GÉOMÉTRIE

1

Repérage sur le cercle et trigonométrie

Connaissances du collège nécessaires à ce chapitre

- Calculer des proportions
- Reconnaître des proportions
- Effectuer une division euclidienne
- Calculer des angles

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 Calculer

1) $\frac{1}{4}$ de 360 3) $\frac{7}{6}$ de 360 5) $\frac{1}{3}$ de 2π 7) $\frac{6}{5}$ de 2π

2) $\frac{3}{4}$ de 360 4) $\frac{2}{5}$ de 360 6) $\frac{1}{4}$ de 2π 8) $\frac{7}{6}$ de 2π

2 Quelle proportion de 360 les nombres suivants représentent-ils ?

1) 30 3) 60 5) 180 7) 120

2) 45 4) 90 6) 270 8) 480

3 Quelle proportion de 2π les nombres suivants représentent-ils ?

1) $\frac{4\pi}{7}$ 3) $\frac{2\pi}{3}$ 5) $\frac{3\pi}{4}$ 7) $\frac{11\pi}{6}$

2) $\frac{8\pi}{5}$ 4) $\frac{10\pi}{9}$ 6) $\frac{7\pi}{5}$ 8) $\frac{3\pi}{5}$

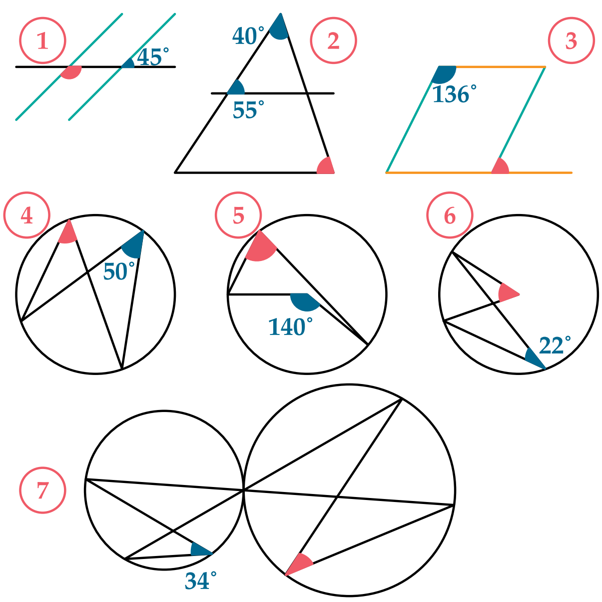
4 Effectuer les divisions euclidiennes suivantes.

1) 2014 par 360 3) 12345 par 360

2) 2014π par 2π 4) 12345π par 2π

5 Déterminer les angles marqués en rouge.

Les droites de la même couleur sont parallèles.



Voir solutions p. 15

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 Tournons

Partie 1 : À chacun son manège

La famille Laplace va à la fête foraine.

1) Fred et Dom montent sur le manège de chevaux de bois qui sont disposés en cercles concentriques. Ils choisissent deux chevaux côte à côte, l'un sur le cercle extérieur, l'autre au trois quarts de la piste. Quand le manège s'arrête, ils ont fait le même nombre de tours.
Auront-ils parcouru la même distance ?

2) Emmanuelle et Laurence choisissent, elles, la grand roue.
Elles montent dans deux nacelles séparées, chacune à la même distance du centre.
Quand elles sortent de la grand roue, elles ont fait le même nombre de tours.
Auront-elles parcouru la même distance ?

Partie 2 : Portion

Chaque nacelle se situe à 1 dam du centre de la grand roue.
Quelle est la distance parcourue

1) en un tour ?
2) en trois tours ?
3) en un demi-tour ?
4) en un tiers de tour ?

Partie 3 : La panne

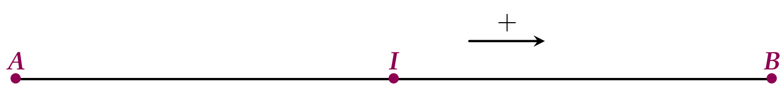
Après plusieurs tours, la nacelle s'arrête.
Exprimer la distance restant à parcourir en fonction de l'angle au centre entre la nacelle et le point de départ. (C'est le point le plus bas de la grand roue.)

ACTIVITÉ 2 Accélérons, accélérons

> Les accélérateurs de particules sont des instruments qui utilisent des champs électriques et/ou magnétiques pour trier les particules suivant leur charge électrique, la séparation mettant ces particules en mouvement à des vitesses élevées.

Partie 1 : Accélérateur linéaire

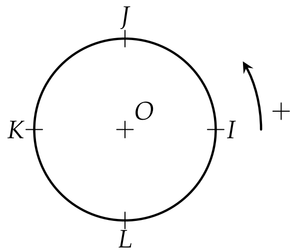
Le SLAC (inauguré en 1966) situé en Californie est un accélérateur à particules linéaire qui mesure 3,2 km. On a schématisé cet accélérateur ci-dessous où $AB = 3{,}2$ km. Le départ des particules est toujours situé en I (au milieu). Les protons, chargés positivement sont accélérés dans le sens de la flèche, et les électrons chargés négativement sont accélérés dans le sens inverse.



1) Quelle sera la distance parcourue par un proton lorsqu'il sera situé au point B ?
2) Quelle sera la distance parcourue par un électron lorsqu'il sera situé en A ?
3) Expliquer les limites d'un tel accélérateur à particules.

Activités d'approche

Partie 2 : Accélérateurs à particules circulaires



En 1970, Le CERN (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire) possédait un SPS (super proton synchrotron), un accélérateur de particules circulaire. Son rayon était de 2 km.
Il est représenté par le schéma ci-contre.
Dans cet accélérateur, les protons tournent dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et les électrons tournent dans l'autre sens.
Toutes les particules partent du point I.

1) Calculer la distance (valeur exacte et approchée) parcourues par un proton, puis par un électron, lorsqu'ils auront effectué un tour.
Où se trouvera alors le proton ? L'électron ?

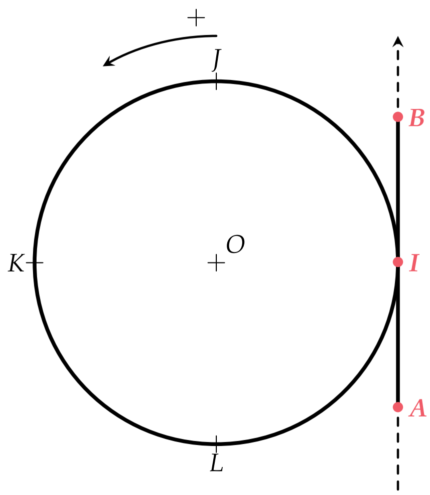
2) Calculer les distances (valeurs exactes et approchées) parcourues par un proton, puis par un électron, lorsqu'ils seront en K, en J et en L.

3) Calculer les distances (valeurs exactes et approchées) parcourues par un proton, puis par un électron lorsqu'ils auront effectué :
- un quart de tour ;
- un huitième de tour ;
- cinq huitièmes de tour ;
- un tour et un sixième de tour.

4) Reproduire la figure et placer le plus précisément possible les positions d'un proton et d'un électron à la fin de chacun de leurs parcours.

> Le 10 septembre 2008, le CERN a mis en fonction un nouvel accélérateur de particules circulaire de rayon 4,3 km : le Large Hadron Collider. Situé à la frontière franco-suisse, c'est le plus puissant accélérateur de particules au monde construit à ce jour.

Partie 3 : Comparaison



On a superposé, sur le schéma ci-contre, le SPS et le SLAC des parties précédentes. On imaginera que l'on a prolongé le SLAC en un accélérateur linéaire infini (en pointillé) et que le rayon du SPS mesure 1 km.

1) Reproduire la figure et y placer les points étudiés.

2) Un proton dans le SLAC est en B.
Où serait-il s'il avait été accéléré dans le SPS ?

3) Un électron dans le SLAC est en A.
Où serait-il s'il avait été accéléré dans le SPS ?

4) Une proton est en J dans le SPS.
Où serait-il s'il avait été accélérée dans le SLAC ?
Même question pour un électron.

4) À chaque tour complet, le proton emmagasine une énergie de 1 eV (électron-Volt).
L'électron, lui, emmagasine une énergie de -1 eV.

a) Où sera situé un proton lorsqu'il aura parcouru $\dfrac{3\pi}{4}$ km ? $\dfrac{11\pi}{4}$ km ? $\dfrac{19\pi}{4}$ km ?

b) Où sera situé un électron lorsqu'il aura parcouru $\dfrac{5\pi}{4}$ km ? $\dfrac{13\pi}{4}$ km ? $\dfrac{21\pi}{4}$ km ?

c) Dans chacun des cas, quelle sera leur charge en eV ?

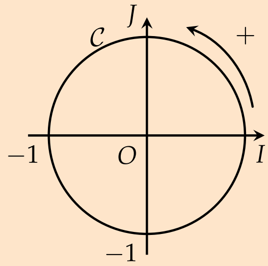
Cours - Méthodes

1. Repérage sur un cercle trigonométrique

DÉFINITION : Cercle trigonométrique

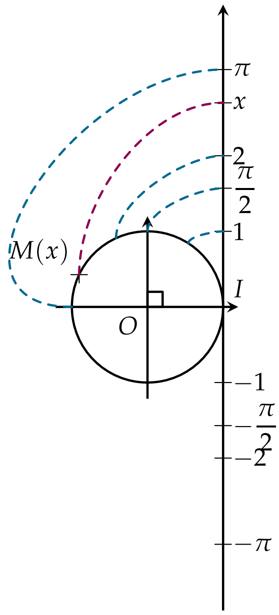
On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; I, J)$.
Le **cercle trigonométrique** $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1, sur lequel on choisit un sens de parcours :

- le sens **direct** (ou positif ou encore **trigonométrique**) est contraire au sens de rotation des aiguilles d'une montre ;
- le sens **indirect** (ou négatif) est le sens de rotation des aiguilles d'une montre.



PROPRIÉTÉ

Pour **repérer un point** M **du cercle trigonométrique**, on enroule autour du cercle un axe orienté, gradué, d'origine le point I. On peut alors associer au point M un réel x, abscisse d'un point de l'axe qui vient se superposer au point M.



REMARQUE :

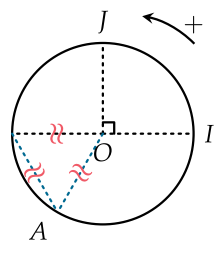
- Lorsqu'on enroule l'axe dans le sens **direct**, ce sont des points d' **abscisses positives** qui se superposent à M, dans le sens **indirect**, ce sont des points d'**abscisses négatives**.
- Tout point sur le cercle trigonométrique se repère par **plusieurs nombres réels**, distants d'un multiple de 2π, selon le nombre de tours complets de l'enroulement de l'axe.

MÉTHODE 1 Lire l'abscisse associé à un point

► Ex. 5 p. 7

Exercice d'application

Donner un nombre associé aux points J et A sur le cercle trigonométrique ci-contre tels que $\widehat{IOJ} = 90^\circ$ et $\widehat{IOA} = 120^\circ$.



Correction $\widehat{IOJ} = 90^\circ$ donc $\overset{\frown}{IJ}$ mesure un quart de la longueur du cercle dans le sens positif.
$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ donc un nombre associé à J est $\frac{\pi}{2}$.
$\widehat{IOA} = 120^\circ$ donc $\overset{\frown}{IA}$ mesure un tiers de la longueur du cercle dans le sens négatif.
Donc un nombre associé à A est $-\frac{2\pi}{3}$.
Tous les nombres associés à A s'écrivent sous la forme $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

MÉTHODE 2 Placer un point sur un cercle

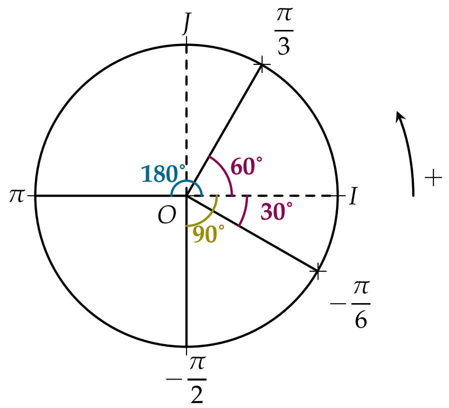
► Ex. 8 p. 8

Exercice d'application

Tracer un cercle trigonométrique et placer les points associés aux réels π ; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{6}$.

Correction

La longueur d'un cercle est donnée par la formule : $\mathcal{L} = 2\pi r$.
Pour le cercle trigonométrique, cette longueur est donc de 2π.
Le nombre π correspond à un parcours d'un demi-cercle dans le sens positif soit 180°.
Le nombre $-\frac{\pi}{2}$ correspond à un parcours d'un quart de cercle dans le sens négatif soit 90°.
Le nombre $\frac{\pi}{3}$ correspond à un parcours d'un sixième de cercle dans le sens positif soit 60°.
Le nombre $-\frac{\pi}{6}$ correspond à un parcours d'un douzième de cercle dans le sens négatif soit 30°.



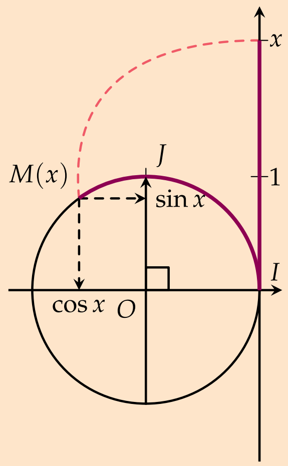
2. Coordonnées d'un point du cercle trigonométrique

DÉFINITION : Sinus, cosinus et tangente

On considère le cercle trigonométrique dans un repère $(O; I, J)$.

- Pour tout nombre x, le **cosinus** et le **sinus** de x, notés $\cos x$ et $\sin x$, sont les coordonnées du point M du cercle associé à x. On écrit alors $M(\cos x; \sin x)$.
- Pour tout nombre $x \neq \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ (avec k entier relatif), la **tangente** du nombre x est définie par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$



PROPRIÉTÉ

Pour tout nombre réel x :

$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ $\qquad$ $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ $\qquad$ $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

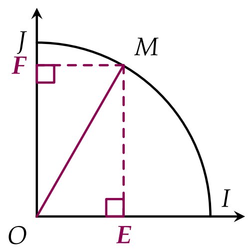
Cours - Méthodes

PREUVE Dans les conditions de la définition, comme le repère est orthonormé, on peut utiliser la formule suivante :
$OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2}$ soit $OM = \sqrt{(\cos x - 0)^2 + (\sin x - 0)^2}$
d'où $OM^2 = (\cos x)^2 + (\sin x)^2$.
Or, le cercle trigonométrique est de rayon 1, donc $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

NOTATION :
Pour simplifier l'écriture, on peut utiliser $(\cos x)^2 = \cos^2 x$ et $(\sin x)^2 = \sin^2 x$.

REMARQUE :

- Pour x un nombre de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, l'angle $\widehat{IOM}$ est un angle aigu. À partir de la figure ci-contre, dans le triangle OME rectangle en E, on a :
  $\cos \widehat{EOM} = \dfrac{OE}{OM} = OE = \cos x$ d'où $\cos x = \cos \widehat{IOM}$.
  $\sin \widehat{EOM} = \dfrac{ME}{OM} = ME = OF = \sin x$ d'où $\sin x = \sin \widehat{IOM}$.

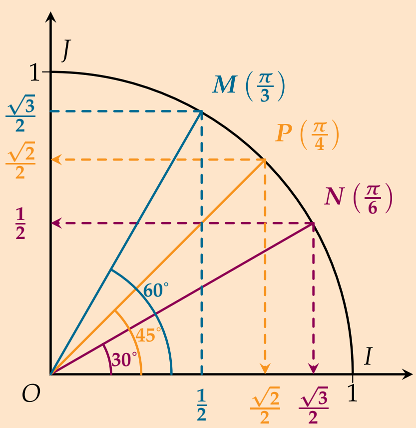


- Le réel x compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ permettant de placer le point M est aussi une mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ dans une nouvelle unité de mesure, le **radian**.

PROPRIÉTÉ : Valeurs remarquables

angle $\widehat{IOM}$	0°	30°	45°	60°	90°
réel x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$ $\cos \widehat{IOM}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$ $\sin \widehat{IOM}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Le graphique ci-dessous permet de visualiser les valeurs remarquables résumées du tableau.

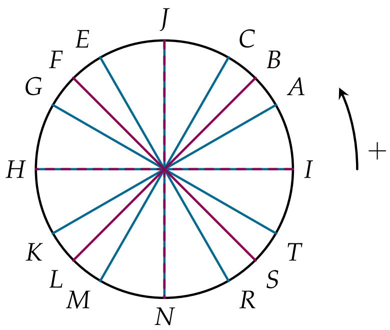


PREUVE Les preuves seront étudiées au T.P. 1

Activités Mentales

1 On considère le cercle trigonométrique ci-dessous. Associer chacun des nombres à un point du cercle.
Les segments rouges partagent le cercle en huit angles de 45°et les bleus partagent le cercle en douze angles de 30°.

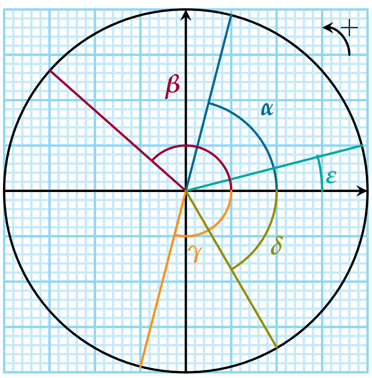
1) $\frac{\pi}{2}$ 3) $\frac{\pi}{4}$ 5) $-\frac{\pi}{2}$ 7) $-\frac{\pi}{4}$
2) $\frac{\pi}{3}$ 4) $\frac{\pi}{6}$ 6) $-\frac{\pi}{3}$ 8) $-\frac{\pi}{6}$



2 À partir de la figure de l'exercice **1**,
1) déterminer le réel associé aux points suivants compris dans l'intervalle $[0; 2\pi[$;
a) A b) R c) H d) L
2) déterminer le réel associé aux points suivants compris dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.
a) K b) N c) G d) I

3 On considère ci-dessous, dans le repère $(O; I, J)$, le cercle trigonométrique de rayon 1. Déterminer les valeurs approchées des sinus et cosinus des angles suivants.

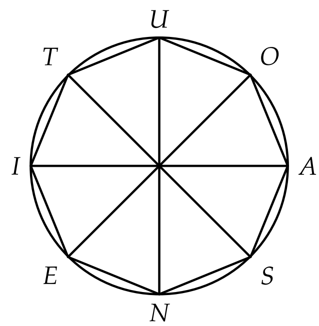
1) α 3) γ 5) ε 7) 45°
2) β 4) δ 6) 30° 8) 60°



Réel associé à un point d'un cercle

4 Dans le plan muni d'un repère orthonormal, $(O; I, J)$, on construit le cercle de centre O et de rayon 1. Marcel se trouve au point I. Il se déplace sur le cercle et part vers le haut.
1) Il fait un tour complet.
Quelle distance a-t-il parcourue ?
2) S'il s'arrête au sommet du cercle au point de coordonnées $(0; 1)$, quelle distance a-t-il parcourue ?
3) Il parcourt la moitié du cercle.
Quelle distance a-t-il parcourue ?
4) Préciser, pour chacune des questions précédentes, le réel associé au point où Marcel s'est arrêté.

5 ► MÉTHODE 1 p. 4
On représente un octogone $AOUTIENS$ et on considère son cercle circonscrit comme un cercle trigonométrique d'origine A.
1) Combien mesure chacun des angles au centre formé par deux sommets consécutifs de cet octogone ?
2) En déduire un réel associé à chacun des sommets compris dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.



6 On considère un cercle de centre O et de rayon 1.
1) Faire une figure en prenant 4 cm pour unité.
2) En reportant 6 fois le longueur du rayon sur le cercle, tracer un hexagone $ABCDEFG$ inscrit dans le cercle.
3) Quels sont les réels associés aux sommets de cet hexagone en prenant A comme origine ?

7 On étudie un pentagone $PENTA$ régulier de centre O. On considère son cercle circonscrit comme un cercle trigonométrique de centre O et d'origine A, le sens positif étant de P vers E.
1) Faire un schéma.
2) Déterminer un réel associé à chacun des sommets.

S'entraîner

8 ▶ MÉTHODE 2 p. 5

On considère un cercle trigonométrique.

1) Placer les points associés aux réels suivants.

a) $\frac{2\pi}{3}$ **c)** $\frac{3\pi}{4}$ **e)** $\frac{11\pi}{6}$

b) $\frac{5\pi}{6}$ **d)** $\frac{5\pi}{4}$ **f)** $\frac{5\pi}{3}$

2) Quel intervalle de longueur 2π contient ces réels ?

9 On considère un cercle trigonométrique.

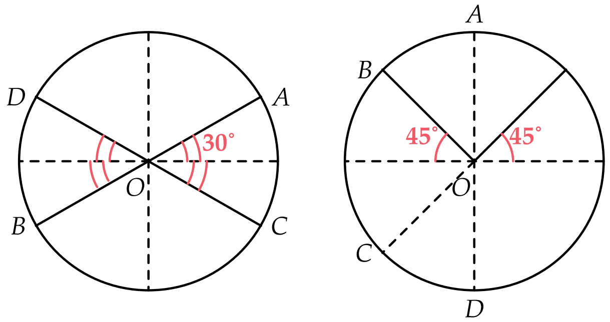
1) Placer les points associés aux réels suivants.

a) $-\frac{\pi}{4}$ **c)** $\frac{\pi}{3}$ **e)** $-\frac{5\pi}{6}$

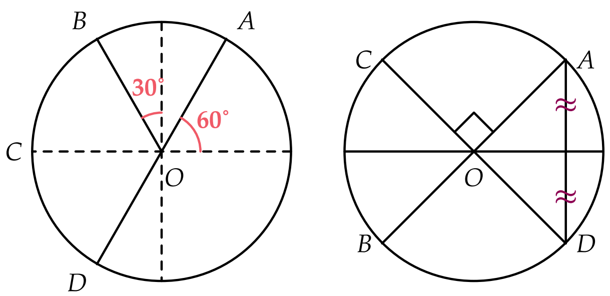
b) $-\frac{3\pi}{4}$ **d)** $-\frac{2\pi}{3}$ **f)** $-\frac{\pi}{6}$

2) Quel intervalle de longueur 2π contient ces réels ?

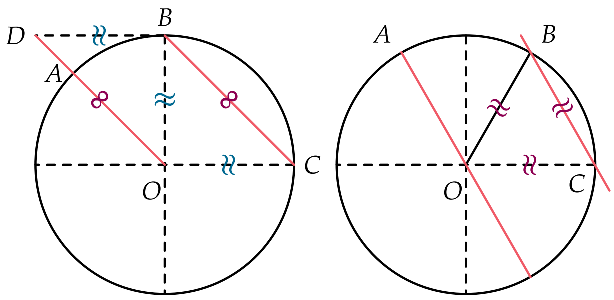
10 Donner un réel associé à chaque point du cercle.



11 Même consigne qu'à l'exercice **10**.



12 Donner un réel associé au point A.

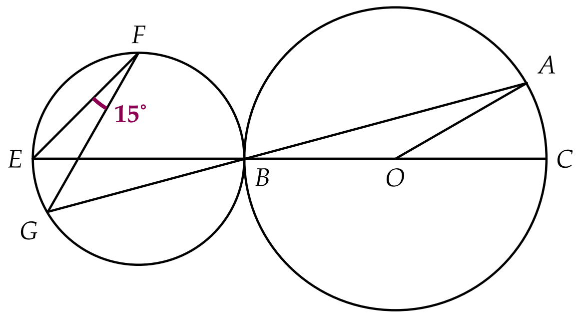


Les droites de la même couleur sont parallèles.

13 Quelle portion de cercle représente un secteur angulaire de 60° ? En déduire la portion représentée par un secteur angulaire de 10°, 15°, 20°.

14 Sur la figure ci-dessous, le cercle $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O et d'origine C.

Quel est le réel associé point A sur ce cercle ?



15 On considère $BDFH$ un carré de centre O et son cercle circonscrit $\mathcal{C}$.

1) Faire un schéma.

2) Tracer la médiatrice de $[BD]$ et la médiatrice de $[DF]$. Elles recoupent le cercle respectivement en C et G et en E et A de telle manière que $ABCDEFGH$ soit un octogone régulier.

3) Déterminer les réels associés aux points A, B, C, D, E, F et G dans les cas où le cercle $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique des repères suivants :

a) repère $(O; A, G)$; **b)** repère $(O; H, B)$.

16 On considère un cercle trigonométrique dans un repère de centre O.

1) Placer le point A associé au réel $\frac{\pi}{6}$.

2) Placer ses symétriques :

a) A_1 par rapport à l'axe des ordonnées ;

b) A_2 par rapport à l'axe des abscisses ;

c) A_3 par rapport au point O.

3) Donner les réels associés aux points A_1, A_2 et A_3

a) compris dans l'intervalle $[0, 2\pi[$;

b) compris dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

17 Même consigne que l'exercice **16** en prenant A associé au réel $\frac{\pi}{3}$.

18 Même consigne que l'exercice **16** en prenant A associé au réel $\frac{\pi}{4}$.

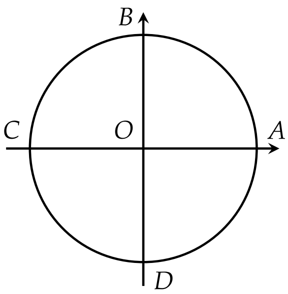
19 On munit le plan d'un repère $(O; I; J)$ et d'un cercle trigonométrique.

1) Placer les points A, B associés aux réels $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$.

2) À la règle et au compas, placer C, D et E associés aux réels suivants :

a) $\pi + \frac{\pi}{3}$ b) $2\pi - \frac{\pi}{6}$ c) $\pi - \frac{\pi}{6}$

20 On considère le cercle trigonométrique ci-dessous dans le repère $(O; A, B)$.



1) Donner les points associés à chacun des réels.

a) 0 d) 3π g) -2π
b) π e) 4π h) -3π
c) 2π f) $-\pi$ i) 56π

2) Soit k un entier relatif. Exprimer, à l'aide de k, tous les nombres pouvant être associés aux points A et C.

3) Donner les points du cercle associés aux réels suivants et préciser la valeur de k.

a) 125π c) $-1\,013\pi$
b) -60π d) 256π

21 À partir de la figure de l'exercice **20**, répondre aux questions suivantes.

1) Donner les points associés à chacun des réels.

a) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{3\pi}{2}$ e) $\frac{7\pi}{2}$
b) $-\frac{\pi}{2}$ d) $-\frac{3\pi}{2}$ f) $-\frac{7\pi}{2}$

2) Soit k un entier relatif. Exprimer, à l'aide de k, tous les nombres pouvant être associés aux points B et D.

3) Donner les points du cercle associés aux réels suivants et préciser la valeur de k.

a) $\frac{73\pi}{2}$ c) $\frac{295\pi}{2}$
b) $-\frac{47\pi}{2}$ d) $-\frac{113\pi}{2}$

Coordonnées d'un point du cercle

22 On considère un cercle trigonométrique de centre O et de rayon OA. A est le point de coordonnées $(1; 0)$.

1) Placer le point E sur ce cercle tel que $\widehat{AOE} = 270°$.

2) Donner ses coordonnées.

3) En déduire $\cos(270°)$.

23 On considère un cercle trigonométrique dans un repère $(O; I, J)$.

1) Placer les points A, B, C et D du cercle tels que :
- $\widehat{IOA} = 150°$;
- $\widehat{IOC} = 135°$;
- $\widehat{IOB} = 300°$;
- $\widehat{IOD} = 300°$.

2) Indiquer un réel associé aux points A, B, C et D.

3) Quelles sont les coordonnées des points ?

24 On considère un cercle trigonométrique dans un repère $(O; I, J)$.

1) Placer les points A et B sur le cercle tels que :
- $\widehat{IOA} = 130°$;
- $\widehat{IOB} = 200°$.

2) Donner une approximation de $\sin 130°$ et $\cos 200°$.

25 À partir d'un schéma d'un cercle trigonométrique partagé en 12 et les valeurs remarquables des sinus et cosinus, compléter le tableau ci-dessous.

α	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos(\alpha)$				
$\sin(\alpha)$				
2α				
$\cos(2\alpha)$				
$\sin(2\alpha)$				

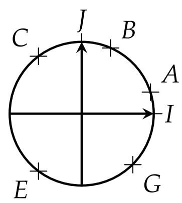
1) Les égalités suivantes sont-elles vérifiées ?

a) $\cos(2\alpha) = 2\cos(\alpha)$; b) $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)$.

2) Comment prévoir les réponses à ces deux questions sans utiliser ce tableau ni cette méthode ?

26 On considère le cercle trigonométrique.
Quel est le signe des nombres suivants ?

1) $\sin \widehat{IOB}$
2) $\cos \widehat{IOC}$
3) $\cos \widehat{IOG}$
4) $\sin \widehat{IOE}$



S'entraîner

27 Donner le signe des nombres suivants.

1) $\cos 75°$	4) $\sin 170°$	7) $\cos 313°$
2) $\sin 25°$	5) $\cos 195°$	8) $\sin 285°$
3) $\cos 115°$	6) $\sin 255°$	9) $\cos 100°$

28 **Valeurs limites**

Quels sont les angles compris entre 0°et 360°qui ont :

1) un cosinus nul ?
2) un cosinus égal à 1 ?
3) un sinus nul ?
4) un sinus égal à 1 ?
5) une tangente nulle ?
6) une tangente égale à 1 ?

29 Donner le signe des nombres suivants.

1) $\cos \frac{\pi}{12}$	4) $\sin \frac{81\pi}{44}$	7) $\cos \frac{17\pi}{26}$
2) $\sin \frac{71\pi}{100}$	5) $\cos \frac{10\pi}{7}$	8) $\sin -\frac{7\pi}{8}$
3) $\cos -\frac{5\pi}{23}$	6) $\sin \frac{\pi}{12}$	9) $\cos \frac{9\pi}{14}$

30 On considère un cercle trigonométrique dans un repère $(O; I, J)$. Un réel x est associé à un point A , d'abscisse 0,6 et d'ordonnée positive.

1) Quelle est son ordonnée ?
2) Calculer $\tan x$.

31 On considère un cercle trigonométrique dans un repère $(O; I, J)$. Un réel x est associé à un point B du cercle d'ordonnée $\frac{3}{4}$ et d'abscisse négative.

1) Quelle est son abscisse ?
2) Calculer $\tan x$.

32 Les nombres x, y et z respectant les conditions ci-dessous existent-ils ?

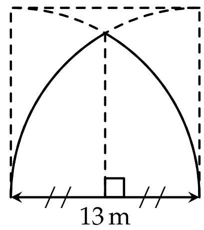
1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x = -\frac{1}{2}$
2) $\cos x = \frac{1}{3}$ et $\tan x = -\frac{2}{3}\sqrt{2}$
3) $\tan x = \frac{3}{4}$ et $\sin x = -\frac{3}{5}$

33 Dans chaque cas, x est un réel différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $\tan x$.

1) $\cos x = \sin x$
2) $\sin x = 4\cos x$
3) $\cos x = \frac{4}{5}\sin x$
4) $\sin x = \frac{\cos x}{2}$

Problèmes

34 Jean Saigne, conservateur à Mathyville, a en charge les monuments historiques. Il souhaite installé un luminaire dans la voûte en ogive de la Cathédrale. Le schéma ci-dessous présente les mesures prises sur place. La voûte est formée par deux arcs de cercle. Calculer :

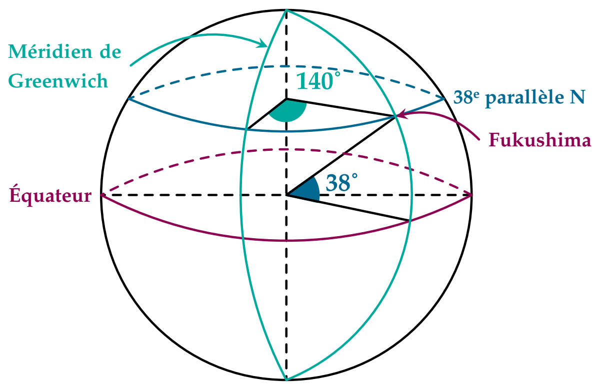


1) la longueur de l'arc de cercle du sol au sommet de la voûte ; (pour la longueur de fils électriques)
2) la hauteur de la voûte.
(pour choisir le bon échafaudage)

35 On considère que le Terre est une sphère de rayon 6 371 km.

Depuis la catastrophe de Fukushima, Jean-Michel s'inquiète du nuage radio-actif et souhaiterait connaitre à quelle distance de la centrale se trouvent deux de ses proches.

La position de Fukushima sont 38°Nord et 140°Est.



Partie A : sur un méridien

Mike, son correspondant australien, habite à Naracoorte : 37°Sud 140°Est.

Quelle est la distance entre Mike et Fukushima ?

Partie B : sur un parallèle

Jean-Michel est d'origine portugaise. Ses grand-parents habitent encore à Beja : 38°Nord 8°Ouest.

1) Calculer le rayon du 38eparallèle Nord.
2) Calculer la distance entre Beja et Fukushima.

36 On considère un cercle trigonométrique.

1) Placer les points suivants :

- $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- $D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

37 Dans un repère $(O;I,J)$, on considère le cercle trigonométrique .

1) Placer les points M et A de coordonnées respectives $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{MOA}$.

3) Placer les points T et H de coordonnées respectives $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4) Quelle est la nature du quadrilatère $MATH$?

38 Calculer les valeurs exactes de :

1) $\sin(173\pi)$ **3)** $\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)$ **5)** $\cos\left(\frac{53\pi}{2}\right)$

2) $\cos(-250\pi)$ **4)** $\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$ **6)** $\sin\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$

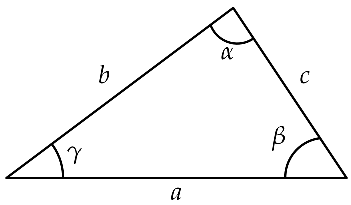
39 **Triangle équilatéral**

Établir la formule donnant l'aire d'un triangle équilatéral en fonction de la longueur de ses côtés.

40 On considère un triangle quelconque non plat.

a, b, c notent les mesures de ses trois côtés.

α, β et γ notent les mesures de des trois angles comme indiqué sur le schéma ci-dessous.



1) Établir la formule $\mathcal{A}=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ qui donne l'aire du triangle en fonction des mesures de deux de ces côtés et de la mesure de l'angle compris entre ces deux côtés.

2) Utiliser cette formule avec les trois angles du triangle et établir une nouvelle formule, *la loi des sinus* :

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

41 En utilisant le cercle trigonométrique et les angles remarquables, déterminer la ou les valeurs exactes de l'angle α qui satisfont les conditions imposées dans chacun des cas ci-dessous :

1) $\sin(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\alpha\in[-\pi;\pi]$

2) $\cos(\alpha)=-\frac{1}{2}$ et $\alpha\in[0;2\pi]$

3) $\sin(\alpha)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\alpha\in[0;4\pi]$

42 Dans chacun des cas suivants, dessiner en rouge sur un cercle trigonométrique l'ensemble de tous les points associés à α lorsque α satisfait aux deux conditions proposées ci-dessous.

Utiliser la représentation graphique pour résoudre l'inéquation proposée dans l'intervalle donné.

1) $\alpha\in[0;2\pi]$ et $\cos(\alpha)\leqslant-\frac{1}{2}$

2) $\alpha\in[-\pi;\pi]$ et $\sin(\alpha)<\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ et $\sin(\alpha)>\frac{\sqrt{2}}{2}$

43 On considère x un réel associé à un angle tel que $\cos x\neq 0$ et $\sin x\neq 0$. Établir les formules trigonométriques suivantes.

1) $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ **2)** $1+\frac{1}{\tan^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x}$

1) $\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x$

2) $(\cos x+\sin x)^2=1+2\cos x\sin x$

3) $(\cos x-\sin x)^2=1-2\cos x\sin x$

44 On considère x un réel associé à un angle aigu tel que $\tan x=\frac{3}{4}$. Quelles sont les valeurs possibles des couples $(\cos x;\sin x)$?

45 La Terre est assimilée à une sphère de rayon 6 371 km. Le mille nautique est une unité de mesure utilisé pour la navigation en mer. Elle correspond à la distance entre deux points de même longitude dont les latitudes diffèrent d'une minute. Calculer la longueur d'un mille marin en km.

> L'appellation internationale est le mille marin. Mais, en français, il a été choisi mille nautique afin de ne pas confondre avec 1 000 marins !

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

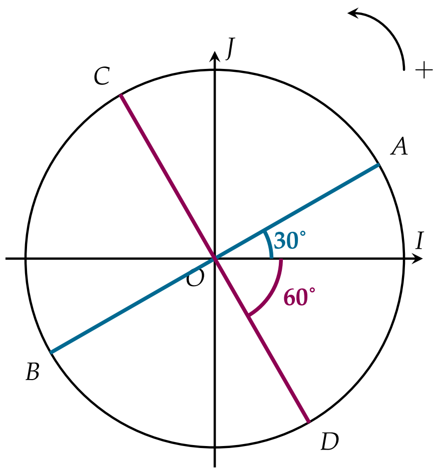
Sur un cercle trigonométrique
- Placer un point à partir du réel associé
- Déterminer les réels associés à un point
- Déterminer le sinus et le cosinus d'un nombre
- Déterminer la tangente d'un nombre
- Utiliser les formules trigonométriques.

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

Voici un cercle trigonométrique dans un repère $(O; I, J)$



46 Les coordonnées de B sont

a $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ c $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

b $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ d $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

47 La mesure de l'angle $\widehat{BOC}$ est

a $60°$ b $90°$ c $30°$

48 Citer le ou les réels associés au point A du cercle trigonométrique.

a $-\frac{4\pi}{6}$ c $-\frac{\pi}{6}$ e $\frac{25\pi}{6}$ g $\frac{\pi}{3}$

b $-\frac{5\pi}{6}$ d $\frac{5\pi}{6}$ f $\frac{17\pi}{6}$ h $\frac{13\pi}{6}$

49 Quel est le point associé au nombre $\frac{5\pi}{3}$?

a A b B c C d D

50 Citer le ou les réels associés au point B du cercle trigonométrique.

a $2\pi - \frac{2\pi}{3}$ d $\pi + \frac{\pi}{6}$ g $2\pi + \frac{2\pi}{3}$

b $\pi + \frac{\pi}{3}$ e $\pi - \frac{\pi}{6}$ h $2\pi + \frac{5\pi}{6}$

c $\pi - \frac{\pi}{3}$ f $2\pi - \frac{5\pi}{6}$

51 Citer le ou les points d'abscisse $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a A b B c C d D

52 Parmi les nombres suivants, lesquels sont solutions de l'équation $\sin x = -\frac{1}{2}$?

a $30°$ c $320°$ e $150°$ g $210°$ i $300°$

b $60°$ d $300°$ f $210°$ h $120°$ j $60°$

53 Parmi les nombres suivants lesquels sont égaux à $\cos(330°)$?

a $\frac{1}{2}$ c $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos(330°)$ g $\sin(60°)$

b $-\frac{1}{2}$ d $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ f $\cos(210°)$ h $\sin(240°)$

Travaux pratiques

TP 1 Sinus et cosinus remarquables

On va démontrer certaines valeurs particulières de sinus et cosinus inscrites dans le cours.
On considère dans tout le T.P. un cercle trigonométrique dans un repère $(O; I, J)$.

1) Quels points du cercle trigonométrique sont associés aux réels 0 et $\dfrac{\pi}{2}$?

En déduire les valeurs de :

a) $\cos 0$ c) $\sin 0$

b) $\cos \dfrac{\pi}{2}$ d) $\sin \dfrac{\pi}{2}$

2) Placer sur le cercle, le point A associé à $\dfrac{\pi}{3}$.

a) Quelle est la nature du triangle OAI ? Justifier.

b) Placer le point D d'ordonnée nulle qui a la même abscisse que A.

Que représente-t-il ? En déduire $\cos \dfrac{\pi}{3}$.

c) Calculer AD. En déduire $\sin \dfrac{\pi}{3}$.

3) Placer sur le cercle le point B associé à $\dfrac{\pi}{4}$.

a) Calculer les mesures des angles $\widehat{IOB}$ et $\widehat{BOJ}$.

b) Que représente (OB) pour l'angle $\widehat{IOJ}$?

c) Que peut-on dire de $\cos \dfrac{\pi}{4}$ et $\sin \dfrac{\pi}{4}$?

En déduire leur valeur.

4) Placer sur le cercle, le point C associé à $\dfrac{\pi}{6}$.

a) Quelle est la nature du triangle OCJ ? Justifier.

b) Placer le point E sur l'axe des ordonnées qui a la même ordonnée que C.

Que représente-t-il ? En déduire $\sin \dfrac{\pi}{6}$.

c) Calculer CE. En déduire $\sin \dfrac{\pi}{6}$.

TP 2 Prendre la tangente

Sur la figure ci-dessous, on a représenté un cercle trigonométrique dans un repère $(O; I, J)$ et la tangente au cercle en I. On choisit un nombre x et on lui associe le point A par enroulement de la droite (IT) sur le cercle. La droite (OA) coupe la tangente en T.
E est le point de l'axe des abscisses qui a la même abscisse que A.

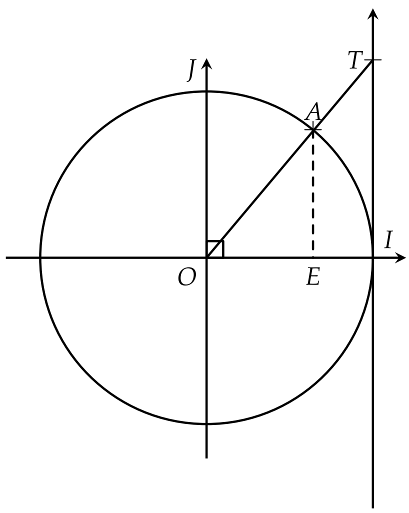
1) Que peut-on dire de T si A est le point associé à $\dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$?

2) Sur la figure, $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exprimer TI en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

3) Les calculs diffèrent-ils si $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right[$?

4) Exprimer, en fonction de x, l'aire des triangles OAE et OTI puis celle du secteur angulaire compris entre le cercle, $[OA]$ et $[OT]$. En déduire que, pour tout x dans l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$.



Travaux pratiques

TP 3 Équations trigonométriques

1 Résolution guidée

On donne, dans chaque cas, le cosinus d'un angle de mesure α radians et une contrainte sur α.

1) $\cos(\alpha) = \frac{2}{5}$ et $\alpha \in [0; \pi]$

2) $\cos(\alpha) = -\frac{3}{10}$ et $\alpha \in [-\pi; 0]$

- Sur un cercle trigonométrique, placer le(s) point(s) pouvant être associés à α.
- Utiliser la calculatrice pour déterminer une mesure d'un angle β ayant même cosinus.
- Sur le même cercle trigonométrique, faire apparaître le point associé à β.
- En déduire α. (Réfléchir avant d'écrire $\alpha = \beta$!)

2 En autonomie

Calculer α en utilisant une méthode analogue à celle de la partie précédente.

1) $\sin(\alpha) = -\frac{1}{5}$ et $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

2) $\sin(\alpha) = -\frac{7}{10}$ et $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

Récréation, énigmes

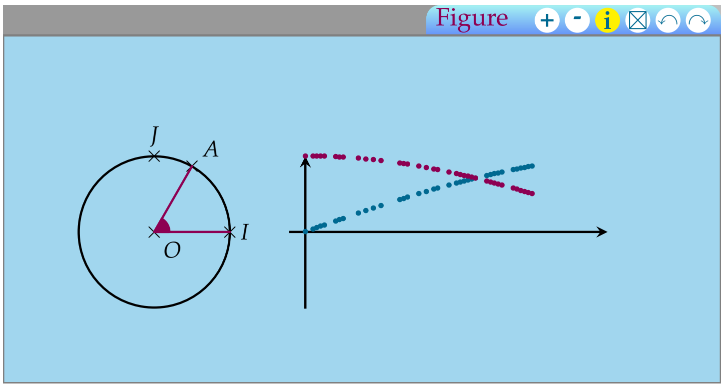
Les fonctions trigonométriques INFO

La relation entre un nombre et les coordonnées du point associé permet de définir trois nouvelles fonctions :

- sinus
- cosinus
- tangente

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

1) tracer un cercle trigonométrique de centre O dans un repère $(O; I, J)$ et placer un point A sur le cercle ;
2) déplacer le point A sur le cercle et faire tracer les deux courbes donnant les coordonnées de A en fonction de la mesure de l'angle $\widehat{IOA}$.



Les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus obtenues s'appellent des **sinusoïdales**.

3) Ces courbes sont-elles complètes ?
4) Quelles semblent être les propriétés géométriques de ces deux courbes représentatives ?
5) Rechercher des cas de la vie quotidienne qui utilisent des fonctions trigonométriques.

SOLUTIONS

Chapitre G1

Repérage sur le cercle et trigonométrie

Auto-évaluation

1

1) 90
2) 270
3) 420
4) 144
5) $\frac{2\pi}{3}$
6) $\frac{\pi}{2}$
7) $\frac{12\pi}{5}$
8) $\frac{7\pi}{3}$

2

1) $\frac{1}{12}$
2) $\frac{1}{8}$
3) $\frac{1}{6}$
4) $\frac{1}{4}$
5) $\frac{1}{2}$
6) $\frac{3}{4}$
7) $\frac{1}{3}$
8) $\frac{4}{3}$

3

1) $\frac{2}{7}$
2) $\frac{4}{5}$
3) $\frac{1}{3}$
4) $\frac{5}{9}$
5) $\frac{3}{8}$
6) $\frac{7}{10}$
7) $\frac{11}{12}$
8) $\frac{3}{10}$

4

1) $2\,014 = 360 \times 5 + 214$
2) $2\,014\pi = 2\pi \times 1\,007 + 0$
3) $12\,345 = 360 \times 34 + 105$
4) $12\,345\pi = 2\pi \times 6\,172 + 1$

5

1) 135°
2) 85°
3) 44°
4) 50°
5) 70°
6) 44°
7) 34°

S'entraîner

1

1) J
2) C
3) B
4) A
5) N
6) R
7) S
8) T

2

1)
a) $\frac{\pi}{6}$
b) $\frac{5\pi}{3}$
c) π
d) $\frac{4\pi}{3}$

2)
a) $\frac{-5\pi}{6}$
b) $-\frac{\pi}{2}$
c) $\frac{5\pi}{6}$
d) 0

3

1) $(0,25;0,95)$
2) $(-0,75;0,8)$
3) $(-0,25;-0,9)$
4) $(0,5;-0,77)$
5) $(0,9;0,25)$
6) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$
7) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
8) $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

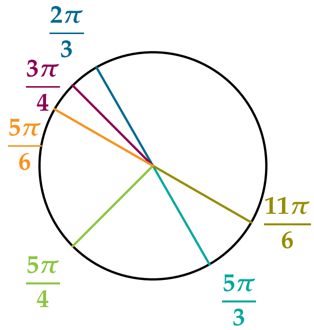
5

1) 45°

2)
a) $A(0)$
b) $O\left(\frac{\pi}{4}\right)$
c) $U\left(\frac{\pi}{2}\right)$
d) $T\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
e) $I(\pi)$
f) $E\left(\frac{5\pi}{4}\right)$
g) $N\left(\frac{3\pi}{2}\right)$
h) $E\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

8

1)



2) $[0;2\pi]$

Auto-évaluation QCM

46 c
47 b
48 e h
49 d
50 d f
51 a
52 c f g
53 c e g