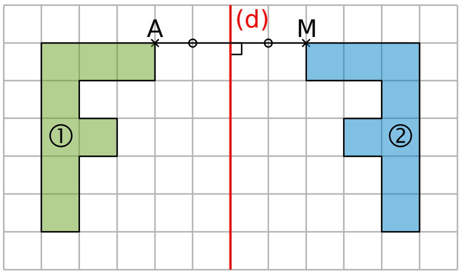
Chapitre G3

Symétrie axiale

I - Figures symétriques

Deux figures sont **symétriques** par rapport à une droite si elles se superposent par pliage le long de cette droite.
Cette droite est appelée l'**axe de symétrie**.

Exemple :



Les figures ① et ② se superposent par pliage le long de la droite (d) donc elles sont symétriques par rapport à la droite (d).
On dit également que la figure ② est la symétrique de la figure ① dans la symétrie d'axe (d).

Deux points sont symétriques par rapport à une droite s'ils se superposent par pliage le long de cette droite.
Ici, les points A et M sont symétriques par rapport à la droite (d).

II - Symétrique d'un point

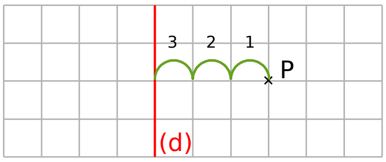
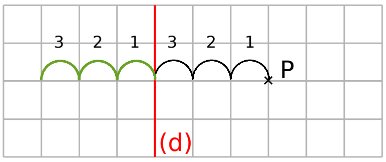
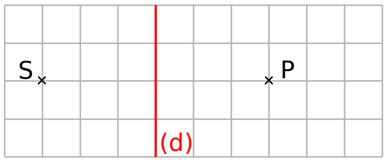
A - Définition

Le **symétrique d'un point** A par rapport à une droite (d) est le point M tel que la droite (d) soit la médiatrice du segment [AM] (tel que la droite (d) soit la perpendiculaire au segment [AM] en son milieu).

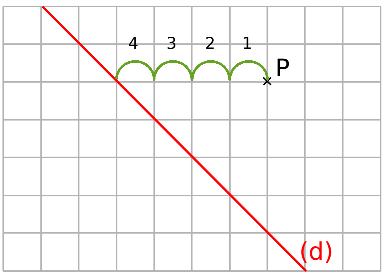
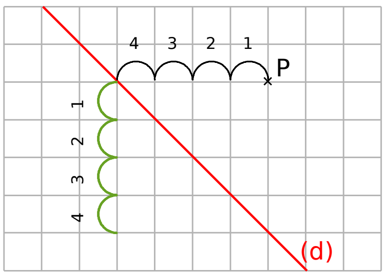
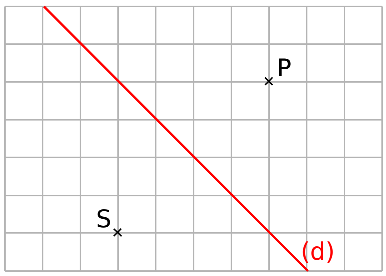
Remarque : Si un point appartient à l'axe de symétrie alors son symétrique par rapport à cet axe est le point lui-même.

B - Construction du symétrique d'un point dans un quadrillage

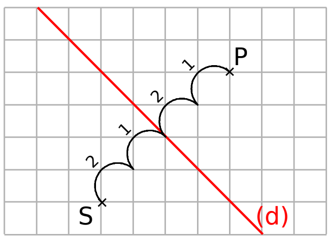
Axe de symétrie horizontal ou vertical

		
Pour construire le symétrique du point P par rapport à (d), on part du point P vers (d). Il faut **3 carreaux pour y arriver**.	Une fois arrivé sur (d), on reproduit le trajet de **3 carreaux vers la gauche**.	On obtient le point S symétrique du point P par rapport à (d).

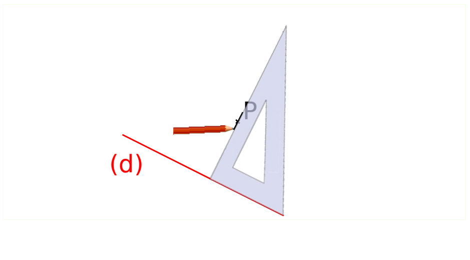
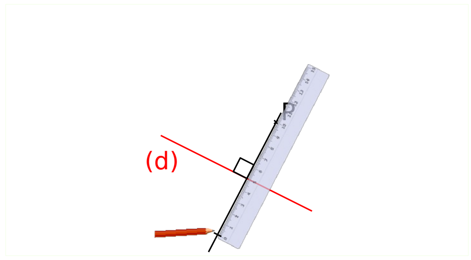
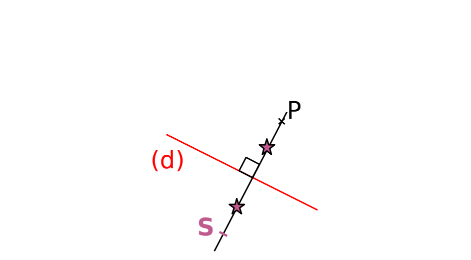
Axe de symétrie en diagonale

		
Pour construire le symétrique du point P par rapport à (d), on part du point P vers (d). Il faut **4 carreaux pour y arriver**.	Une fois arrivé sur (d), on descend de **4 carreaux**.	On obtient le point S symétrique du point P par rapport à (d).

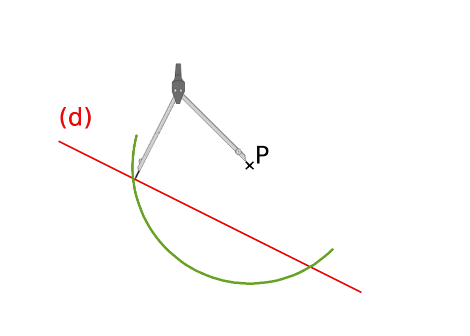
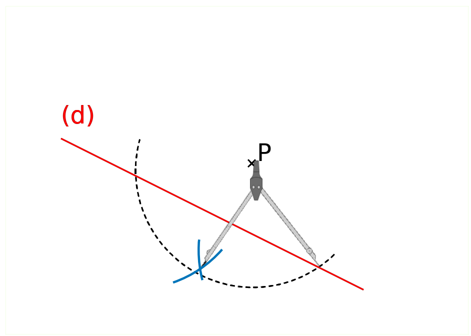
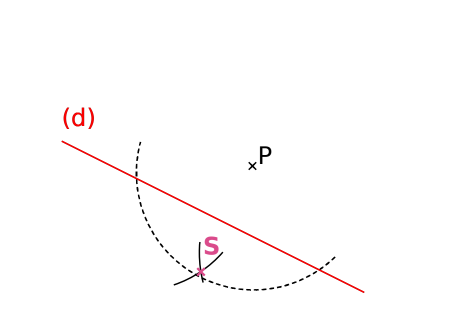
Remarque : On peut également compter les carreaux en diagonale.



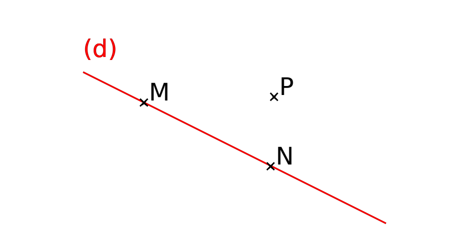
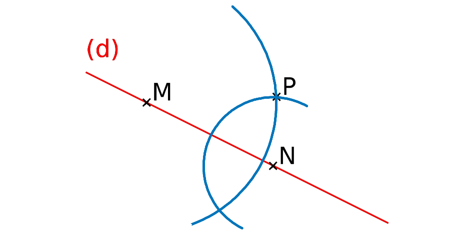
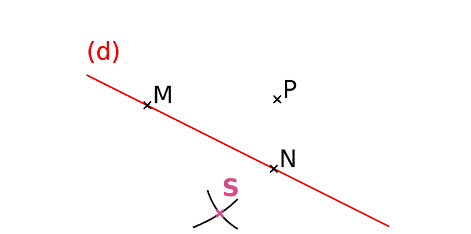
C - Construction du symétrique d'un point avec l'équerre et la règle graduée

		
Pour construire le symétrique du point P par rapport à (d), on construit la **perpendiculaire à (d) passant par le point P**.	On reporte la distance de P à (d) **de l'autre côté de (d)** sur cette perpendiculaire.	On obtient ainsi le point **S** tel que (d) soit la médiatrice de [PS].

D - Construction du symétrique d'un point avec le compas (1)

		
On trace un **arc de cercle de centre P** qui coupe l'axe en deux points.	De l'autre côté de la droite (d), on trace **deux arcs de cercle** de même rayon et de centre les deux points précédents.	Ces deux arcs se coupent en un point qui est le point **S**, symétrique de P par rapport à (d).

E - Construction du symétrique d'un point avec le compas (2)

		
On prend deux points distincts quelconques M et N sur la droite (d).	On trace **deux arcs de cercle** de centre les deux points précédents et passant par P.	Ces deux arcs se coupent en un point qui est le point **S**, symétrique de P par rapport à (d).

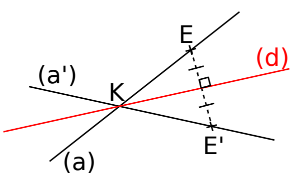
Remarque : Si on a beaucoup de symétriques de points à construire, cette méthode est plus intéressante que la précédente car on n'a que deux points sur l'axe de symétrie et pas un faisceau d'arcs de cercle qui peuvent induire en erreur.

III - Symétrique de figures usuelles et propriétés de la symétrie axiale

A - Symétrique d'une droite

Le symétrique d'une droite par rapport à un axe est **une droite**.
La symétrie axiale **conserve l'alignement**.

Exemple :

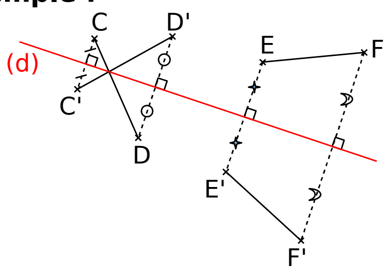


- La droite (a') est la droite symétrique de (a) par rapport à la droite (d). Ces deux droites se coupent sur l'axe de symétrie.
- Pour construire le symétrique de la droite (a), il suffit de construire le symétrique d'un point de la droite (a) qui n'est pas sur (d) (ici le point E).

B - Symétrique d'un segment

Le symétrique d'un segment par rapport à un axe est **un segment de même longueur**.
On dit que la symétrie axiale **conserve les longueurs**.

Exemple :



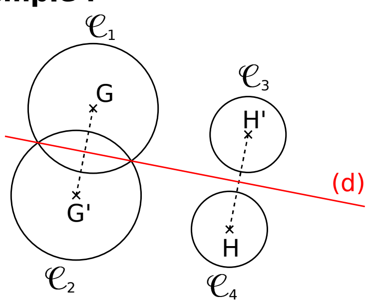
- Les segments [CD] et [C'D'] ainsi que les segments [EF] et [E'F'] sont symétriques par rapport à la droite (d).
- On a CD = C'D' et EF = E'F'.
- Pour construire le symétrique d'un segment, il suffit de construire le symétrique de chacune de ses extrémités puis de les relier.

Remarque : Le symétrique du milieu d'un segment est le milieu du segment symétrique.

C - Symétrique d'un cercle

Le symétrique d'un cercle par rapport à un axe est **un cercle de même rayon**.
Les centres des cercles sont symétriques par rapport à cet axe.

Exemple :

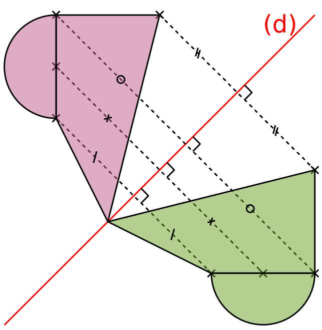


- Les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ainsi que les cercles $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ sont symétriques par rapport à la droite (d).
- Les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont sécants sur l'axe de symétrie (d).
- Pour construire le symétrique d'un cercle, il suffit de construire le symétrique de son centre et de tracer le cercle de même rayon.

D - Symétrique d'une figure complexe

Pour construire le symétrique d'une figure complexe, on la décompose **en figures usuelles** et on construit le symétrique de chacune d'elles.

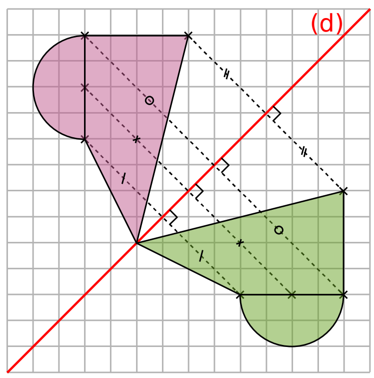
Exemple :



Pour tracer le symétrique de la figure rose par rapport à la droite (d) :

- on trace d'abord le symétrique du quadrilatère en construisant le symétrique de chacun de ses sommets ;
- puis on trace le symétrique du demi-cercle.

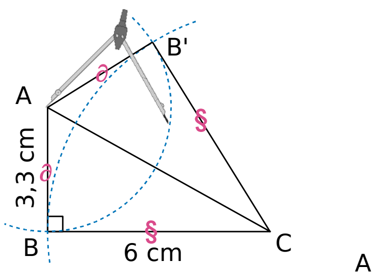
On procède de la même façon dans un quadrillage.



E - Autres propriétés

La symétrie axiale **conserve les mesures des angles, les périmètres et les aires**.

Exemple : Dans la figure ci-dessous, B' est le symétrique de B par rapport à (AC).



- A et C appartiennent à l'axe de symétrie, ils sont donc chacun leur propre symétrique.
- ABC est rectangle en B donc $\widehat{ABC} = 90°$. Or la symétrie axiale conserve la mesure des angles donc $\widehat{AB'C} = 90°$. AB'C est un triangle rectangle en B'.
- La symétrie axiale conserve les longueurs donc AB = AB' = 3,3 cm et CB = CB' = 6 cm.
$\mathscr{A}_{AB'C} = \mathscr{A}_{ABC} = \dfrac{6 \times 3{,}3}{2} = 9{,}9 \text{ cm}^2$.