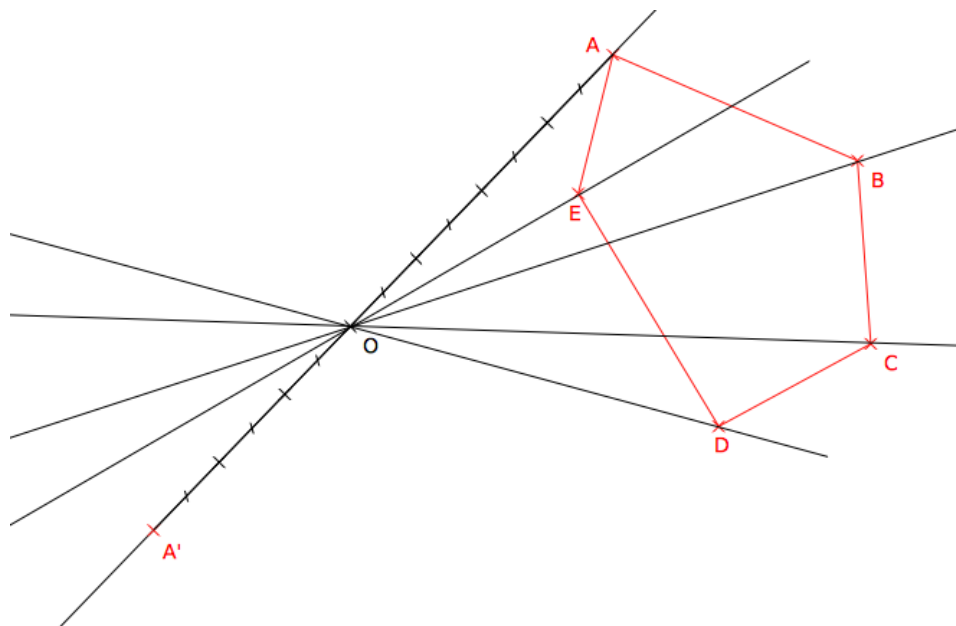


Exercice 2

La figure n'est pas faite en vraie grandeur.
Quelle est la nature du triangle PAK ?
Justifie.



Exercice 3

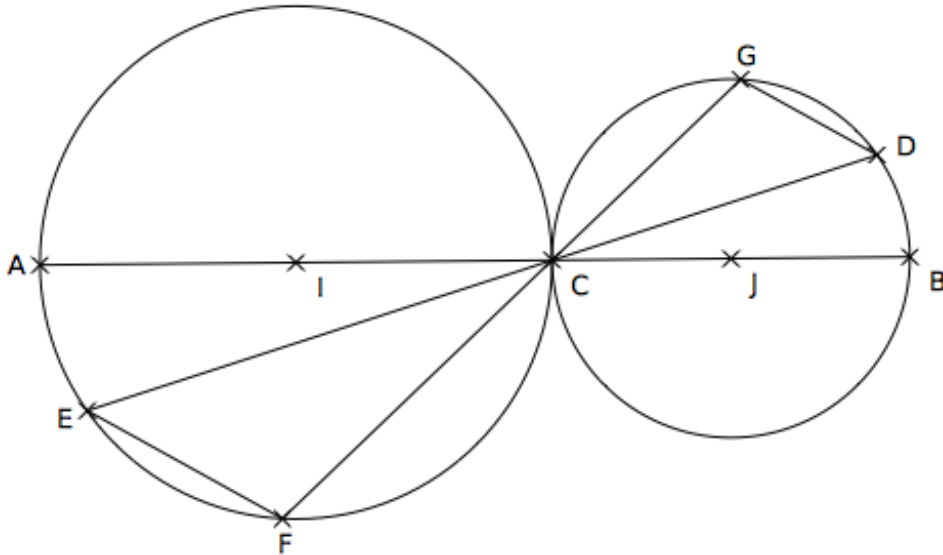


On a commencé la construction du polygone A'B'C'D'E' qui est une réduction du polygone ABCDE.
Termine la construction, détermine le rapport.

Exercice 4

Sur la figure ci-dessous, $[AC]$ est un diamètre du cercle (C_1) et $[BC]$ est un diamètre du cercle (C_2) . E et F sont deux points de (C_1) ; G et D sont deux points de (C_2) tels que E, C et D soient alignés d'une part et F, C et G soient alignés d'autre part.

Le but est de montrer que les droites (GD) et (EF) sont parallèles.

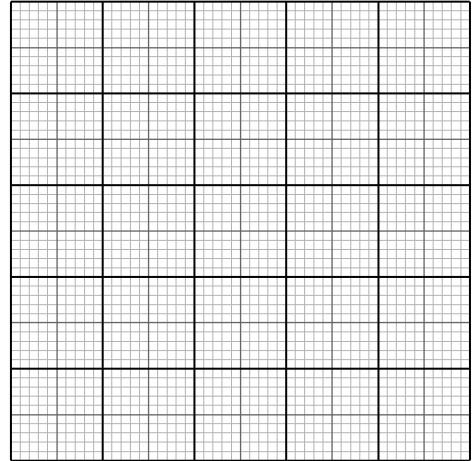
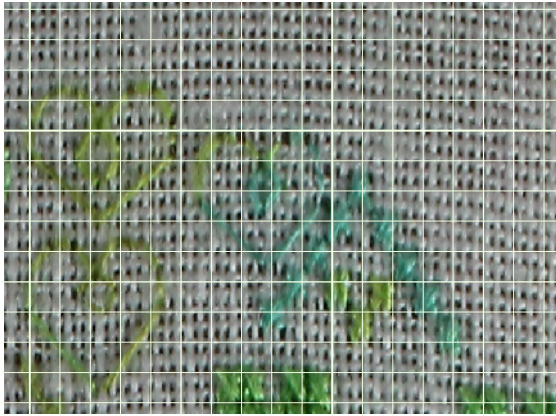


- 1) Montrer que les droites (AE) et (BD) sont parallèles.
- 2) En déduire que $\frac{CE}{CD} = \frac{CA}{CB}$
- 3) Montrer que $\frac{CF}{CG} = \frac{CA}{CB}$
- 4) En déduire que les droites (EF) et (GD) sont parallèles.

JEUX

Enigme 1

Marie a organisé une SAL (toutes les brodeuses d'un club font le même ouvrage surprise, en suivant les consignes de l'organisatrice). Mais Jeanine a perdu les instructions. En t'aidant de la broderie de Marie, peux-tu reproduire patron sur le quadrillage ci contre.



Enigme 2

Les droites (BG) et (CD) sont parallèles.

Les points C, D, E, sont alignés.

$AB=1,8\text{cm}$

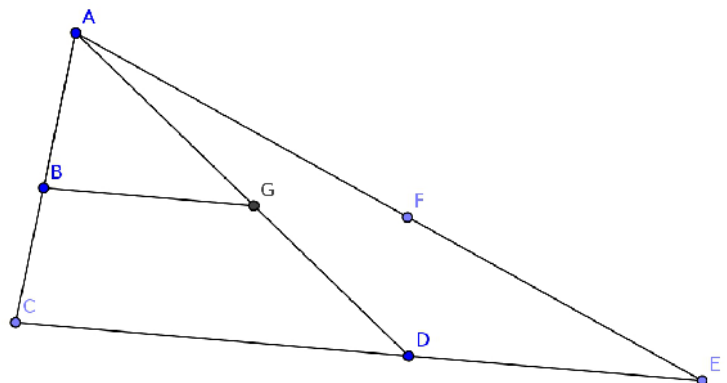
$AC=2,7\text{cm}$

$AG=2,1\text{cm}$

$AF=2,4\text{cm}$

$AE=3,6\text{cm}$

Les points B, G, F sont-ils alignés ?



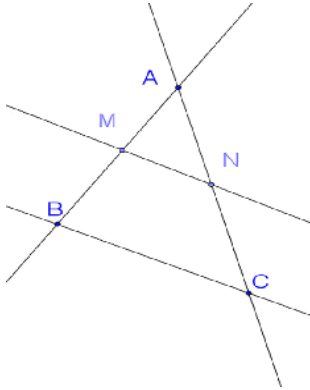
Enigme 3

Trace un segment $[AB]$ de 6,6 cm. Place M et N sur $[AB]$ tel que $AM=\frac{3}{7}AB$ et $AN=\frac{4}{3}NB$

AS-TU COMPRIS LE CHAPITRE ?

1) Quelle(s) est (sont) la (les) donnée(s) qui permet(tent) d'appliquer la propriété de Thalès dans le triangle ABC ?

- a) $A \in [NC]$ b) $N \in [AC]$ c) $(MN) \parallel (BC)$ d) $M \in [AB]$



2) Parmi les propriétés ci-dessous, laquelle permet de démontrer que deux droites sont parallèles

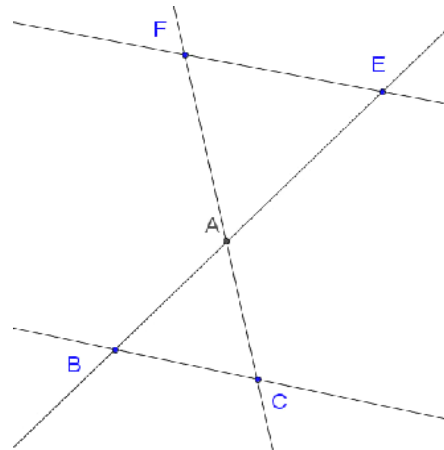
- a) la propriété de Thalès b) la réciproque de la propriété de Thalès
c) l'égalité de Pythagore d) la réciproque du théorème des milieux.

3) La propriété de Thalès permet :

- a) de démontrer que deux droites sont parallèles.
b) de démontrer que des droites ne sont pas parallèles.
c) de calculer des longueurs.
d) de démontrer que deux droites sont perpendiculaires.

4) Sur la figure ci-contre, (BE) et (CF) sont sécantes en A et $(EF) \parallel (BC)$ alors d'après la propriété de Thalès :

- a) $\frac{AE}{AB} = \frac{AC}{AF} = \frac{EF}{BC}$
b) $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$
c) $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} = \frac{BC}{EF}$
d) $\frac{BA}{AE} = \frac{CA}{AF} = \frac{EF}{BC}$



5) ABC est un triangle tel que :

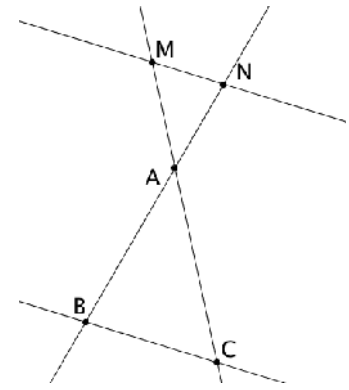
$AB = 6 \text{ cm}$; $M \in [AB]$; $MN = 5 \text{ cm}$; $AC = 8 \text{ cm}$; $N \in [AC]$; $BC = 7,5 \text{ cm}$ et $(MN) \parallel (BC)$

On a :

- a) $AM = 4 \text{ cm}$ et $AN = 5,3 \text{ cm}$
b) $AM = 6 \text{ cm}$ et $AN = \frac{16}{3} \text{ cm}$
c) $AM = 4 \text{ cm}$ et $AN = \frac{16}{3} \text{ cm}$
d) $AM = 6 \text{ cm}$ et $AN = 5,3 \text{ cm}$

6) Sur la figure ci-dessous, $AM=4$ cm ; $AN = 7$ cm ; $AC= 3$ cm et $AB = 6$ cm
 les points M , A , C et N , A , B sont alignés dans le même ordre
 A-t-on : $(MN) // (BC)$?

- a) oui
- b) non
- c) on ne peut pas savoir



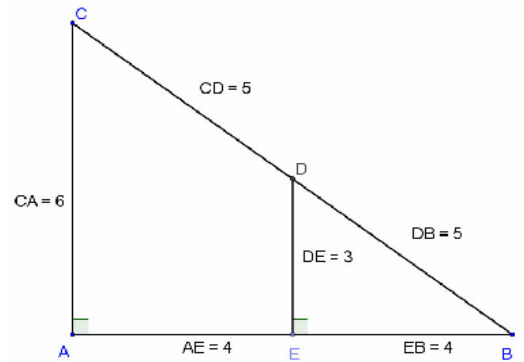
7) Dans le triangle ci-contre, $AE = 4$ cm , $EB = 4$ cm , $BD = 5$ cm , $DC = 5$ cm
 $DE = 3$ cm , $CA = 6$ cm , (CD) et (AE) sécantes en B et $(DE) // (AC)$.

L'application de la propriété de Thalès permet d'affirmer que :

- a) Les longueurs des côtés correspondants des triangles BDE et ABC sont proportionnelles.
- b) Le triangle ABC est un agrandissement du triangle BDE.
- c) Le tableau

BD	BE	ED
BC	BA	CA

est un tableau de proportionnalité.



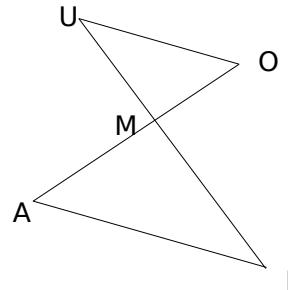
DEVOIR SURVEILLE

La calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 : /3 points

Sur la figure, qui n'est pas en vraie grandeur :
 $MO = 21$ mm ; $MA = 27$ mm ; $MU = 28$ mm et $AI = 45$ mm.
 Les droites (OU) et (AI) sont parallèles.

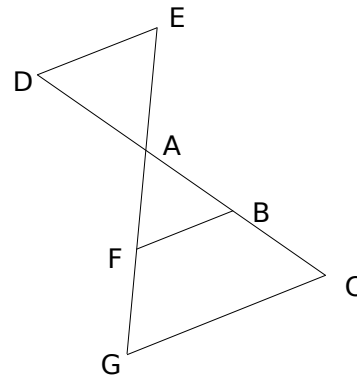
Calcule les longueurs MI et OU.



EXERCICE 2 : /5 points

Les droites (DC) et (EG) se coupent en A.
 Le point F est sur [AG] et le point B est sur [AC].
 Les droites (BF) et (CG) sont parallèles.
 On sait que : $AB = 5$ cm ; $BC = 4$ cm et $AF = 3$ cm.

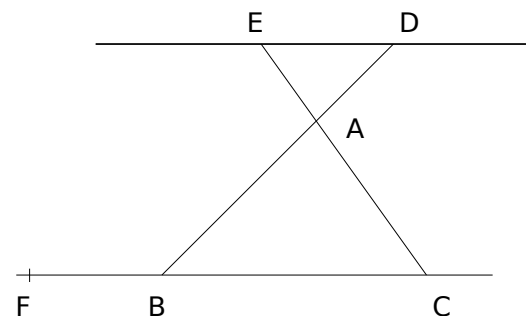
- Calcule les longueurs AG et FG.
- On donne aussi : $AD = 7$ cm et $AE = 4,2$ cm.
 Démontre que les droites (DE) et (CG) sont parallèles.



EXERCICE 3 : /5 points

Les droites (EC) et (DB) se coupent en A.
 Les droites (ED) et (BC) sont parallèles.
 F, B et C sont alignés.
 On donne : $AB = 7,5$ cm ; $BC = 9$ cm ; $AC = 6$ cm ;
 $AE = 4$ cm et $BF = 5,5$ cm.

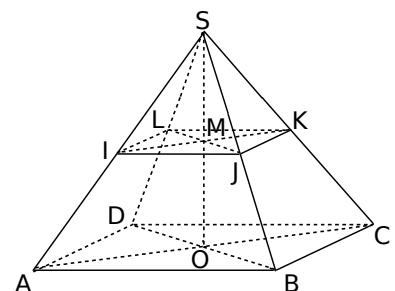
- Calcule la longueur AD.
- Les droites (EF) et (BD) sont-elles parallèles ? Justifie.



EXERCICE 4 : /3 points

La pyramide SABCD est une pyramide à base rectangulaire telle que $AB = 4,8$ cm ; $BC = 4,2$ cm et $SA = 8$ cm.
 La pyramide SIJKL est une réduction de la pyramide SABCD.
 On donne : $SI = 5$ cm.

Calcule la longueur JK.



EXERCICE 5 : /4 points

RUV est un triangle tel que : $RV = 8 \text{ cm}$; $RU = 7 \text{ cm}$; $UV = 3 \text{ cm}$.

S est un point de $[RV]$. La parallèle à (UV) passant par S coupe (RU) en T.

On pose $RS = x$ avec x compris entre 0 et 8.

- Exprime les longueurs RT et TS en fonction de x .
- Exprime le périmètre du triangle RST en fonction de x .
- Exprime le périmètre du trapèze STUV en fonction de x .
- Détermine la valeur de x pour laquelle ces deux périmètres sont égaux.

