Activités de découverte

Activité 1 : Multiple, diviseur

1. Le jeu de Juniper-Green

Règle du jeu : Ce jeu se joue à deux (ou plus) avec les nombres entiers de 1 à 40.
Le premier joueur choisit un nombre entier.
Le deuxième joueur doit en choisir un autre qui doit être soit multiple, soit diviseur de ce premier nombre et toujours parmi les nombres entiers de 1 à 40.
Le joueur suivant en choisit encore un autre qui doit être soit multiple, soit diviseur du second nombre. Et ainsi de suite, chaque nombre ne pouvant servir qu'une seule fois !
Le dernier joueur qui a pu choisir un nombre a gagné !

a. Jouez à ce jeu, en alternant le premier joueur.

b. Le premier joueur prend 40 comme nombre de départ. Quelle est la liste des nombres possibles pour le second joueur ? Même question avec 17 ; 9 et 23.

c. Dans une partie à deux joueurs, quel nombre peut choisir le premier joueur pour être sûr de l'emporter (s'il joue bien !) ? Trouve toutes les possibilités.

2. Liste des diviseurs

Écris 54 comme un produit de deux entiers. Trouve toutes les possibilités.
Quelle est la liste des diviseurs de 54 ?
Trouve la liste des diviseurs de 720 (il y en a 30 !) et celle des diviseurs de 53.

3. Réponds aux questions suivantes en justifiant chaque réponse.
La somme de trois entiers consécutifs est-elle un multiple de 3 ?
Que peut-on dire de celle de cinq entiers consécutifs ?
La somme de n entiers consécutifs est-elle un multiple de n (n est un entier naturel) ?

Activité 2 : Division euclidienne

1. On veut partager équitablement un lot de 357 CD entre 12 personnes. Combien de CD aura chaque personne ? Combien de CD restera-t-il après le partage ?

2. Pose la division euclidienne de 631 par 17 puis écris 631 sous la forme $17 \times k + n$ où k et n sont des entiers naturels et $n < 17$.
Dans cette opération, comment s'appellent les nombres 631 ; 17 ; k et n ?

3. On considère l'égalité suivante : $983 = 45 \times 21 + 38$.
Utilise-la pour répondre aux questions suivantes, en justifiant et sans effectuer de division.

a. Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 983 par 45 ? Par 21 ?

b. Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 990 par 45 ? De 953 par 21 ?

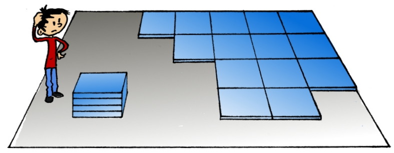
4. Que peux-tu dire du reste de la division euclidienne d'un multiple de 32 par 32 ?
Énonce une règle générale. La réciproque est-elle vraie ?

5. Histoires de restes, toujours...

a. Le reste dans la division euclidienne de m par 7 est 4 (m est un entier naturel).
Quelles valeurs peut prendre m ? Quelle forme a-t-il ?

b. Explique pourquoi tout nombre entier naturel peut s'écrire sous la forme $13k + p$ où k et p sont des entiers avec p compris entre 0 et 12.

Activité 3 : Diviseurs communs, PGCD



1. On veut paver une surface rectangulaire avec des carrés identiques et sans coupe. La longueur du côté des carrés est un nombre entier de centimètres.

a. La surface rectangulaire mesure 12 cm par 18 cm.
Quelle peut être la longueur du côté des carrés ? Y a-t-il plusieurs possibilités ? Que représente(nt) ce(s) nombre(s) pour 12 et 18 ?
Mêmes questions lorsque la surface rectangulaire mesure 49 cm par 63 cm, puis 27 cm par 32 cm et enfin 21 cm par 84 cm.

b. Cherche les dimensions maximales d'un carré pouvant paver une surface rectangulaire de 108 cm par 196 cm.

2. Un challenge sportif regroupe 105 filles et 175 garçons. Les organisateurs souhaitent composer des équipes comportant toutes le même nombre de filles et le même nombre de garçons.
Comment peux-tu les aider pour qu'ils puissent constituer un nombre maximal d'équipes ? Donne ensuite le nombre de filles et de garçons dans chaque équipe. Explique ta démarche.

3. PGCD

a. Dresse la liste des diviseurs de 117 et celle des diviseurs de 273.
Quel est le plus grand diviseur commun à ces deux nombres ?

> On appelle ce nombre le PGCD de 117 et 273 et on le note : PGCD (117 ; 273) ou PGCD (273 ; 117).

b. Quel est le PGCD de 14 et 42 ? Que remarques-tu ? Essaie de formuler une règle à partir de ce que tu as observé.

Activité 4 : Vers la méthode des soustractions successives

1. Somme et différence de multiples

a. Sans faire de division, explique pourquoi 49 014 est un multiple de 7 et pourquoi 13 est un diviseur de 12 987.

b. Démontre la propriété suivante :

> « Si d est un diviseur commun à deux entiers naturels a et b avec $a > b$ alors d est également un diviseur de $a + b$ et de $a - b$. ».

2. Vers la méthode des soustractions successives

a. Détermine le PGCD de 75 et 55 puis celui de 55 et 75 − 55.
Recommence avec celui de 91 et 130 et celui de 91 et 130 − 91.
Que peux-tu conjecturer ? Si cette conjecture est vraie, quel est son intérêt ?

b. La preuve

Soient a et b deux entiers naturels avec $a > b$. Soit d le PGCD de a et b et d' le PGCD de b et $a - b$.

- En utilisant la propriété vue au **1.**, explique pourquoi $d \leqslant d'$.
- Montre que d' est à la fois un diviseur de b, de $a - b$ et de a. Compare d et d'.
- Conclus.

c. Trouve le PGCD de 2 724 et 714 en utilisant plusieurs fois la propriété précédente.

Activité 5 : Vers une nouvelle méthode

1. Le plus grand diviseur commun à 2 208 et 216 en un minimum d'étapes

a. Calcule le PGCD de 2 208 et 216 avec la méthode des soustractions successives.

b. Combien de fois as-tu soustrait 216 ? Quel est le nombre obtenu après avoir fini de soustraire 216 ? Comment aurais-tu pu prévoir cela ?

c. Déduis-en que l'on peut trouver, à l'aide d'une seule opération, un entier naturel n tel que : PGCD (2 208 ; 216) = PGCD (216 ; n) avec $n < 216$.
Que représente alors n pour cette opération ?

d. Récris le calcul du PGCD de 2 208 et 216 en utilisant un minimum d'opérations.

2. Recopie et complète la propriété utilisée précédemment (cette propriété sera admise) :
« Soit a et b deux entiers naturels avec $a \geqslant b$.
Le PGCD de a et b est égal au PGCD de b et de r où r est ... . ».

3. Trouve le PGCD de 1 639 et 176 en utilisant plusieurs fois cette propriété.
Combien y a-t-il d'étapes en utilisant la méthode des soustractions successives ?

Activité 6 : Avec un tableur : PGCD de deux nombres

Introduction : Pourquoi les méthodes pour trouver un PGCD vues dans les activités précédentes peuvent-elles aussi prendre le nom d'**algorithmes** ?

1. Algorithme des différences

On veut programmer avec un tableur la recherche du PGCD de 672 et de 210 en utilisant la propriété :

	A	B	C
1	a	b	$a - b$
2	672	210	
3			

« a et b étant deux entiers naturels tels que $a \geqslant b$, on a PGCD (a ; b) = PGCD (b ; $a - b$). »

a. Quelle fonction du tableur doit-on utiliser pour obtenir en A3 le plus grand des deux nombres qui sont en B2 et C2 ? Quelle fonction du tableur doit-on utiliser pour obtenir cette fois-ci en B3 le plus petit des deux nombres qui sont en B2 et C2 ?

b. Poursuis la programmation et trouve ainsi le PGCD de 672 et de 210.
À partir de quel moment es-tu sûr d'avoir trouvé le PGCD ?

2. Algorithme d'Euclide

On veut maintenant programmer la recherche du PGCD de 672 et de 210 en utilisant la propriété :

	A	B	C
1	a	b	r
2	672	210	
3			

« a et b étant deux entiers naturels tels que $a \geqslant b$, r étant le reste de la division euclidienne de a par b, on a PGCD (a ; b) = PGCD (b ; r). »

a. Écris 672 sous la forme $210q + r$ où q et r sont des entiers naturels et $r < 210$.
Écris dans C2 la formule permettant de calculer r.

b. Poursuis la programmation et trouve ainsi le PGCD de 672 et de 210.
À partir de quel moment es-tu sûr d'avoir trouvé le PGCD ?

3. Copie les deux programmes précédents dans une même feuille de calcul, à côté l'un de l'autre et utilise-les simultanément pour déterminer le PGCD de 5 432 et de 3 894.
Quelle remarque peux-tu faire ?

Activité 7 : Simplification de fractions

1. Voici une liste de fractions :

$$\frac{130}{150} ; \frac{26}{30} ; \frac{42}{49} ; \frac{148}{164} ; \frac{91}{105} ; \frac{156}{180} ; \frac{39}{45} ; \frac{52}{60}.$$

a. Construis une nouvelle liste en enlevant les intrus. Explique ta démarche.

b. Quelle fraction, ayant un numérateur et un dénominateur les plus petits possibles, peut-on ajouter à cette nouvelle liste ?

c. Quel est le PGCD du numérateur et du dénominateur de la fraction trouvée dans la question **b.** ?
On dit que ces deux entiers sont **premiers entre eux** et que la fraction est **irréductible**.

d. Le numérateur et le dénominateur de chacune des fractions de la nouvelle liste sont-ils premiers entre eux ? Justifie ta réponse.

2. Pour simplifier la fraction $\frac{84}{126}$, Malik a remarqué que $84 = 2^2 \times 3 \times 7$.

a. Quelle particularité ont les facteurs 2, 3 et 7 entrant dans la décomposition de 84 ?

b. Décompose 126 suivant le même principe puis simplifie la fraction pour la rendre irréductible. Comment peux-tu être sûr d'avoir obtenu une fraction irréductible ?

c. Recopie et complète : $\frac{... \times 5 \times 7 \times ...}{3^2 \times ....} = \frac{11}{35}$.

3. On donne les fractions suivantes : $\frac{256}{243}$; $\frac{1\,020}{1\,989}$; $\frac{382}{426}$; $\frac{313}{255}$.

a. Quelles sont les fractions irréductibles ? Justifie.

b. Écris les autres fractions sous forme irréductible à l'aide d'une seule simplification.

c. Soient a et b deux entiers naturels et d leur PGCD.

- Démontre que $\frac{a}{d}$ et $\frac{b}{d}$ sont des entiers premiers entre eux.
- Déduis-en que $\frac{a \div d}{b \div d}$ est une fraction irréductible.

Activité 8 : Le point sur les nombres

Voici une liste de nombres :

$$-27{,}2 ; \frac{10\,371}{100} ; \frac{27}{13} ; \frac{3}{2} ; -\frac{21}{15} ; \pi ; -\frac{10}{5} ; \frac{47}{21} ; -15 ; -\frac{10}{3} ; 37.$$

a. Dans cette liste, quels sont les nombres entiers ? Quels sont les nombres décimaux ?

b. Y a-t-il des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme décimale ? Lesquels ?

c. Y a-t-il des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme fractionnaire ? Lesquels ?

Méthode 1 : Maîtriser le vocabulaire

À connaître

a et b sont deux entiers naturels non nuls tels que $a = b \times k$ (ou $a \div b = k$) où k est un entier naturel. On dit que :
a est un multiple de b ou a est divisible par b ou b est un diviseur de a ou b divise a.

Remarque : L'entier naturel k est aussi un diviseur de a (k divise aussi a, a est aussi un multiple de k et a est aussi divisible par k).

Exemple 1 : 1 274 est-il un multiple de 49 ? 1 974 est-il divisible par 84 ?

1 274 ÷ 49 = 26 donc 1 274 = 49 × 26.
1 274 est donc un multiple de 49 (et de 26). On dit également que 1 274 est divisible par 49 (et par 26), que 49 est un diviseur de 1 274 (26 l'est aussi) ou que 49 divise 1 274 (26 divise aussi 1 274).

1 974 ÷ 84 = 23,5.
23,5 n'est pas un entier naturel, 1 974 n'est donc pas divisible par 84.
On peut dire également que 84 n'est pas un diviseur de 1 974 et que 1 974 n'est pas un multiple de 84.

Exemple 2 : Établis la liste de tous les diviseurs de 198.

Pour cela, on cherche tous les produits d'entiers naturels égaux à 198.

198 = 1 × 198	Un nombre est toujours divisible par 1 et par lui-même.
198 = 2 × 99 198 = 3 × 66	Les critères de divisibilité permettent de dire que 198 n'est pas divisible par 4, 5 et 10.
198 = 6 × 33 198 = 9 × 22	Les divisions par 7, 8, 12, 13, 14, 15, 16 et 17 ne donnant pas de quotients entiers, 198 n'est pas divisible par ces entiers.
198 = 11 × 18	Le diviseur suivant est 18 et on l'a déjà obtenu avec le produit 11 × 18 : on peut donc arrêter la recherche.

Les diviseurs de 198 sont donc : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 11 ; 18 ; 22 ; 33 ; 66 ; 99 et 198.

Exemple 3 : Démontre que si un entier naturel est divisible par 6 alors il est divisible par 2.

n est divisible par 6 donc n peut s'écrire : $n = 6 \times k$ où k est un entier naturel.
$n = 2 \times 3 \times k = 2 \times (3k)$ où $3k$ est un entier naturel. Ainsi n est divisible par 2.

À connaître

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline r & q \end{array}$$

Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est trouver deux entiers naturels q et r tels que : $a = b \times q + r$ et $r < b$.
q est le **quotient** (entier) et r le **reste** de cette division euclidienne.

Exemple 4 : a. Effectue la division euclidienne de 183 par 12.

$$\begin{array}{r|l} 183 & 12 \\ \hline 63 & 15 \\ 3 & \end{array}$$

On peut donc écrire :
183 = 12 × 15 + 3
avec 3 < 12.

b. 278 = 6 × 45 + 8 : quelle(s) division(s) euclidienne(s) cette égalité représente-t-elle ?

8 < 45 mais 8 > 6 donc l'égalité représente la division euclidienne de 278 par 45 mais ne peut pas représenter celle de 278 par 6.

Exercices « À toi de jouer »

1 Établis la liste des diviseurs des entiers suivants : 60, 43 et 36.

2 Démontre que le produit de deux entiers pairs est un multiple de 4.

3 Effectue les divisions euclidiennes suivantes : 345 par 74 et 6 675 par 89.

4 325 = 5 × 52 + 65. Sans effectuer de division, donne le quotient et le reste de la division euclidienne de 325 par 52.

Méthode 2 : Déterminer le PGCD de deux entiers naturels

À connaître

Le **PGCD de deux entiers naturels** est leur Plus Grand Diviseur Commun.

Exemple 1 : Trouve les diviseurs communs à 30 et 105 puis détermine leur PGCD.

On liste les diviseurs de 30 :
1 ; 2 ; **3** ; **5** ; 6 ; 10 ; **15** et 30.

On liste les diviseurs de 105 :
1 ; **3** ; **5** ; 7 ; **15** ; 21 ; 35 et 105.

Les diviseurs communs à 30 et 105 sont : 1 ; 3 ; 5 et 15.
Le PGCD de 30 et 105 est donc 15, car c'est le plus grand des diviseurs communs.
On note PGCD (30 ; 105) = 15 ou PGCD (105 ; 30) = 15.

Remarque : a et b étant des entiers naturels, si b divise a alors PGCD (a ; b) = b.

Exemple 2 : Détermine PGCD (189 ; 693) par la **méthode des soustractions successives**.

Pour cela, on utilise la propriété suivante :

a et b sont des entiers naturels et $a \geqslant b$, PGCD (a ; b) = PGCD (b ; $a - b$).

693 > 189 et 693 − 189 = 504 donc PGCD (693 ; 189) = PGCD (189 ; 504).

On cherche maintenant PGCD (189 ; 504) : on applique à nouveau la propriété.
504 > 189 et 504 − 189 = 315 donc PGCD (504 ; 189) = PGCD (189 ; 315).

On poursuit avec 189 et 315 et ainsi de suite :
315 > 189 et 315 − 189 = 126 donc PGCD (315 ; 189) = PGCD (189 ; 126).

189 > 126 et 189 − 126 = 63 donc PGCD (189 ; 126) = PGCD (126 ; 63).

Or 63 est un diviseur de 126 (126 = 63 × 2) donc PGCD (126 ; 63) = 63.

Ainsi PGCD (693 ; 189) = 63.

Exemple 3 : Trouve le PGCD de 782 et de 136 par la **méthode des divisions successives**.

Pour cela, on utilise la propriété suivante :

a et b sont des entiers naturels et $a \geqslant b$, PGCD (a ; b) = PGCD (b ; r) où r est le reste de la division euclidienne de a par b.

On effectue la division euclidienne de 782 par 136 : 782 = 136 × 5 + 102.
Donc PGCD (782 ; 136) = PGCD (136 ; 102).

$$\begin{array}{r|l} 782 & 136 \\ \cline{2-2} 102 & 5 \end{array}$$

On cherche maintenant PGCD (136 ; 102) : on applique à nouveau la propriété.

On effectue la division euclidienne de 136 par 102 : 136 = 102 × 1 + 34.
Donc PGCD (136 ; 102) = PGCD (102 ; 34).

$$\begin{array}{r|l} 136 & 102 \\ \cline{2-2} 34 & 1 \end{array}$$

On continue avec PGCD (102 ; 34).
On effectue la division euclidienne de 102 par 34 : 102 = 34 × 3.

$$\begin{array}{r|l} 102 & 34 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array}$$

Le reste est égal à 0 donc 34 est un diviseur de 102 donc PGCD (102 ; 34) = 34.
Ainsi, PGCD (782 ; 136) = 34.

Exercices « À toi de jouer »

5 16 est-il un diviseur commun à 64 et 160 ? Est-il leur PGCD ?

6 Quel est le plus grand nombre entier divisant à la fois 35 et 91 ?

7 Calcule le PGCD de 198 et de 54 par la méthode des soustractions successives.

8 Calcule PGCD (1 789 ; 1 492) par la méthode des divisions successives.
Combien d'étapes aurait nécessité la méthode des soustractions successives ?

Méthode 3 : Démontrer que deux nombres entiers sont premiers entre eux

À connaître

Deux **entiers naturels sont premiers entre eux** lorsque leur PGCD est égal à 1. Autrement dit, 1 est le seul diviseur commun à ces deux entiers naturels.

Exemple 1 : Démontre que 45 et 91 sont premiers entre eux.

$45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$. Les diviseurs de 45 sont : **1** ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 et 45.

$91 = 1 \times 91 = 7 \times 13$. Les diviseurs de 91 sont : **1** ; 7 ; 13 et 91.

1 est le seul diviseur commun à 45 et 91. Ainsi le PGCD de 45 et 91 est égal à 1.
45 et 91 sont donc premiers entre eux.

Exemple 2 : 426 et 568 sont-ils premiers entre eux ?

426 et 568 sont tous les deux divisibles par 2 donc ils ont un autre diviseur commun que 1 : leur PGCD n'est pas égal à 1.
Ainsi 426 et 568 ne sont pas premiers entre eux.

Exercices « À toi de jouer »

9 Démontre que 481 et 625 sont premiers entre eux.

10 Démontre que 360 et 741 ne sont pas premiers entre eux.

Méthode 4 : Rendre une fraction irréductible

À connaître

Une **fraction est irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur sont **premiers entre eux**.

Exemple : Rends les fractions $\frac{75}{105}$; $\frac{198}{180}$ et $\frac{136}{782}$ irréductibles.

On remarque que 75 et 105 sont divisibles par 3 et par 5.

$$\frac{75}{105} = \frac{75 \div 3}{105 \div 3} = \frac{25}{35}$$

$$\frac{25}{35} = \frac{25 \div 5}{35 \div 5} = \frac{5}{7}.$$

5 et 7 sont premiers entre eux donc la fraction est irréductible.

On peut chercher à écrire 198 et 180 sous forme de produits de facteurs les plus petits possible :

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

$198 = 2 \times 3^2 \times 11$ donc :

$$\frac{198}{180} = \frac{2 \times 3^2 \times 11}{2^2 \times 3^2 \times 5} = \frac{11}{2 \times 5}$$

Ainsi $\frac{198}{180} = \frac{11}{10}$.

Le PGCD de 136 et 782 est 34 (*cf.* ***méthode 2***).

34 est donc le plus grand entier naturel qui divise à la fois 136 et 782.

Les quotients obtenus sont obligatoirement premiers entre eux.

$$\frac{136}{782} = \frac{136 \div 34}{782 \div 34} = \frac{4}{23}.$$

Exercices « À toi de jouer »

11 La fraction $\frac{456}{568}$ est-elle irréductible ? Justifie ta réponse.

12 Rends les fractions $\frac{48}{60}$ et $\frac{276}{161}$ irréductibles.

Multiples, diviseurs

1 *Vocabulaire*

Réponds aux questions suivantes en justifiant.

a. 4 est-il un diviseur de 28 ?

b. 32 est-il un multiple de 6 ?

c. 4 divise-t-il 18 ?

d. 35 est-il divisible par 5 ?

2 Dans chaque cas, écris quatre phrases utilisant les nombres et l'un des mots suivants : diviseur, multiple, divisible, divise.

a. 70 et 210 **b.** 186 et 15 **c.** 192 et 48

3 *Critères de divisibilité*

Parmi les nombres : 12 ; 30 ; 27 ; 246 ; 325 ; 4 238 et 6 139, indique ceux qui sont divisibles :

a. par 2 **b.** par 3 **c.** par 5 **d.** par 9

4 On s'intéresse aux nombres de trois chiffres de la forme $\overline{65u}$ où u représente le chiffre des unités.
Quelles sont les valeurs possibles de u pour obtenir :

a. un multiple de 2 ?

b. un nombre divisible par 9 ?

5 *Liste*

a. Trouve tous les nombres divisibles par 7 compris entre 220 et 260.

b. Parmi ces nombres, quels sont ceux qui sont divisibles par 4 ?

6 *Énigme*

Trouve tous les nombres de trois chiffres divisibles à la fois par 3 et par 5 et dont le chiffre des centaines est 7.

7 Écris la liste de tous les diviseurs de :

a. 32 **b.** 67 **c.** 81 **d.** 144

8 *Pair*

Explique pourquoi le produit de deux entiers consécutifs est toujours pair.

9 *Séminaire*

Lors d'un séminaire, 324 personnes doivent se répartir dans divers ateliers. Tous les ateliers doivent avoir le même effectif, compris entre 30 et 60 personnes. Quelles sont les différentes possibilités ?

10 *Nombres parfaits*

a. Écris la liste de tous les diviseurs de 6.

b. Calcule la somme de tous ces diviseurs à l'exception de 6.

c. Que remarques-tu ?
On appelle nombre parfait tout entier qui a cette particularité.

d. Vérifie que 496 est un nombre parfait.

e. Trouve tous les nombres parfaits compris entre 20 et 30.

11 *Multiples de 18*

a. Donne une écriture littérale des multiples de 18.

b. Démontre que si un entier est multiple de 18 alors il est aussi multiple de 3 et de 6.

c. La réciproque est-elle vraie ? Justifie.

12 *Multiples de 15*

a. Démontre que si un entier est multiple de 15 alors il est aussi multiple de 3 et de 5.

b. La réciproque semble-t-elle vraie ?

Division euclidienne

13 *Posée, en ligne*

a. Donne le quotient et le reste de la division euclidienne de :

- 63 par 4 ;
- 3 245 par 135 ;
- 218 par 12 ;
- 32 par 50.

b. Dans chaque cas, écris l'égalité $a = bq + r$, où q et r sont des entiers naturels et $r < b$.

14 *À la recherche du reste*

Dans la division euclidienne de 2 654 par 12, le quotient est 221. Sans effectuer la division, détermine le reste.

Exercices d'entraînement

15 *À la recherche du dividende*

Dans une division euclidienne, le diviseur est 14, le quotient est 18 et le reste est 5.
Quel est le dividende ?

16 On donne l'égalité : $168 = 15 \times 11 + 3$.

Sans faire de division, détermine le quotient et le reste de la division euclidienne de 168 par 15 puis de la division euclidienne de 168 par 11.

17 On donne l'égalité : $325 = 78 \times 4 + 13$.

a. Sans faire de division, détermine le quotient et le reste de la division euclidienne de 325 par 78 ?

b. 78 est-il le quotient de la division euclidienne de 325 par 4 ? Justifie.

18 *À la Bibliothèque*

Dans une bibliothèque, il y a 360 livres qu'il faut ranger sur des étagères contenant 22 livres chacune. Combien faut-il d'étagères pour ranger tous ces livres ?

19 *Le tour du monde*

Dans le roman de Jules Verne, Philéas Fogg doit faire le tour du monde en 80 jours. Combien cela représente-t-il de semaines ?
S'il part un jeudi, quel jour reviendra-t-il ?

Diviseurs communs, PGCD

20 *Liste des diviseurs communs et PGCD*

Dans chaque cas, écris la liste des diviseurs communs aux deux nombres et entoure leur PGCD.

a. 24 et 36 **c.** 72 et 1 **e.** 42 et 168

b. 20 et 63 **d.** 434 et 98 **f.** 124 et 0

21 *Nombre de joueurs*

Dans une partie de cartes, on doit répartir entre les joueurs 180 jetons noirs et 120 jetons blancs. Chaque joueur doit recevoir le même nombre de jetons noirs et le même nombre de jetons blancs.

a. Peut-il y avoir vingt joueurs ? Neuf joueurs ?

b. Combien peut-il y avoir de joueurs ? Donne toutes les possibilités.

22 *Chez le fleuriste*

Un fleuriste dispose de 30 marguerites et 24 tulipes. Il veut composer des bouquets contenant le même nombre de marguerites et le même nombres de tulipes et utiliser toutes ses fleurs. On veut calculer le nombre maximum de bouquets qu'il peut faire.

a. Explique pourquoi le nombre de bouquets doit être un diviseur commun à 30 et 24. Lequel de ces diviseurs communs choisir ? Combien de bouquets peut-il réaliser au maximum ?

b. Quelle est alors la composition de chaque bouquet ?

23 *Méthode des soustractions successives*

En utilisant la méthode des soustractions successives, détermine le PGCD des deux nombres.

a. 76 et 21 **c.** 182 et 78

b. 120 et 48 **d.** 117 et 153

24 *Méthode des divisions successives*

En utilisant la méthode des divisions successives, détermine le PGCD des deux nombres.

a. 182 et 42 **c.** 1 053 et 325

b. 534 et 235 **d.** 1 980 et 2 340

25 *Comparaison*

a. Calcule le PGCD de 138 et 63 en utilisant la méthode des divisions successives.

b. Combien d'étapes nécessite la méthode des soustractions successives ?

26 *Au choix*

Détermine le PGCD des nombres en utilisant la méthode qui te semble la plus appropriée.

a. 682 et 352 **c.** 140 et 84

b. 248 et 124 **d.** 1 470 et 2 310

27 *Extrait du Brevet*

Un pâtissier dispose de 411 framboises et de 685 fraises. Afin de préparer des tartelettes, il désire répartir ces fruits en les utilisant tous et obtenir le maximum de tartelettes identiques.
Calculer le nombre de tartelettes et indiquer leur composition.

Exercices d'entraînement

28 *Tournage*

Lors du tournage d'un film, le réalisateur dispose de 651 figurants habillés en noir et de 465 habillés en rouge.
Il doit former des équipes constituées de la manière suivante : dans chaque groupe, il doit y avoir le même nombre de figurants vêtus de rouge et le même nombre de figurants vêtus de noir.
Le nombre d'équipes doit être maximal.
Quelle sera la composition d'une équipe ?

29 *Exposition*

Un photographe doit réaliser une exposition de ses œuvres et présenter sur des panneaux des paysages et des portraits.
Tous les panneaux doivent contenir autant de photos de chaque sorte.
Il veut exposer 224 paysages et 288 portraits.

a. Combien peut-il réaliser au maximum de panneaux en utilisant toutes ses photos ? Justifie.

b. Combien mettra-t-il alors de paysages et de portraits sur chaque panneau ?

30 *Nombres croisés*

Recopie et complète la grille avec les nombres que tu découvriras grâce aux définitions.

	A	B	C	D
I				■
II				
III		■		
IV	■		■	

Horizontalement

I : PGCD (125 ; 250).
II : Ce nombre est un multiple de 9.
III : Le chiffre des unités d'un nombre divisible par 10. Ce nombre est divisible par 5.
IV : Le reste de la division euclidienne de 121 par 8. Le quotient dans celle de 245 par 112.

Verticalement

A : Le plus petit multiple de 24 à trois chiffres.
B : Le quotient de la division euclidienne de 274 par 10. Diviseur commun à tous les entiers.
C : PGCD (1 542 ; 3 598).
D : 3 est un diviseur de ce nombre.

31 *Carrelage*

Dans une salle de bain, on veut recouvrir le mur se trouvant au-dessus de la baignoire avec un nombre entier de carreaux de faïence de forme carrée dont le côté est un nombre entier de centimètres, le plus grand possible.
Détermine la longueur, en centimètres, du côté d'un carreau de faïence sachant que le mur mesure 210 cm de hauteur et 135 cm de largeur. Combien faudra-t-il alors de carreaux ?

Nombres premiers entre eux

32 *Définition*

a. Liste les diviseurs communs à 42 et 65.

b. Déduis-en que 42 et 65 sont premiers entre eux.

33 *Définition (bis)*

a. Calcule le PGCD de 195 et 364.

b. 195 et 364 sont-ils premiers entre eux ?

34 Dans chaque cas, sans calculer le PGCD, indique pourquoi les deux entiers donnés ne sont pas premiers entre eux.

a. 98 et 114 **b.** 125 et 75 **c.** 27 et 63

35 Ces nombres sont-ils premiers entre eux ?

a. 212 et 324 **c.** 667 et 103

b. 837 et 1 085 **d.** 645 et 1 375

36 *Listes*

a. Écris la liste des nombres entiers naturels inférieurs à 24 qui sont premiers avec 24.

b. Écris la liste des nombres entiers naturels inférieurs à 31 qui sont premiers avec 31.

37 *Pairs, impairs*

a. Peux-tu trouver deux nombres entiers pairs premiers entre eux ? Justifie.

b. Peux-tu trouver deux nombres entiers impairs premiers entre eux ? Justifie.

c. Peux-tu trouver un nombre entier pair et un nombre entier impair qui ne sont pas premiers entre eux ? Justifie.

Simplification de fractions

38 *Avec des diviseurs communs*

On considère la fraction $\frac{540}{720}$.

a. Quel(s) diviseur(s) commun(s) ont le numérateur et le dénominateur de la fraction ?

b. Simplifie la fraction pour obtenir une fraction irréductible.

39 *En décomposant*

a. Écris 168 et 132 sous forme d'un produit de facteurs entiers positifs les plus petits possibles.

b. Rends la fraction $\frac{168}{132}$ irréductible en utilisant ces décompositions.

40 *Avec le PGCD*

a. Calcule le PGCD de 462 et 65.

b. Que peux-tu en déduire pour les nombres 462 et 65 ? Pour la fraction $\frac{462}{65}$?

41 *Avec le PGCD (bis)*

a. Calcule le PGCD de 3 276 et 3 510 et simplifie la fraction $\frac{3\,276}{3\,510}$.

b. Vérifie que le numérateur et le dénominateur obtenus sont premiers entre eux. Que peux-tu en déduire pour la fraction obtenue ?

42 *Extrait du Brevet*

a. Pour chaque nombre : 1 035 ; 774 ; 322, indiquer s'il est divisible par 2, par 5, par 9.

b. Les fractions $\frac{774}{1\,035}$ et $\frac{322}{774}$ sont-elles irréductibles ? Pourquoi ?

c. Calculer le PGCD de 322 et 1 035. La fraction $\frac{322}{1\,035}$ est-elle irréductible ?

43 Rends les fractions suivantes irréductibles.

a. $\frac{18}{24}$ c. $\frac{120}{150}$ e. $\frac{45}{63}$ g. $\frac{357}{561}$

b. $\frac{540}{288}$ d. $\frac{630}{924}$ f. $\frac{1\,540}{693}$ h. $\frac{1\,080}{1\,260}$

Opérations en écriture fractionnaire

44 Soit $A = \frac{4}{9} + \frac{5}{12}$.

A. Écris la liste des premiers multiples de 9.

B. Écris la liste des premiers multiples de 12.

c. Déduis-en le plus petit multiple commun à ces deux nombres et le plus petit dénominateur commun à $\frac{4}{9}$ et $\frac{5}{12}$.

d. Calcule A et donne le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

45 Calcule et donne le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$B = \frac{5}{18} + \frac{2}{27}$ | $C = \frac{12}{10} + \frac{14}{35}$ | $D = \frac{3}{14} + \frac{5}{21}$

46 *Extrait du Brevet*

On pose : $M = \frac{20\,755}{9\,488} - \frac{3}{8}$.

a. Calculer le plus grand diviseur commun D de 20 755 et 9 488.

b. Écrire, en détaillant les calculs, le nombre M sous la forme d'une fraction irréductible.

c. Le nombre M est-il décimal ? Est-il rationnel ? Justifier.

47 Calcule en simplifiant avant d'effectuer les produits et donne le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

$A = \frac{3}{14} \times \frac{7}{15}$ | $B = \frac{6}{32} \times \frac{8}{3}$ | $C = \frac{15}{17} \times \frac{34}{25}$

48 Calcule et donne le résultat sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre décimal.

$A = \frac{2}{3} - \frac{7}{3} \times \frac{8}{21}$

$B = \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right) \times \frac{3}{2}$

$C = 11 \div \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{2}\right)$

$D = \frac{3}{7} - \frac{15}{7} \div \frac{5}{24}$

$E = \left(\frac{11}{7} - \frac{2}{5}\right) \times \frac{24}{7}$

$F = \frac{25}{15} \times \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{24}\right)$

Exercices d'approfondissement

49 *Par groupes !*

Lors d'un spectacle d'une compagnie de danse, tous les danseurs font un premier numéro quatre par quatre simultanément puis un second six par six, tous ensemble encore.

Pourront-ils tous participer à un numéro pour lequel il faut des groupes de 24 ? Justifie.

50 La somme de quatre multiples consécutifs de 7 est égale à 406.
Quels sont ces quatre entiers ?

51 Démontre que la somme de deux entiers impairs consécutifs est un multiple de 4.
A-t-on la même propriété pour la somme de deux entiers pairs consécutifs ?

52 Trouve les nombres entiers de trois chiffres multiples de 5 dont la somme des chiffres est 21.

53 *Nombres divisibles par 7*

a. 35 et 6 300 sont-ils divisibles par 7 ? Justifie.

b. En utilisant la question **a.**, démontre que 6 335 est divisible par 7.

c. Démontre dans le cas général que si x et y sont deux nombres entiers divisibles par 7 alors leur somme $x + y$ est divisible par 7.

d. En écrivant le nombre 6 349 147 comme une somme de quatre multiples de 7, démontre que 6 349 147 est un multiple de 7.

e. Écris un nombre entier de 15 chiffres qui soit divisible par 7.

54 *Pairs et impairs*

a. Quelle est l'écriture littérale d'un nombre pair ? D'un nombre impair ?

b. Quelle est la parité de la somme $a + b$ lorsque :

- a et b sont tous les deux pairs ?
- a et b sont tous les deux impairs ?
- a est pair et b est impair ?

c. Quelle est la parité du produit $a \times b$ lorsque :

- a et b sont tous les deux pairs ?
- a et b sont tous les deux impairs ?
- a est pair et b est impair ?

55 *Pairs et impairs (bis)*

a. Démontre que si a est impair alors a^2 est impair.

b. Déduis-en que si a^2 est pair alors a est pair.

56 n est un entier naturel.

a. Démontre que si n est impair alors 8 divise $n^2 - 1$.

b. Le nombre $1 + 3^n$ est-il toujours pair ?

c. Démontre que $2^n + 2^{n+1}$ est divisible par 3.

57 *Les trois filles*

Dans une famille, il y a trois filles. La somme de leurs âges est 13 et le produit est 36.

a. Étudie la parité des âges.

b. Quel est l'âge de chaque fille ? Trouve toutes les possibilités.

58 *Sacrée collection !*

Source Wikipédia

Abdel dit à Doris : « J'ai plus de 400 DVD mais moins de 450 ! Que je les groupe par 2, par 3, par 4 ou par 5, c'est toujours la même chose : il en reste un tout seul ! ».
Combien Abdel a-t-il de DVD ?

59 *Escalier*

Le nombre de marches d'un escalier est compris entre 40 et 80.

- Si on compte ces marches deux par deux, il en reste une.
- Si on les compte trois par trois, il en reste deux.
- Si on les compte cinq par cinq, il en reste quatre.

Quel est le nombre de marches de cet escalier ?

60 *Quotient et reste*

Trouve tous les nombres pour lesquels le quotient et le reste sont égaux dans la division euclidienne par 5.

61 *Recherche*

Combien peut-on trouver d'entiers naturels inférieurs à 1 000 dont le reste est 12 dans la division euclidienne par 25 ?

62 *Division euclidienne par 13*

Dans une division euclidienne, le diviseur est 13, le reste est 5.

a. Si l'on augmente le dividende de 1, que devient le quotient ? Que devient le reste ?

b. De combien peut-on augmenter le dividende sans changer le quotient ?

c. Si on veut diminuer le quotient de 1, combien faut-il enlever au dividende ? Donne toutes les possibilités.

63 *Division euclidienne*

On a l'égalité : $3\,625 = 85 \times 42 + 55$.
Réponds aux questions suivantes sans faire de division et en justifiant.

a. Quel est le quotient de la division euclidienne de 3 625 par 42 ?

b. Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 3 650 par 85 ?

c. Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 3 650 par 42 ?

d. Mêmes questions que **b.** et **c.** en remplaçant 3 650 par 3 600.

e. Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 3 569 par 85 ?

64 *Division euclidienne (bis)*

Dans une division euclidienne, que deviennent le quotient et le reste si on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre ?

65 *Devinette*

Lorsque je divise 134 par ce nombre, le reste est 2 et lorsque je divise 183 par ce même nombre, le reste est 3.

Quel peut être ce nombre ? Trouve toutes les solutions.

66 *Distribution de crêpes*

La grand-mère de Nicolas a fait 26 crêpes. Elle demande à Nicolas de les distribuer à parts égales à chacun de ses quatre cousins présents dans la cuisine. Lorsqu'il ne pourra plus en distribuer, il gardera le reste pour lui.
Après réflexion, Nicolas s'empresse d'aller chercher ses trois autres cousins dans le jardin.

Pourquoi ?

67 Un groupe de moins de 40 personnes doit se répartir équitablement une somme de 229 €. Il reste alors 19 €. Plus tard, ce même groupe doit maintenant se répartir équitablement 474 € : cette fois-ci, il reste 12 €.

a. Combien y a-t-il de personnes dans ce groupe ?

b. Ils décident de se répartir ce qu'il reste équitablement. Combien chaque personne reçoit-elle en plus ? Quelle somme auront-ils reçue au total ?

68 *Démonstration de l'algorithme d'Euclide*

a et b sont deux entiers naturels, $a > b$.
On effectue la division euclidienne de a par b :
$a = b \times q + r$ où $r < b$.

a. Démontre que si d est un diviseur commun à a et b alors d est aussi un diviseur de r.

b. Démontre que si d' est un diviseur commun à b et r alors d' est aussi un diviseur de a.

c. Démontre que PGCD (a ; b) = PGCD (b ; r).

69 *Pages*

Deux livres ont respectivement 480 et 608 pages. Chacun de ces livres est formé de fascicules ou cahiers, qui ont tous un même nombre de pages, compris entre 30 et 50.

a. Quel est le nombre de pages d'un cahier ?

b. Quel est le nombre de cahiers qui composent les deux livres ?

70 *Énigmes*

a. Trouve deux nombres entiers naturels dont la somme est 2 285 et le PGCD est 457. Y a-t-il plusieurs solutions ?

b. Trouve deux nombres entiers naturels dont le PGCD est égal à 8 et dont le produit est 960. Y a-t-il plusieurs solutions ?

71 *Timbres*

Un philatéliste possède 17 017 timbres français et 1 183 timbres étrangers. Il souhaite vendre toute sa collection en réalisant des lots identiques, comportant le même nombre de timbres français et le même nombre de timbres étrangers.
Calcule le nombre maximum de lots qu'il pourra réaliser et dans ce cas, le nombre de timbres de chaque sorte par lot.

Exercices d'approfondissement

72 *Tempête*

Des poteaux téléphoniques étaient plantés le long d'une route sur une ligne droite, régulièrement espacés d'un nombre entier de mètres.
Après une tempête, il n'en reste plus que trois : le premier, le dernier et un autre situé entre les deux, à 345 m du premier et 184 m du dernier.
Un technicien arrivé sur les lieux estime le nombre de poteaux tombés à plus de 10 mais moins de 100 !
Combien de poteaux sont-ils tombés ?

73 *Soyons tous à l'heure*

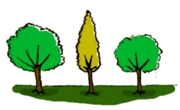
a. La montre d'Éric sonne toutes les 6 heures et celle de Leïla, toutes les 14 heures. Elles ont sonné ensemble le 9 octobre à 17h30.
À quelle date et à quelle heure sonneront-elles ensemble de nouveau ?

b. Même question si la montre d'Éric sonne toutes les 15 heures et celle de Leïla toutes les 21 heures.

74 *Arbres*

Un terrain rectangulaire a pour dimensions 966 m et 1 008 m. Sur ses côtés, on veut planter des arbres régulièrement espacés d'un nombre entier de mètres. Il doit y avoir un arbre à chaque coin du terrain.

Quel est le nombre minimum d'arbres que l'on pourra planter ?



75 *Piscine*

Une piscine rectangulaire mesure 3,36 m par 7,80 m et a une profondeur de 1,44 m.
On désire la carreler avec des carreaux carrés tous identiques.
Le carreleur ne veut pas faire de découpes de carreaux et préfère les grands carreaux, car ils sont plus faciles à poser. Son fournisseur a toutes les tailles de carreaux en nombre entier de centimètres.

a. Quelle taille de carreaux doit-il commander ?

b. Son fournisseur vend les carreaux par lot de 100. Combien de lots doit-il commander ?

76 *Entiers naturels consécutifs*

a. Calcule le PGCD de 34 et 35 puis celui de 456 et 457.

b. Quelle conjecture peux-tu faire ? Démontre cette conjecture.

77 *Premiers entre eux*

a. Démontre que les entiers naturels k et $2k + 1$ sont premiers entre eux pour n'importe quelle valeur de k.

b. Même question avec $k + 1$ et $2k + 1$.

c. Déduis-en des couples d'entiers naturels premiers entre eux.

78 Rends la fraction $\dfrac{11\,413}{14\,351}$ irréductible.

79 Soit $C = \dfrac{4}{15} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{9}$.

a. En écrivant la liste des premiers multiples de chacun des dénominateurs, trouve le dénominateur commun aux trois fractions le plus petit possible.

b. Calcule C et donne le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

c. Procède de la même façon pour calculer $D = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{4}$.

80 *Addition*

a. Soit $G = \dfrac{3\,575}{4\,225}$.
Écris G sous la forme d'une fraction irréductible.

b. Soit $H = G + \dfrac{4}{26}$.
Écris H sous la forme d'un nombre entier. Indique le détail des calculs.

81 Calcule $J = \dfrac{575}{161} - \dfrac{45}{21}$. (Donne le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.)

82 Calcule en détaillant les étapes et donne le résultat sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre décimal.

$$A = \frac{24 \times 9 \times 72 \times 121}{36 \times 33 \times 64}$$

$$B = 56 \times \frac{15}{128} - \frac{1}{18}$$

$$C = \left(\frac{24}{15} + \frac{35}{25}\right) \times \frac{20}{33}$$

$$D = \frac{81}{63} \div \left(4 - \frac{2}{14}\right)$$

$$E = \frac{56}{15} \times \frac{\dfrac{5}{6} - \dfrac{5}{4}}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3}}$$

$$F = 3 + \frac{2}{15} \times \left(5 \times \frac{23}{25} - \frac{12}{49} \div \frac{9}{14}\right) \div \frac{1}{70}$$

1 Table des PGCD

Le but de ce travail en groupe est de construire une table des PGCD puis de mettre en évidence, à l'aide de cette table, certaines propriétés du PGCD.

Une table des PGCD est comparable à une table de multiplication, à la différence que pour une case donnée la valeur contenue est le PGCD des deux nombres considérés et pas leur produit.

Voilà un exemple de table des PGCD :

PGCD $(a ; b)$		valeur de a				
		1	2	3	4	5
valeur de b	1	1	1	1	1	1
	2	1	2	1	2	1
	3	1	1	3	1	1
	4	1	2	1	4	1
	5	1	1	1	1	5

La case grisée contient le nombre 2 car 2 est le PGCD de 4 et 2.

1re Partie : Construction d'une table des PGCD

a. Dans la table précédente, les valeurs de a et de b sont comprises entre 1 et 5. Sur une feuille, chacun d'entre vous construit un tableau suffisamment grand pour que a et b puissent être compris entre 1 et 20. Puis, chacun complète le tableau pour a et b compris entre 1 et 10.

b. Dans le groupe, mettez en commun vos résultats et corrigez ensemble s'il y a des erreurs puis terminez de compléter la table.

2e Partie : Quelques propriétés du PGCD

c. On remarque que la première ligne ne comporte que des 1. Expliquez pourquoi.

d. En observant la table, trouvez d'autres régularités et rédigez une explication pour chacune d'elles.

3e Partie : Mise en commun

Chaque groupe désigne un rapporteur qui présente à la classe les propriétés trouvées et les explications correspondantes.

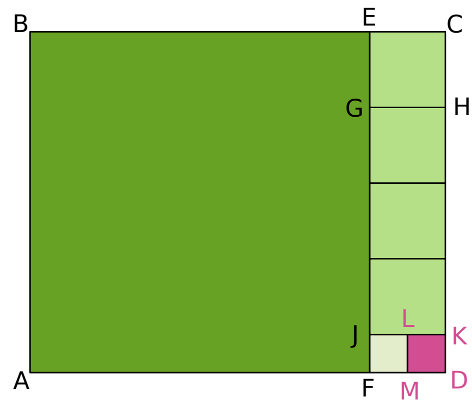
2 Méthode géométrique de calcul du PGCD

1re Partie : Découverte de la méthode

Dans cette partie, nous allons illustrer le calcul du PGCD de 18 et 22 par une figure géométrique.

On commence par construire un rectangle ABCD tel que AB = 18 et BC = 22. On construit ensuite le carré ABEF. Dans la surface restante, le rectangle ECDF, on peut placer quatre carrés de côté EC. On construit ensuite le carré JLMF et on constate que la surface restante est l'intérieur d'un carré : LKDM.

a. Chaque membre du groupe reproduit cette figure en choisissant comme unité un carreau ou 1 cm.



b. Chaque membre calcule, par la méthode des soustractions successives, le PGCD de 18 et 22.

c. Quels nombres, apparaissant dans la méthode des soustractions successives, correspondent à des longueurs sur la figure ?

d. À quelle longueur correspond le PGCD de 18 et 22 ?

2e Partie : Quelques autres exemples

e. Chaque membre détermine le PGCD de 12 et 45 par la méthode géométrique (sur une feuille à petits carreaux).

f. Chaque membre vérifie son résultat en calculant le PGCD de 12 et 45 par la méthode des soustractions successives.

g. Chaque membre choisit un nombre entre 10 et 20, puis un autre nombre entre 40 et 50. Il donne ses deux nombres à son voisin de droite qui doit déterminer leur PGCD par la méthode géométrique (sur une feuille à petits carreaux).

h. Chaque membre prend ensuite la figure de son voisin de gauche et vérifie que la figure est correcte en calculant le PGCD des deux nombres par la méthode des soustractions successives.

Se tester avec le QCM !

		R1	R2	R3	R4
1	435 est...	un multiple de 5	un diviseur de 5	divisible par 5	de la forme $5k$ où k est un entier
2	17 est...	un diviseur de 3 672	un multiple de 17	le seul diviseur de 17	un multiple de 8,5
3	Retrouve la (les) affirmation(s) vraie(s) :	Tout nombre entier est un multiple de 0	Il existe toujours au moins un diviseur commun à deux entiers	La liste des diviseurs d'un entier est infinie	Un nombre entier est toujours divisible par lui-même
4	$n = 12k$ où k est un entier donc...	n est un diviseur de 12	n est un multiple de 4	le reste de la division euclidienne de n par 12 est 0	2, 3, 4, 6 et 12 sont des diviseurs de n
5	$\begin{array}{r\|l} 196 & 56 \\ \cline{2-2} 280 & 3,5 \\ 0 & \end{array}$ donc...	196 est divisible par 56	$196 = 56 \times 3,5$	3 est le quotient et 28 est le reste de la division euclidienne de 196 par 56	35 est le quotient et 0 le reste de la division euclidienne de 1 960 par 56
6	$418 = 8 \times 51 + 10$ donc...	8 est le quotient de la division euclidienne de 418 par 51	51 est le quotient de la division euclidienne de 418 par 8	51 est le diviseur dans la division euclidienne de 418 par 51	51 est un diviseur de 418
7	15 est...	un diviseur commun à 30 et 45	le PGCD de 30 et 45	le plus grand multiple commun à 3 et 5	le plus grand des diviseurs communs à 60 et 135
8	Le PGCD de 252 et 196 est...	1	28	2	0
9	Retrouve la (les) affirmation(s) vraie(s) : (n et m sont des entiers non nuls.)	n divise m donc PGCD (n ; m) = n	$m = 3n$ donc PGCD (3 ; m) = 3	PGCD (1 ; n) = 1	$n = m + 1$ donc PGCD (n ; m) = 1
10	18 et 35...	n'ont pas de diviseur commun	sont premiers entre eux	sont premiers	ont un seul diviseur commun : 1
11	Retrouve le couple d'entiers premiers entre eux :	357 et 468	13 450 et 9 985	224 et 447	435 et 812
12	Retrouve la (les) fraction(s) irréductible(s) :	$\frac{2\,590}{3\,885}$	$\frac{74}{111}$	$\frac{1\,601}{1\,621}$	$\frac{2\,429}{1\,735}$

Récréation mathématique

Collision...

Deux satellites ont des orbites qui se croisent en un point : à l'endroit précis où la fusée vient malencontreusement de les mettre en service simultanément !

La révolution du premier dure 8 h 49 min 12 s et celle du second, un jour et six heures.

Dans combien de temps aura lieu la collision ?

Récréation mathématique

La vache !

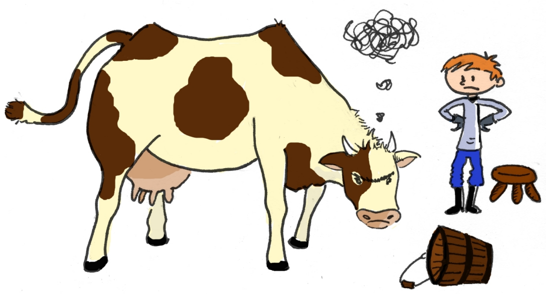
Dans un troupeau, chaque vache donne 10 litres de lait par jour.

Les vaches donnent du lait tous les jours sauf Paola qui est un peu caractérielle et ne donne du lait que les jours où elle est de bonne humeur...

Au mois de mars, le troupeau a produit 7 890 litres de lait.

Combien y a-t-il de vaches ?

Combien de jours Paola a-t-elle été de bonne humeur ?



Au crible

Écris tous les entiers de 1 à 100.

Entoure 2 et raye tous les multiples de 2, autres que 2.
Entoure 3 et raye tous les multiples de 3, autres que 3.
Recommence avec le premier nombre non rayé et continue le processus jusqu'à ce que tous les nombres soient entourés ou rayés.

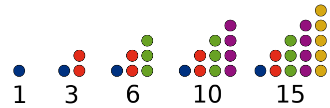
Quelle est la particularité des nombres entourés ?

Cette méthode de tri est connue sous le nom de « crible d'Ératosthène ».

Si on applique ce crible à tous les entiers naturels, 163 serait-il entouré ? Et 1 678 314 ?

Nombres triangulaires

Ci-dessous, les cinq premiers nombres « triangulaires » :



a. Quel est le millième ?

b. Quelle conjecture peux-tu faire lorsque tu additionnes deux nombres triangulaires consécutifs ?

Démontre-la !

Geôle

Dans un donjon, vingt cellules numérotées de 1 à 20 sont fermées à clé. Ces cellules s'ouvrent et se ferment en un tour de clé.

Alors que les prisonniers dorment à poings fermés, un premier gardien, qui les pensait ouvertes, met un tour de clé à toutes les cellules.
Peu après, un deuxième gardien met un tour de clé à toutes les cellules dont le numéro est multiple de 2.
Arrive ensuite un troisième gardien qui met un tour de clef à toutes les cellules dont le numéro est un multiple de 3 !
Et ainsi de suite...
Au final, vingt gardiens se sont succédés !

a. Quels sont les numéros des cellules dont les prisonniers vont facilement pouvoir s'évader ?

b. Reprends le même problème avec 500 cellules et 500 passages de gardiens !!
Justifie ta réponse.

Pour aller plus loin

Numération et critères de divisibilité

a. Recopie et complète : 6 732 = 6 × ... + 7 × ... + 3 × ... + 2.

En remarquant que 10 = 9 + 1 ; 100 = 99 + 1 ; ..., montre que 6 732 peut s'écrire 6 + 7 + 3 + 2 + m où m est un entier multiple de 3 et de 9.

b. Rappelle les critères de divisibilité par 3 et par 9 et démontre-les dans le cas d'un entier de six chiffres.

c. Démontre que tout nombre entier de plus de deux chiffres peut s'écrire comme la somme d'un multiple commun à 4 et 25 et du nombre entier constitué de ses deux derniers chiffres.

Déduis-en un critère de divisibilité par 4 et un critère de divisibilité par 25.