GÉOMÉTRIE

2

Repérage dans le plan

Connaissances du collège nécessaires à ce chapitre

- Soustraire des nombres relatifs
- Utiliser le théorème de Pythagore
- Calculer une distance entre deux points sur un axe
- Calculer avec des racines carrées
- Utiliser les théorèmes des droites des milieux
- Reconnaître un triangle ou un quadrilatère particulier

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

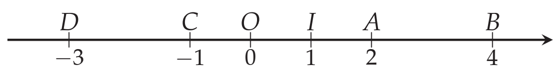
1 Calculer :

1) $(-2)+(+4)$ **3)** $(-7)+(-4)$

2) $(-3)-(-5)$ **4)** $(+6)-(+8)$

2 Voici un axe gradué (OI).

Calculer les distances : AB ; AC ; BD et DC.



3 Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a entier relatif et b entier positif le plus petit possible.

1) $\sqrt{8}$ **4)** $\sqrt{8}+\sqrt{18}$

2) $\sqrt{12}$ **5)** $3\sqrt{75}-2\sqrt{27}$

3) $\sqrt{45}$ **6)** $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

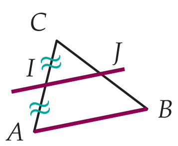
4 EAU est un triangle rectangle en A.

Écrire la relation de Pythagore de ce triangle.

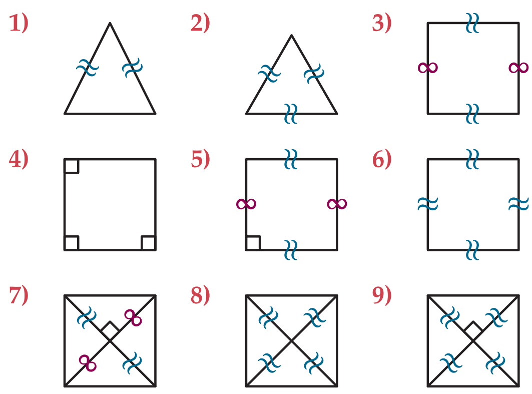
5 VIN est un triangle tel que $EA = 4{,}8$ cm ; $AU = 6{,}4$ cm et $EU = 8{,}1$ cm.

Ce triangle est-il rectangle ?

6 $(IJ)//(AB)$. Quel est le milieu de $[BC]$?



7 D'après le codage, quelle est la nature de chacun des triangles et quadrilatère ci-dessous ?



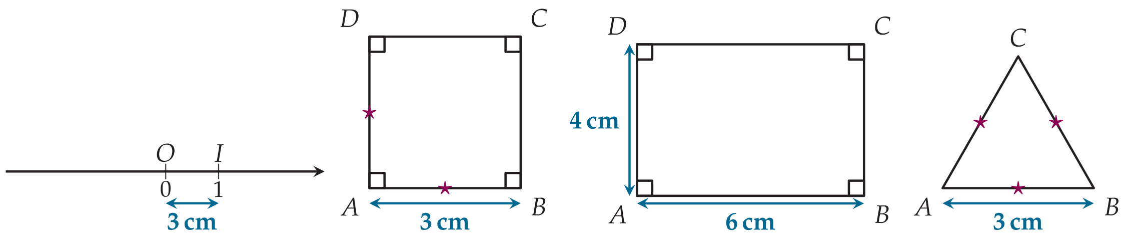
Voir solutions p. 199

Activités d'approche

DÉBAT 1 À la recherche du point perdu

Se mettre par équipe de quatre.

- Reproduire chacun des schémas ci-dessous en vraie grandeur.



- Le professeur viendra placer un point M aléatoirement sur l'un des schémas.
- Décrire avec précision la position du point M afin que les autres groupes de la classe puissent essayer de le placer exactement au même endroit.

L'équipe qui arrivera à faire placer son point M correctement par toutes les autres équipes gagnera deux points, celle qui y arrivera avec le moins d'informations gagnera trois points.

ACTIVITÉ 2 Perdu au milieu

L'objectif de cette activité est de conjecturer puis de prouver la formule donnant les coordonnées du milieu d'un segment à partir des coordonnées des extrémités de ce segment.

Le plan est muni d'un repère $(O; I, J)$.

1) Placer deux points A et B de coordonnées entières.

2) Construire le point M milieu du segment $[AB]$; lire ses coordonnées.
Conjecturer la formule donnant les coordonnées de M à partir de celles des points A et B.

On considère maintenant deux points A et B tels que $y_A < y_B$.

3) Placer le point M, milieu de $[AB]$ et le point C le point de coordonnées $(x_B; y_A)$.

4) Que peut-on dire des droites (AC) et (BC) par rapport aux axes du repère ?

5) Tracer la droite parallèle à (AC) passant par M. Elle coupe $[BC]$ en N.
Que peut-on dire du point N ?

6) En considérant la droite (BC) comme un axe de même unité que l'axe des ordonnées et d'origine son intersection avec l'axe des abscisses, calculer la distance BC.

7) En déduire la distance CN puis l'ordonnée du point N.

8) Refaire le raisonnement dans le cas où $y_A > y_B$.

9) Déterminer l'abscisse du point M.

ACTIVITÉ 3 Tenir la distance

L'objectif de cette activité est de prouver la formule donnant la distance entre deux points à partir des coordonnées de ces deux points.

On considère deux points A et B dans un repère $(O; I, J)$ orthonormé.

1) Placer le point C de coordonnées $(x_B; y_A)$.

2) Exprimer, en fonction des coordonnées des points A, B et C, les distances AC et BC.

3) Que peut-on dire du triangle ABC ? Calculer la distance BC.

1. Coordonnées d'un point dans un repère

Pour repérer un point dans le plan, on définit un repère et on indique les coordonnées de ce point dans le repère.

DÉFINITION

Définir un repère, c'est donner trois points O, I et J non alignés dans un ordre précis.
On note $(O; I, J)$ ce repère.

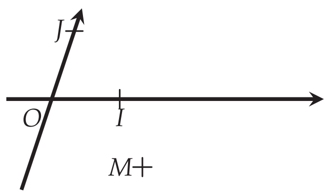
- Le point O est appelé l'**origine du repère**.
- La droite (OI) est l'**axe des abscisses** orienté de O vers I.
  La longueur OI indique l'unité sur cet axe.
- La droite (OJ) est l'**axe des ordonnées** orienté de O vers J.
  La longueur OJ indique l'unité sur cet axe.

MÉTHODE 1 Lire des coordonnées

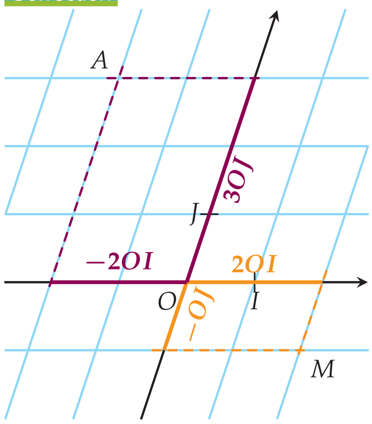
► Ex. 5 p. 190

Exercice d'application

1) Reproduire le repère $(O; I, J)$.
2) Lire les coordonnées du point M.
3) Placer le point A de coordonnées $(-2; 3)$.



Correction



Les coordonnées du point M sont $(2; -1)$.

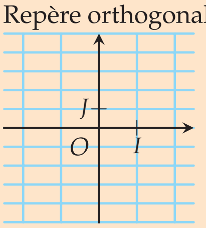
REMARQUE :

- Les coordonnées d'un point sont toujours écrites dans le même ordre :
  l'abscisse en premier et l'ordonnée ensuite.
- Dans tout repère $(O; I, J)$, les coordonnées des points O, I et J sont :
  - $O(0; 0)$
  - $I(1; 0)$
  - $J(0; 1)$

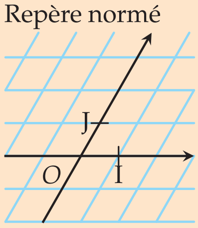
DÉFINITION

- Si le triangle OIJ est rectangle en O, le repère $(O; I, J)$ est dit **orthogonal**.
- Si le triangle OIJ est isocèle en O, le repère $(O; I, J)$ est dit **normé**.
- Si le triangle OIJ est isocèle et rectangle en O, il est dit **orthonormal** ou **orthonormé**.

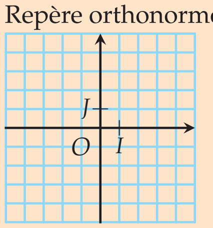
Repère orthogonal



Repère normé



Repère orthonormé



2. Coordonnées du milieu d'un segment

PROPRIÉTÉ

Dans le plan muni d'un repère, on note $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ les coordonnées de A et B.
Les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ sont données par la formule suivante :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

REMARQUE : Cette propriété est valable dans n'importe quel type de repère.

MÉTHODE 2 **Calculer les coordonnées d'un milieu**

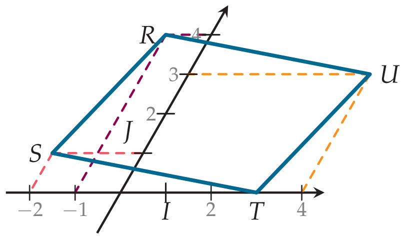
► Ex. 10 p. 191

Exercice d'application Dans un repère $(O; I, J)$, on donne les points de coordonnées suivants :
$R(-1;4)$; $S(-2;1)$; $T(3;0)$ et $U(4;3)$.

1) Placer les points dans le repère $(O; I, J)$.
2) Calculer les coordonnées du milieu du segment $[RT]$ puis du segment $[SU]$. Conclure.

Correction

1)



2) $\dfrac{x_R + x_T}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = 1$ et

$\dfrac{y_R + y_T}{2} = \dfrac{4+0}{2} = 2.$

Donc les coordonnées du milieu du segment $[RT]$ sont $(1;2)$.

$\dfrac{x_S + x_U}{2} = \dfrac{-2+4}{2} = 1$ et

$\dfrac{y_S + y_U}{2} = \dfrac{1+3}{2} = 2.$

Donc les coordonnées du milieu du segment $[SU]$ sont $(1;2)$.

Les coordonnées des deux milieux sont les mêmes donc il s'agit du même point.

Le quadrilatère $RSTU$ a ses diagonales $[RT]$ et $[SU]$ qui se coupent en leur milieu.

Donc $RSTU$ est un parallélogramme.

3. Distance entre deux points

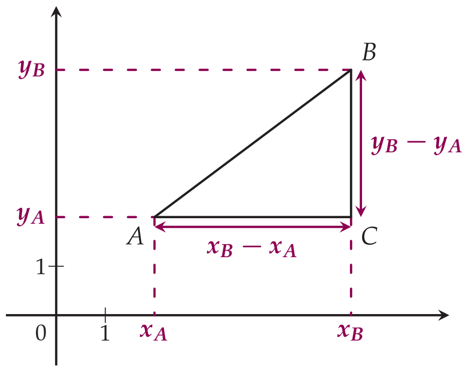
PROPRIÉTÉ

Dans le plan muni d'un repère **orthonormé**, on note $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ les coordonnées des points A et B. La distance entre deux points A et B est donnée par la formule suivante :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

PREUVE *La démonstration qui suit se fait dans le cadre de la figure proposée. Une position différente des points dans le repère induirait d'autres calculs, mais le résultat resterait le même.*

La figure est obtenue en plaçant dans le même repère A, B et C de coordonnées $(x_B; y_A)$.



Le repère étant **orthonormé**, les axes sont perpendiculaires donc le triangle ABC est rectangle en C et on peut utiliser la relation de Pythagore : $AB^2 = AC^2 + CB^2$.
Comme le repère est **orthonormé**, $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$ sont exprimés dans la même unité, donc on peut écrire :
$AB^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_B - y_C)^2$.
Une longueur est toujours positive donc :
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

REMARQUE : La condition d'**orthonormalité** du repère est primordiale pour cette démonstration. Elle est fausse pour tout autre type de repère.

MÉTHODE 3 Calculer une longueur

► Ex. 17 p. 191

Exercice d'application

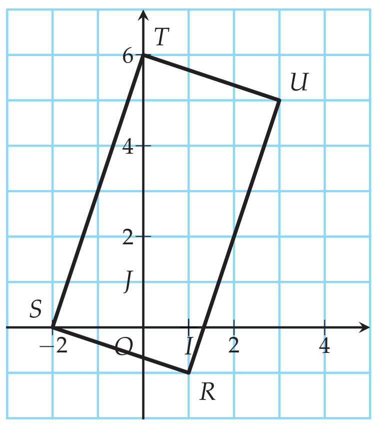
Dans un repère $(O; I, J)$ orthonormal, on donne les points de coordonnées suivantes.

$R(1; -1)$ $S(-2; 0)$ $T(0; 6)$ et $U(3; 5)$

1) Placer les points dans le repère $(O; I, J)$.
2) Conjecturer la nature du quadrilatère $RSTU$.
3) Calculer les longueurs RT et SU. Conclure.

Correction

1)



2) Il semblerait que $RSTU$ soit un rectangle.

3) $RT = \sqrt{(x_T - x_R)^2 + (y_T - y_R)^2}$
$RT = \sqrt{(0-1)^2 + (6-(-1))^2}$
$RT = \sqrt{50}$

$SU = \sqrt{(x_U - x_S)^2 + (y_U - y_S)^2}$
$SU = \sqrt{(3-(-2))^2 + (5-0)^2}$
$SU = \sqrt{50}$

Or :
« *Si un quadrilatère a ses diagonales de même longueur qui se coupent en leur milieu alors c'est un rectangle* ».
$[RT]$ et $[SU]$ sont les diagonales de $RSTU$ avec $RT = SU$. Il reste à vérifier qu'elles se coupent en leur milieu.

$\frac{x_R + x_T}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$ et

$\frac{y_R + y_T}{2} = \frac{-1+6}{2} = \frac{5}{2}$;

$\frac{x_S + x_U}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$ et

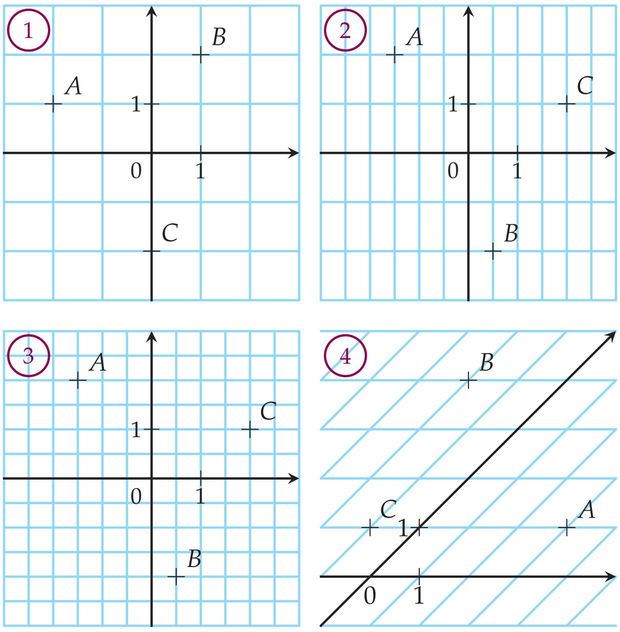
$\frac{y_S + y_U}{2} = \frac{0+5}{2} = \frac{5}{2}$.

Les coordonnées des deux milieux sont les mêmes donc il s'agit du même point.
Donc $RSTU$ est un rectangle.

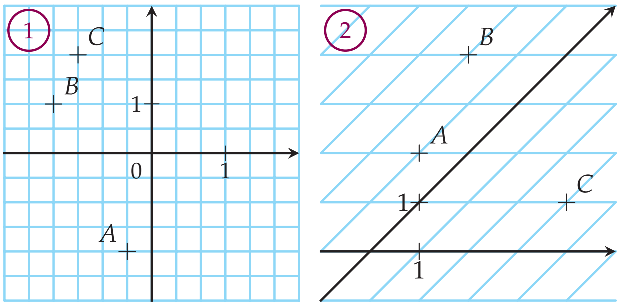
S'entraîner

Activités mentales

1 Sur chacune des figures ci-dessous, lire les coordonnées des points A, B et C.



2 Sur chacune des figures ci-dessous, donner le nom du point de coordonnées $(-1; 2)$.



3 À partir de la figure ① de l'exercice **1** :

1) donner la valeur exacte de la longueur AB ;

2) calculer les coordonnées du

 a) milieu du segment $[BC]$;

 b) symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses ;

 c) symétrique de B par rapport à C.

4 On munit le plan d'un repère orthonormé.
Les points A et B ont pour coordonnées respectives $(5; -1)$ et $(-2; 1)$. Déterminer :

1) la valeur exacte de la longueur du segment $[AB]$;

2) les coordonnées du milieu du segment $[AB]$.

Coordonnées d'un point

5 ► MÉTHODE 1 p. 187
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$ d'unité 1 cm.

1) Placer les points A et B de coordonnées respectives $(2; -1)$ et $(-6; -1)$.

2) Construire un point C tel que ABC soit un triangle isocèle en C et de hauteur 4 cm.

3) Lire les coordonnées du point C.

4) Construire le symétrique de C par rapport à (AB).

5) Lire ses coordonnées.

6 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$ d'unité 1 cm.

1) Placer les points D et E de coordonnées respectives $(4; -3)$ et $(-2; 3)$.

2) Construire un point F tel que EDF soit équilatéral.

3) Lire les coordonnées du point F.

4) Construire le symétrique de E par rapport à F.

5) Lire ses coordonnées.

7 Le plan est muni d'un repère $(O; I, J)$.

1) Placer les points F, N et E de coordonnées respectives $(2,1; -3,4)$, $(-1,8; 5,5)$ et $(4,9; -1,9)$.

2) Construire le point A tel que le quadrilatère $FANE$ soit un parallélogramme.

3) Lire les coordonnées du point A.

8 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$.

1) Placer le point S de coordonnées $(2; 1)$.

2) Construire le point T d'abscisse négative tel que SOT soit rectangle en O et que $OT = 2OS$.

3) Lire les coordonnées du point T.

4) Construire E tel que $TOSE$ soit un rectangle.

5) Lire les coordonnées du point E.

6) Construire le losange $TUCS$ de centre O.

7) Lire les coordonnées des points U et C.

9 On considère un parallélogramme $ADCB$ de centre O. Le point E est le milieu du segment $[AD]$, le point F est le milieu du segment $[CD]$ et le point G est le symétrique du point A par rapport au point F.
Lire les coordonnées des points A, B, C, D, E, F et G dans les repère suivants :

1) $(A; B, D)$ **2)** $(O; E, F)$ **3)** $(O; E, B)$

Coordonnées d'un milieu

10 ► MÉTHODE 2 p. 188

Dans le plan muni d'un repère $(O; I, J)$, placer les points A et B de coordonnées respectives $(-2,6; 4,7)$ et $(6,3; -5,9)$ et déterminer les coordonnées du milieu du segment $[AB]$.

11 Dans le plan muni d'un repère $(O; I, J)$, on a placé les points A, B et C de coordonnées respectives
$\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{5}\right)$, $\left(\frac{4}{6}; \frac{1}{4}\right)$ et $\left(\sqrt{5}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
Déterminer les coordonnées des points D, E et F, milieux respectifs de $[AB]$,$[BC]$ et $[AC]$.

12 Dans le plan muni d'un repère $(O; I, J)$, on a placé les points C et D de coordonnées respectives $(34\,582; -43\,590)$ et $(10\,991; 59\,267)$.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection du segment $[CD]$ avec sa médiatrice.

13 Dans le plan muni d'un repère $(O; I, J)$, on a placé les points A et M de coordonnées respectives
$(3; -2)$ et $(0; 3)$.

Déterminer les coordonnées du point B tel que M soit le milieu du segment $[AB]$.

14 Dans le plan muni d'un repère $(O; I, J)$, on a placé les points E et F de coordonnées respectives $(-6,9; -3,3)$ et $(0; -4,6)$.

Déterminer les coordonnées du point symétrique de E par rapport au point F.

15 Dans le plan muni d'un repère $(O; I, J)$, on a placé les points B, A et N de coordonnées respectives
$\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{4}{5}; \frac{7}{3}\right)$ et $\left(-\frac{5}{6}; \frac{2}{3}\right)$.

1) Calculer les coordonnées du milieu de $[BN]$.
2) Calculer les coordonnées du point C tel que $BANC$ soit un parallélogramme.

16 On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. On construit un triangle PAT dont les sommets ont pour coordonnées respectives $(-2; 4)$, $(0; -1)$ et $(5; -2)$. Le point E est le milieu du segment $[AT]$.
La parallèle à (TP) passant par E coupe (PA) en F.

Quelles sont les coordonnées de F ?

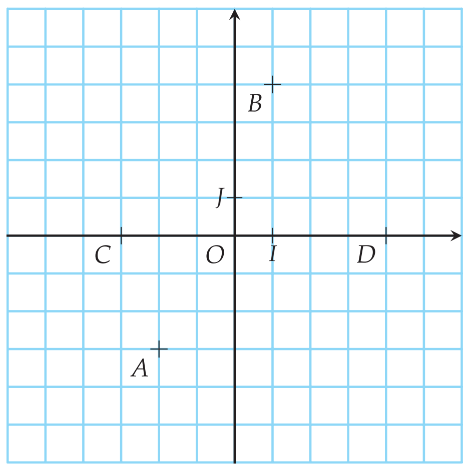
Distance entre deux points

17 ► MÉTHODE 3 p. 189

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$ tel que $OI = 1$ cm, on a placé les points A et B de coordonnées respectives $(-2; 5)$ et $(3; 4)$.
Calculer la distance AB.
Donner un arrondi au millimètre.

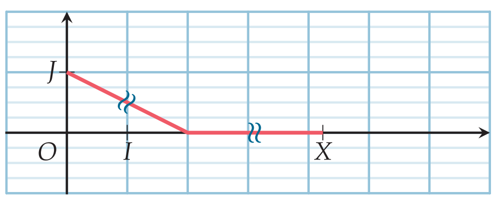
18 On considère un repère orthonormé $(O; I, J)$ tel que $OI = 1$ cm. On a placé les points C et D de coordonnées respectives $(-6,4; 2,3)$ et $(1,3; -4,5)$.
Calculer la distance CD au millimètre près.

19 On considère le plan muni d'un repère $(O; I, J)$.



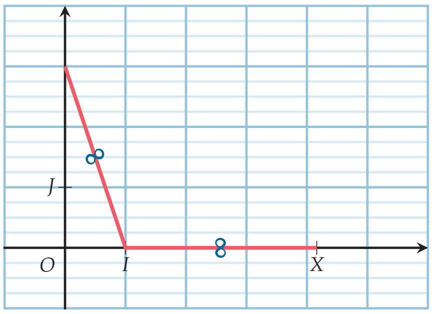
1) Déterminer graphiquement les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère $(O; I, J)$.
2) Placer le symétrique E du point B par rapport à J. Déterminer graphiquement ses coordonnées.
3) Calculer les coordonnées des milieux F de $[AB]$ et G de $[AC]$.
4) Calculer les distances AC, CE et AE.
5) Quelle est la nature du triangle ACE ? Le démontrer.

20 À partir des informations de la figure ci-dessous calculer les coordonnées du point X.



S'entraîner

21 Même consigne qu'au **20**



22 On considère le plan muni d'un repère $(O; I, J)$.

1) Le point $A(2;3)$ appartient-il au cercle de centre $C(5;7)$ et de rayon 5 ?

2) Le point $B(13;1)$ est-il sur la médiatrice de $[OJ]$?

3) Quelle est la nature du triangle ABC ?

4) Soit $D(4;-1)$. Quelle est la nature du triangle JAD ?

23 On considère, dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, les points suivants :

- $A\left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{6}\right)$
- $B\left(2; \frac{1}{3}\right)$
- $C\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right)$

1) Calculer le périmètre du triangle ABC.

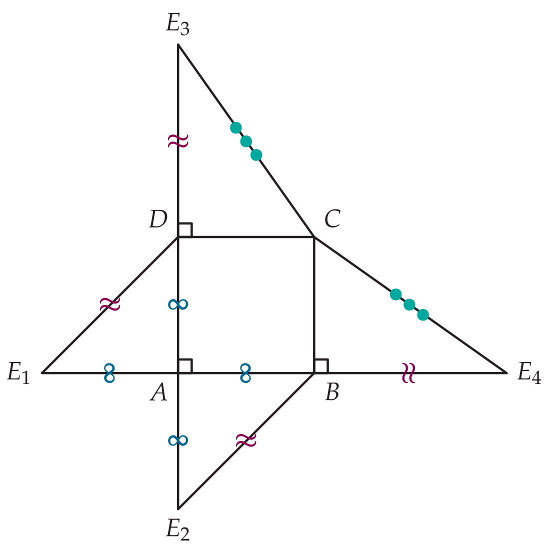
2) Calculer les coordonnées des points A', B' et C', milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

3) En déduire le périmètre du triangle $A'B'C'$.

24 Voici le patron d'une pyramide $EABCD$ dans un repère orthonormé $(A; B, D)$.

Déterminer les coordonnées de chacun des points :

- E_1
- E_2
- E_3
- E_4



Problèmes

25 **Rectangle et triangle rectangle**

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; I, J)$.

On place les points suivants :

- $T(-2,2; 1,2)$
- $A(-1,2; 3,6)$
- $C(6; 0,6)$

1) Calculer les valeurs exactes des longueurs des trois côtés du triangle TAC.

2) Démontrer que le triangle TAC est rectangle.

3) On appelle K le milieu de $[TC]$. Calculer les coordonnées de K.

4) Quelles sont les coordonnées du point E tel que $ECAT$ soit un rectangle ?

26 **Nature du triangle**

Dans un plan muni d'un repère $(O; I, J)$, on considère les points M, E et R de coordonnées respectives :

- $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$
- $\left(0; -\frac{2}{3}\right)$
- $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$

1) Faire une figure.

2) Calculer les longueurs des trois côtés de MER.

3) Quelle est la nature de ce triangle ?

27 **Carré et triangle isocèle**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, on a placé les points suivants :

- $S(-3,2; 3,2)$
- $A(8; 1,6)$
- $W(3,2; 8)$
- $P(1,6; -3,2)$

1) Calculer les longueurs des trois côtés de SWA.

2) Montrer que le triangle SWA est isocèle rectangle.

3) Calculer les coordonnées des milieux des segments $[SA]$ et $[WP]$.

4) Montrer que $SWAP$ est un carré.

28 **Médiatrice**

Dans le repère orthonormé $(O; I, J)$ d'unité 1 cm, on considère les points suivants :

- $A(6; 0)$
- $B(0; 4)$
- $C(1; -1)$

1) Faire une figure.

2) Prouver que le triangle ABC est rectangle.

3) On appelle K le milieu du segment $[AB]$.

a) Calculer les coordonnées de K.

b) Prouver que K appartient à la médiatrice de $[OC]$.

29 Dans un plan muni d'un repère $(O; I, J)$, on place les points suivants :

- $N(-1,6; -0,8)$
- $E(-4; 2,4)$
- $Z(2,4; 7,2)$

1) Faire une figure.
2) Calculer les longueurs des côtés du triangle NEZ.
3) Démontrer que le triangle NEZ est rectangle.
4) Calculer les coordonnées du milieu K de $[NZ]$.
5) A est le symétrique de E par rapport à K.
  a) Placer le point A.
  b) Démontrer que $NAZE$ est un rectangle.
  c) Calculer l'aire du rectangle $NAZE$.
  d) Calculer l'aire du triangle NEZ.
6) La droite perpendiculaire à (NZ) passant par le point E coupe (NZ) en M et (AN) en U.
  a) Compléter la figure.
  b) Utiliser l'aire du triangle NEZ pour calculer EM.
  c) Calculer NM.
  d) En déduire MZ.

30 Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, on place les points suivants :

- $P(-1,5; 2)$
- $T(3,5; 2)$
- $L(2,5; 4)$

1) Faire une figure à compléter au fur et à mesure.
2) **a)** Tracer le cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[TP]$.
  b) Quelles sont les coordonnées de A, son centre ?
  c) Calculer la mesure r de son rayon.
3) **a)** Démontrer que le cercle $(\mathcal{C})$ passe par L.
  b) En déduire la nature du triangle PLT.
  c) Montrer que le cercle $(\mathcal{C})$ ne passe pas par O.
4) **a)** Calculer les coordonnées du milieu de $[OL]$.
  b) En déduire les coordonnées du point U tel que $POUL$ soit un parallélogramme.
  c) Placer le point U.
  d) Les points P, T et U sont-ils alignés ? Justifier.
5) **a)** Placer le point S tel que LAS soit un triangle rectangle isocèle et que S soit situé sous le segment $[LP]$.
  b) Lire les coordonnées du point S.
  c) Le point S appartient-il au cercle $(\mathcal{C})$?
6) **a)** Placer E, symétrique de L par rapport au point A.
  b) Quelle est la nature de $PLTE$?
  c) Calculer les coordonnées du point E.
  d) Le point E appartient-il à l'un des axes du repère ?
  e) Démontrer que le triangle EAT est isocèle.

31 Droite

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, on a placé le point A de coordonnées $(4; -2)$.
Quelle est l'ordonnée du point B de la droite (OA) qui a pour abscisse -3 ?

32 Théorème de Varignon

Soit quatre points du plan A, B, C et D.
I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$ du quadrilatère $ABCD$.

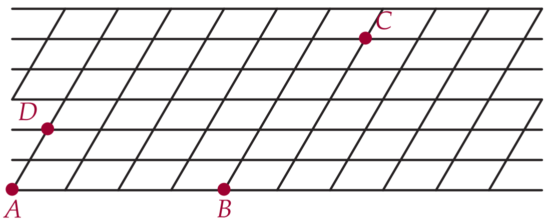
Partie A : conjecture

Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique.
1) Faire une figure.
2) Déplacer les points A, B, C ou D.
  Que peut-on conjecturer ?

Pour la démontrer, on choisit de définir un repère et d'exprimer les coordonnées des points dans ce repère.

Partie B : un cas particulier

Soit le repère $(A; B, D)$. Dans cette partie, les points sont disposés comme sur la figure ci-dessous, aux nœuds du réseau.



1) Donner les coordonnées des points A, B, C et D.
2) Calculer les coordonnées des milieux I, J, K et L.
3) Démontrer la conjecture de la partie précédente dans ce cas particulier.

Partie C : cas général

Soit le repère $(A; B, D)$ et on note $(a; b)$ les coordonnées du point C dans ce repère.
1) Calculer les coordonnées des milieux I, J, K et L en fonction de a et b.
2) Démontrer la conjecture.

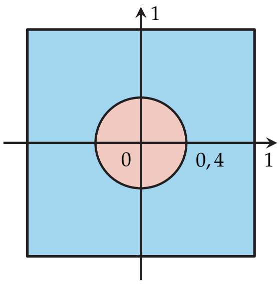
Partie D : sans coordonnées

Comment pouvait-on démontrer ce théorème sans utiliser les coordonnées ?

Approfondir

33 Jeu de fléchettes aléatoires ALGO

Un jeu de hasard consiste à jeter des fléchettes au hasard sur une cible (modélisée ci-dessous). Toucher le disque du centre rapporte 50 points, toucher le reste de la cible rapporte 20 points et on ne rate pas la cible ;-).



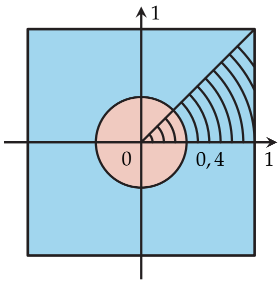
1) Un lancer de fléchette est simulé par l'algorithme :

```
Liste des variables utilisées
   x,y : réel
Traitements
   Donner à x la valeur de alea()
   Donner à y la valeur de alea()
   Si ··· Alors
      Afficher ("Vous avez gagné 50 pts")
   Sinon
      Afficher ("Vous avez gagné 20 pts")
   Fin Si
```

a) À quoi correspondent les variables x et y ?

b) Compléter l'algorithme pour que celui-ci donne le bon affichage suivant le lancer.

2) On modifie la cible. Si la fléchette se plante dans la zone hachurée (un huitième du carré), alors le joueur a un bonus de 20 points.
Compléter l'algorithme pour qu'il affiche le nombre de points obtenus.



34 Triangles équilatéraux

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, on considère les points A et B de coordonnées respectives $(2; 0)$ et $(5; 0)$.

1) On appelle C le point d'ordonnée positive tel que ABC soit un triangle équilatéral.
Déterminer les coordonnées du point C.

2) Soit G le centre de gravité du triangle ABC.
Déterminer les coordonnées du point G.

3) Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

a) Calculer les coordonnées des points I, J et K.

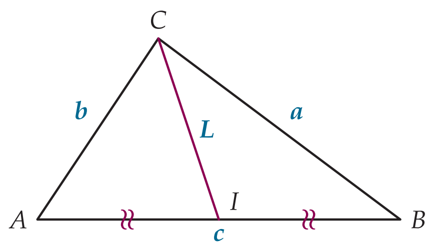
b) Démontrer que le triangle IJK est équilatéral.

c) Démontrer que le point G est le centre de gravité de IJK.

35 Médiane

Dans un vieux livre, Mongi trouve la formule donnant la longueur des médianes d'un triangle en fonction des longueurs de ces trois côtés.

$$L^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$$



Mongi est curieux de la preuve de cette formule.
On se place dans un repère orthonormé d'origine A où (AB) est l'axe des abscisses.

1) Quelles sont les coordonnées de A et de B ?

2) Quelles sont les coordonnées du milieu I de $[AB]$?

3) On note $(x_C; y_C)$, les coordonnées du point C.
Vérifier que :

$$L^2 = IC^2 = x_C^2 + y_C^2 - cx_C + \frac{c^2}{4}$$

4) Calculer a^2 et b^2 en fonction de x_C, y_C et de c.
Donner les résultats sous forme développée.

5) Établir la formule du livre de Mongi.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Dans un plan muni d'un repère :
- lire les coordonnées d'un point
- placer des points

À partir des coordonnées de points :
- calculer les coordonnées du milieu d'un segment
- calculer la distance entre deux points
- résoudre des problèmes géométriques

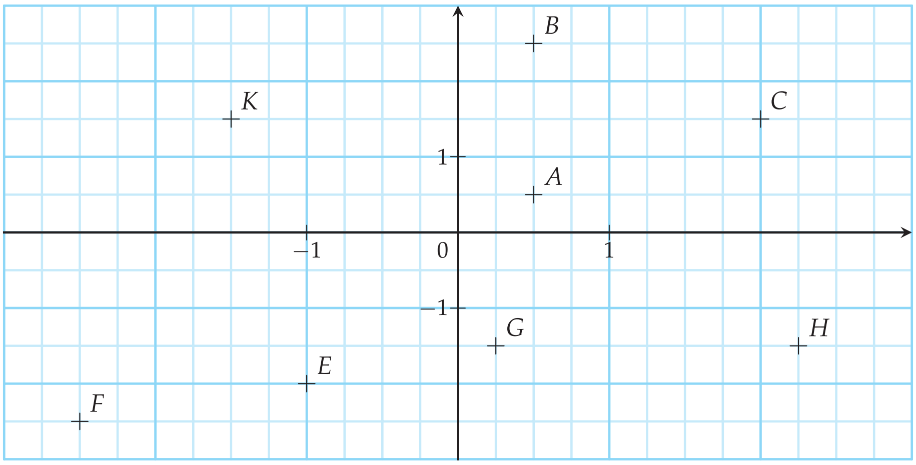
Reconnaître :
- un repère orthogonal
- un repère normé
- un repère orthonormal ou orthonormé
- les figures géométriques usuelles

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net @

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

Pour les questions 36 à 39 : on considère les points dans le repère suivant.



36 Citer le (ou les) point(s) d'abscisse 0,5.

a) G b) B c) A d) F

37 Citer le (ou les) point(s) d'ordonnée $-1,5$.

a) G b) C c) K d) H

38 Citer le (ou les) point(s) dont l'abscisse et l'ordonnée sont identiques.

a) E b) F c) K d) A

39 Quelles sont les coordonnées du point G ?

a) $(1; -3)$
b) $(0,25; -0,75)$
c) $(0,25; -1,5)$
d) $(0,5; -1,5)$

$ABCD$ est un losange de centre I et J est le milieu de $[AB]$.

40 Citer le (ou les) repère(s) orthogonal(aux).

ⓐ $(I; A, B)$ ⓒ $(I; D, B)$ ⓔ $(J; I, A)$

ⓑ $(A; B, D)$ ⓓ $(I; D, C)$ ⓕ aucun de ces repères

41 Citer le (ou les) repère(s) orthonormal(aux).

ⓐ $(I; A, B)$ ⓒ $(I; D, B)$ ⓔ $(J; I, A)$

ⓑ $(A; B, D)$ ⓓ $(I; D, C)$ ⓕ aucun de ces repères

$ABCD$ est un carré de centre I et J est le milieu de $[AB]$.

42 Citer le (ou les) repère(s) orthogonal(aux).

ⓐ $(I; B, D)$ ⓑ $(I; A, B)$ ⓒ $(J; A, I)$ ⓓ $(A; J, D)$

43 Citer le (ou les) repère(s) orthonormal(aux).

ⓐ $(I; B, D)$ ⓑ $(I; A, B)$ ⓒ $(J; A, I)$ ⓓ $(A; J, D)$

Pour les questions **45** à **49**, on considère les points de coordonnées suivants :

$A(2; 4)$ $B(-2; 5)$ $C(7; -6)$ $D(-2; -3)$

44 Quelles sont les coordonnées du milieu du segment $[BC]$?

ⓐ $(-1; -1)$ ⓑ $(2,5; -0,5)$ ⓒ $(2,5; -5,5)$ ⓓ $(5,5; -0,5)$

45 Quelles sont les coordonnées du milieu du segment $[AD]$?

ⓐ $(-2; -3,5)$ ⓑ $(0; -0,5)$ ⓒ $(2; 3,5)$ ⓓ $(0; 0,5)$

46 Citer le (ou les) point(s) appartenant à l'axe des ordonnées.

ⓐ le milieu de $[AB]$ ⓑ le milieu de $[BD]$ ⓒ le milieu de $[AC]$ ⓓ le milieu de $[AD]$

47 Quelle est la longueur du segment $[AC]$?

ⓐ $\sqrt{73}$ ⓑ $\sqrt{29}$ ⓒ $\sqrt{85}$ ⓓ $\sqrt{125}$

48 Quel segment a pour longueur 8 ?

ⓐ $[AC]$ ⓑ $[BC]$ ⓒ $[DC]$ ⓓ $[BD]$

49 Quelles sont les coordonnées du point F tel que A soit le milieu de $[BF]$?

ⓐ $(-6; -3)$ ⓑ $(3; 2)$ ⓒ $(3; 6)$ ⓓ $(6; 3)$

TP 1 Cercle et tangente

INFO

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(2;1)$, $B(6;3)$ et $C(4;7)$.

1) Faire une figure et la compléter au fur et à mesure.

2) Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AC]$.

3) On appelle D le symétrique de B par rapport à I. Déterminer les coordonnées de D.

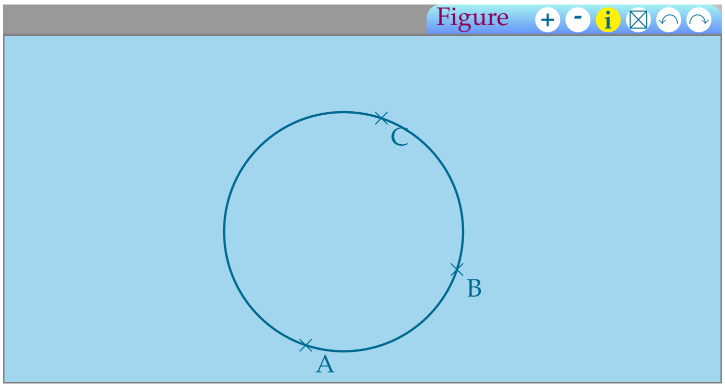
4) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

5) En déduire que le point B appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AC]$.

6) On veut déterminer M, point de l'axe des abscisses tel que (MB) soit tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

a) Faire une figure avec d'un logiciel de géométrie dynamique.

b) Conjecturer la position du point M.



c) On appelle x l'abscisse du point M.
Démontrer que (BM) est une tangente au cercle $(\mathcal{C})$
si et seulement si x est solution de l'équation $10 + (6 - x)^2 + 9 = (3 - x)^2 + 16$.

d) Résoudre l'équation précédente. Conclure.

TP 2 Effet des transformations sur les coordonnées

1 Avec le repère

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; I, J)$.

1) Placer un point A dans ce repère.

2) Construire les points :

- B symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses ;
- C symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées ;
- D symétrique de A par rapport à l'origine.

3) Lire les coordonnées des points B, C et D.

4) Comment obtenir leurs coordonnées à partir de celles du point A ? Le démontrer.

2 Désaxé

Faire le même raisonnement pour :

1) une symétrie centrale par rapport à un point autre que l'origine ;

2) une symétrie axiale par rapport à une droite parallèle à l'un des deux axes.

TP 3 Dans la peau d'un programmeur

ALGO

Vous êtes programmeur pour un concepteur de logiciel de géométrie dynamique.
La capture d'écran du TP.1 présente le logiciel sur lequel vous travaillez.
Votre mission : gérer l'affichage du milieu d'un point dans la fenêtre **Figure**.

1) Proposer un algorithme, qui à partir des coordonnées des points A et B, affiche une croix aux coordonnées du milieu et affiche un lettre à gauche sous la croix.

2) L'utilisateur pouvant faire bouger A et B comme il le souhaite, l'affichage de la lettre nommant le milieu peut dépasser du cadre alors que la croix est toujours à l'intérieur.
À partir des coordonnées du coin en haut à droite du cadre (L'origine des coordonnées est le coin en bas à gauche.) et de la longueur et la largeur de la lettre (dépendant tous du Zoom demandé par l'utilisateur), proposer une modification de l'algorithme précédent, qui :

a) vérifiera qu'il y a la place d'afficher la lettre ;

b) si besoin, changera la position de la lettre. *Les autres possibilités sont : dessous au centre, dessous à gauche, à gauche, dessus à gauche, dessus au centre, dessus à droite, à droite.*

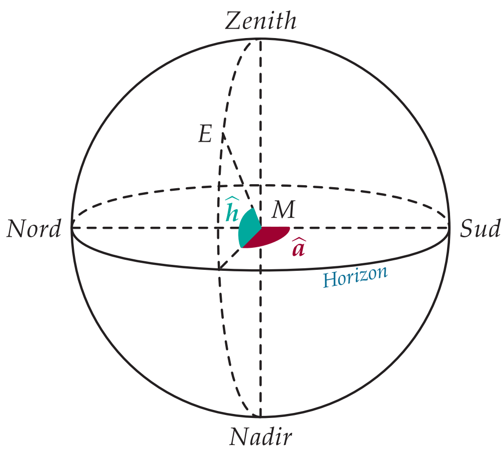
Récréation, énigmes

Un drôle de repère : la sphère céleste

Le repérage dans le plan n'est guère utile aux navigateurs qui, eux, voyagent sur le globe terrestre.
Aux XVII^e et XVIII^e siècles, tous les bateaux anglais, militaires et commerciaux, étaient équipés d'un sextant servant à mesurer la position du soleil et des étoiles en mer.
Suivant le schéma ci-contre, le marin, se trouvant sur un point M de la Terre, se place face à un astre de référence.
Il mesurait :

- l'**azimut**, $\widehat{a}$: l'angle entre l'étoile E et le Sud.
- la **hauteur**, $\widehat{h}$: l'angle entre l'étoile E et l'horizon.

Pour connaître sa position, le marin comparait ensuite ses relevés avec les éphémérides donnant la position dans le ciel, au dessus de l'Observatoire Royal de Greenwich, du soleil (pour la navigation de jour) et des étoiles (pour la navigation de nuit) en fonction de l'heure.
L'horloge du bateau devait être mise à l'heure avec une grande précision avant de partir. Il suffisait de passer devant l'Observatoire de Greenwich. Tous les jours, une boule horaire donne l'heure précise à 12 h (en hiver) ou 13 h (en été). Elle monte à demi-mat 10 min avant l'heure, puis en haut du mat à 5 min avant l'heure, puis tombe à l'heure pile.



SOLUTIONS

Chapitre G2
Repérage dans le plan

Auto-évaluation

1 1) $(+2)$; 2) $(+2)$; 3) (-11) ; 4) (-2) ;

2
- $AB = 2$
- $AC = 3$
- $BD = 7$
- $DC = 2$

3 1) $2\sqrt{2}$ 2) $2\sqrt{3}$ 3) $3\sqrt{5}$ 4) $5\sqrt{2}$ 5) $9\sqrt{3}$ 6) 2

4 $EU^2 = EA^2 + AU^2$

5 non

6 J

7 1) isocèle
2) équilatéral
3) parallélogramme
4) rectangle
5) rectangle
6) losange
7) losange
8) rectangle
9) carré

S'entraîner

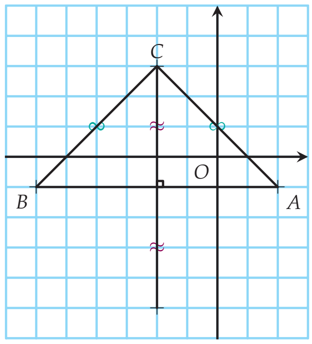
1 1) $A(-2;1)$; $B(1;2)$; $C(0;-2)$
2) $A(-1,5;2)$; $B(0,5;-2)$; $C(2;1)$
3) $A\,(-1;2)$; $B\,(-0,5;--2)$; $C\,(2;-1)$
4) $A(3;1)$; $B(-2;4)$; $C(-1;1)$

2 1) C 2) A

3 1) $\sqrt{10}$
2)
a) $(0,5;0)$
b) $(-2;-1)$
c) $(-1;-6)$

4 1) $\sqrt{53}$ 2) $(1,5;0)$

5
- $C(-2;3)$
- $C'(-2;-5)$



10 $(1,85;-0,6)$

17 $\sqrt{26} \approx 5,1$

Auto-évaluation QCM

36	b c	37	a d
38	f d	39	c
40	a d	41	f
42	b c d	43	b c
44	b	45	d
46	a d	47	d
48	d	49	d