GÉOMÉTRIE

1

Espace

Connaissances du collège nécessaires à ce chapitre

- ▶ Connaître les formules d'aires des figures usuelles
- ▶ Connaître les formules de volumes des solides usuels
- ▶ Se repérer dans une figure en perspective cavalière
- ▶ Construire un patron d'un solide usuel

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net @

1 Calculer l'aire :

1) d'un triangle équilatéral de côté 4 cm ;

2) d'un triangle rectangle de côté 3 cm, 4 cm et 5 cm ;

3) d'un disque de diamètre 6 cm ;

4) d'une sphère de diamètre 6 cm.

2 Calculer le volume :

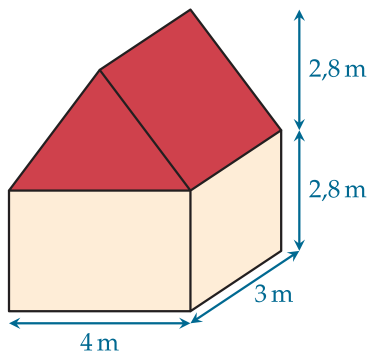
1) d'un prisme
- de hauteur 6 cm ;
- de base un triangle équilatéral de côté 4 cm.

2) d'un cylindre
- de hauteur 4 cm ;
- de rayon de base 3 cm.

3) d'une pyramide à base carrée
- de côté 3 cm ;
- de hauteur 4 cm.

4) d'une boule de diamètre 6 cm.

3 Voici la représentation en perspective cavalière d'un abri de jardin.



1) Construire le patron d'une maquette de cet abri au 1/100.

2) Calculer son volume.

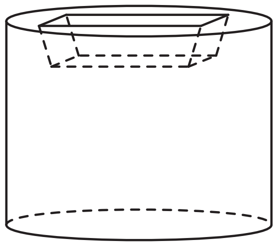
Voir solutions p. 185

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 À la manière de Gaudí

De retour d'un voyage à Barcelone, Jeanine, enthousiasmée par les réalisations de Gaudí, demande à son mari de construire une fontaine recouverte de mosaïque au milieu de leur patio.

Elle lui fournit le schéma ci-contre.
La fontaine sera un cylindre dont le diamètre de la base mesure 75 cm et de hauteur 80 cm. Le bassin creusé à l'intérieur est un tronc de pyramide à base carrée de côté 50 cm et de hauteur 20 cm. Le fond du bassin, qui accueillera le siphon, est un carré de côté 10 cm.



1) Calculer le volume d'eau que peut contenir le bassin. Arrondir au litre près.
2) Calculer le volume de béton nécessaire à la construction de la fontaine. Arrondir au m^3 près.
3) Calculer l'aire de la surface de mosaïque nécessaire pour recouvrir la partie verticale de l'extérieur de la fontaine.

DÉBAT 2 Balayage

INFO

Partie 1 : Au sol

Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique et faire la figure suivante.

1) placer trois points A, B, C non alignés ;
2) tracer la droite (BC) ;
3) placer un point D sur la droite (BC) ;
4) tracer la droite (AD) et activer sa trace ;
5) déplacer le point D.

La droite (AD) balaye l'écran en laissant quelque zone vide.
Est-ce dû à une restriction imposée par la taille de l'écran ?

Partie 2 : Prendre de la hauteur

Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique dans l'espace. Refaire la figure de la partie **1** .
Faire varier les angles de vue de la figure. Que remarque-t-on ?

ACTIVITÉ 3 Voir dans l'espace

INFO

Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique dans l'espace.

1) Placer les points :
- A, B, C, D et O tels que $ABCD$ soit un rectangle de centre O ;
- un point S non coplanaire avec les précédents.

2) Construire la pyramide $SABCD$.
3) Pour chaque paire de droites ci-dessous, existe-t-il un plan qui les contienne toutes les deux ? Si oui, indiquer la position relative de ces deux droites.
a) (OA) et (SC) **b)** (AD) et (BC) **c)** (SB) et (AD)

ACTIVITÉ 4 Autour du parallélisme

INFO

1) Associer chaque propriété (admise) à la figure qui l'illustre.

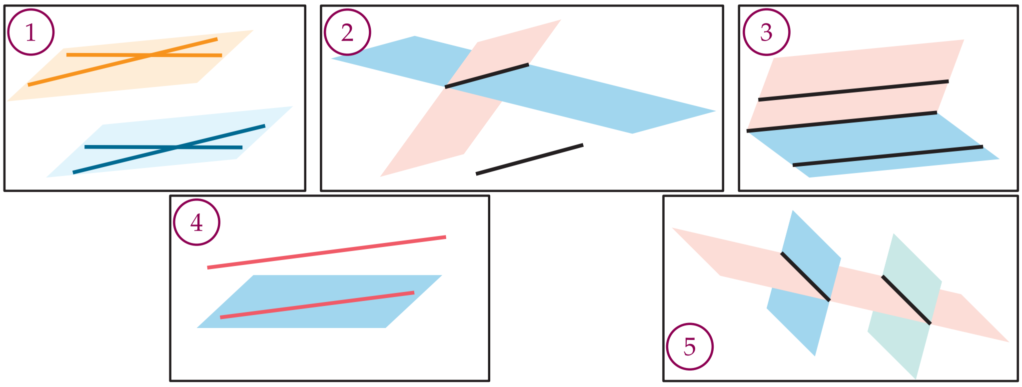
a) Une droite est parallèle à un plan
si et seulement si la droite est parallèle à une droite du plan.

b) Si deux plans sont parallèles,
alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersections sont parallèles.

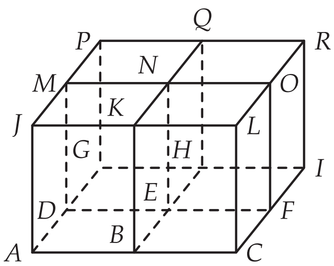
c) Théorème « du toit » : si une droite est parallèle à deux plans sécants,
alors elle est parallèle à la droite d'intersection de ces deux plans.

d) Si deux droites sont parallèles, alors toute droite parallèle à l'une est parallèle à l'autre.

e) Si deux droites sécantes d'un plan $(\mathcal{P})$ sont parallèles à deux sécantes d'un plan $(\mathcal{R})$,
alors les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{R})$ sont parallèles.



2) La figure ci-après est constituée de quatre pavés juxtaposés.



a) Citer trois plans parallèles à la droite (BH).

b) Un élève propose la propriété suivante : « *Si une droite d'un plan $(\mathcal{P})$ est parallèle à une droite d'un plan $(\mathcal{R})$, alors les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ sont parallèles* ». Que peut-on en penser ?
Donner si nécessaire un contre-exemple à l'aide de la figure ci-dessus.

3) Une autre élève propose : « *Si deux droites d'un plan $(\mathcal{P})$ sont parallèles à deux droites d'un plan $(\mathcal{R})$, alors les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{R})$ sont parallèles* ». Que peut-on en penser ?
Donner si nécessaire un contre-exemple à l'aide de la figure ci-dessus.

4) À l'aide d'un logiciel, construire un tétraèdre $ABCD$. Placer N, le milieu de l'arête $[DC]$, P, le milieu de $[DA]$ et M, un point libre sur l'arête $[DB]$.

a) Conjecturer la place du point M pour que les plans (MNP) et (ABC) soient parallèles.

b) Si M est à cette place, laquelle des cinq propriétés permet de montrer que (MNP) et (ABC) sont parallèles ? Démontrer la conjecture.

Cours - Méthodes

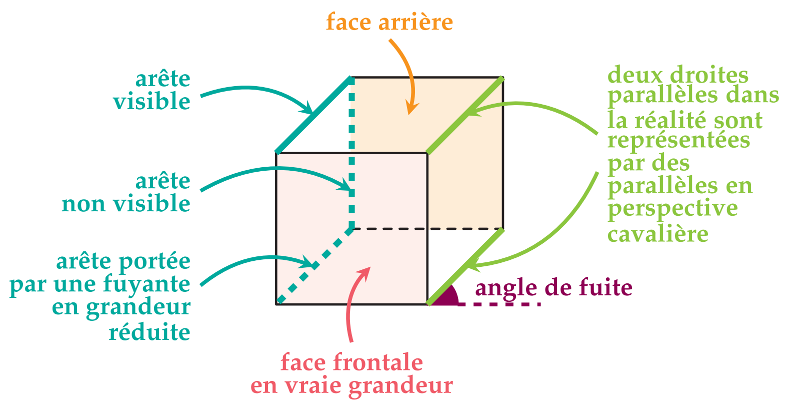
1. Les solides usuels

DÉFINITION

Un **solide** est un objet en relief.
On ne peut pas le tracer en vraie grandeur sur une feuille de papier plane.

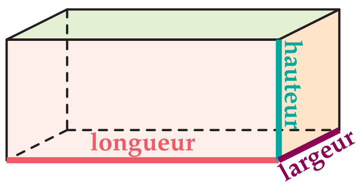
REMARQUES :

- Un **patron** permet de **fabriquer** le solide par pliage.
- La **perspective cavalière** permet de représenter le solide sur une feuille papier en donnant l'impression de la 3D.

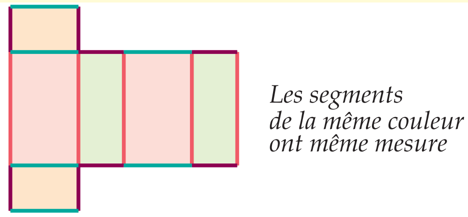


Parallélépipède rectangle

$\mathcal{V}$ = largeur $\times$ hauteur $\times$ profondeur

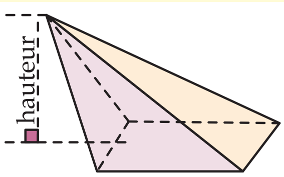


Le patron est composé de rectangles.
L'aire d'un rectangle est : $\mathcal{A}$ = Longueur $\times$ largeur

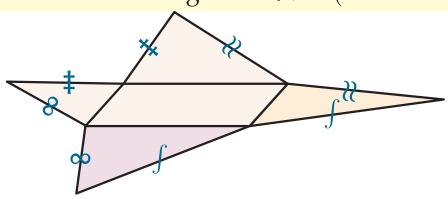


Pyramides

$\mathcal{V}$ = (Aire de la base $\times$ hauteur) $\div$ 3

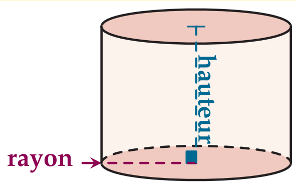


Le patron est composé d'un polygone et de triangles.
L'aire d'un triangle est : $\mathcal{A}$ = (base $\times$ hauteur) $\div$ 2

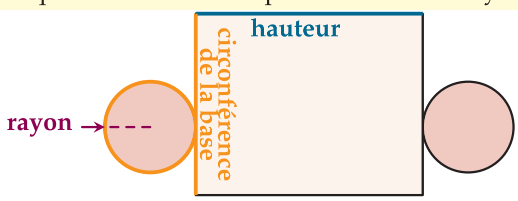


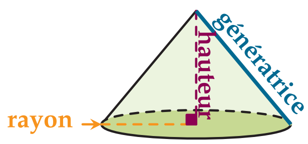
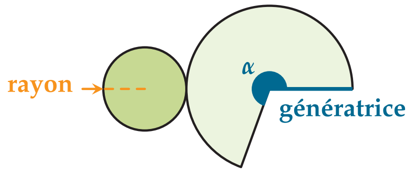
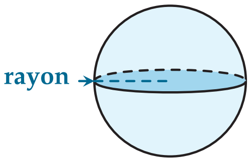
Cylindre de révolution

$\mathcal{V}$ = Aire de la base $\times$ hauteur



Le patron est composé d'un rectangle et de deux disques. L'aire d'un disque est : $\mathcal{A} = \pi \times$ rayon^2



Cône de révolution $\mathcal{V}$ = Aire de la base $\times$ hauteur $\div$ 3	Le patron est composé d'un disque et d'une portion de disque avec α = rayon $\div$ génératrice $\times$ 360°
 	
Sphère et boule	$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi \times \text{rayon}^3$ $\quad$ $\mathcal{A} = 4 \times \pi \times \text{rayon}^2$
 	La sphère n'a pas de patron.

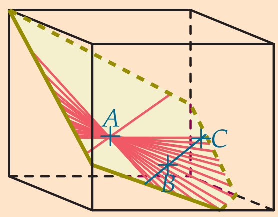
2. Droites et plans

A. Qu'est-ce qu'un plan ?

PROPRIÉTÉ

Soit A, B, C trois points de l'espace distincts et non alignés.

- Pour déterminer un plan, il suffit de donner 3 points non alignés ou 2 droites sécantes ou 2 droites parallèles (non confondues).
- Le **plan** noté (ABC) est constitué par les points des droites passant par A et parallèles ou sécantes à la droite (BC).

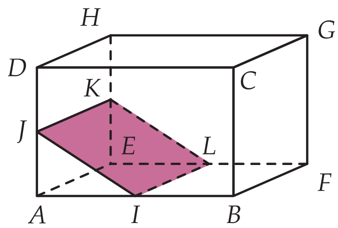


REMARQUE :
Dans chaque plan de l'espace, on peut appliquer tous les théorèmes de géométrie plane.

Exemple $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que :

- $AB = 7\,\text{cm}$
- $AD = 6\,\text{cm}$
- I est le milieu de $[AB]$
- J est le milieu de $[AD]$

1) Nommer le plan colorié.
2) Calculer la longueur BD.



Correction

1) Le plan colorié coupe les arêtes du pavé en I, J, K et L, (IJK) est donc un nom possible.
2) La face $ABCD$ du pavé est un rectangle donc le triangle ABD est rectangle en A.
   D'après le théorème de Pythagore :
   $BD^2 = BA^2 + AD^2 = 7^2 + 6^2 = 49 + 36 = 85$.
   Une longueur est toujours positive donc $BD = \sqrt{85}$ cm.

Cours - Méthodes

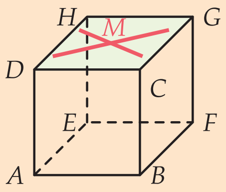
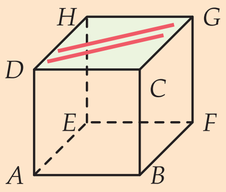
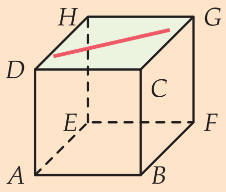
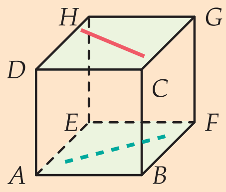
B. Positions relatives de deux droites

DÉFINITION

Deux droites incluses dans un même plan sont dites **coplanaires**.

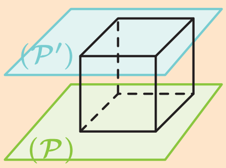
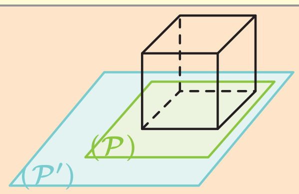
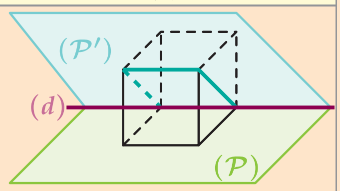
PROPRIÉTÉ

Deux droites de l'espace sont soit coplanaires soit non coplanaires :

(d) et (d') sont coplanaires et			(d) et (d') sont
sécantes en M ou	strictement parallèles ou	confondues	non coplanaires
			

C. Positions relatives de deux plans

PROPRIÉTÉ

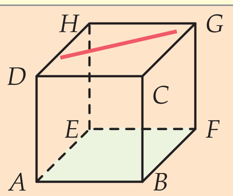
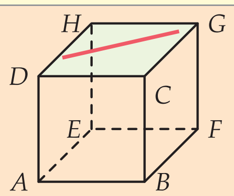
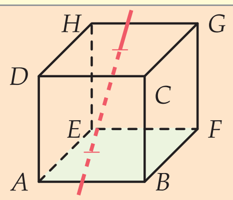
$(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont strictement parallèles	$(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont confondus	$(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants en (d)
		

- Un plan coupe deux plans parallèles suivant deux droites parallèles.
- Deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont respectivement parallèles à deux droites sécantes de l'autre.

REMARQUE : Deux plans confondus sont considérés comme parallèles.

D. Positions relatives d'une droite et d'un plan

PROPRIÉTÉ

(d) est strictement parallèle à (ABF)	(d) est incluse dans (HDC)	(d) est sécante à (ABC)
		

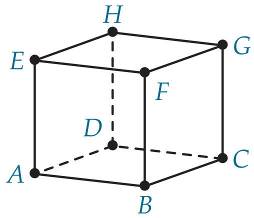
Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite du plan.

Activités mentales

1 Le volume d'un pavé est de 210 cm^3. La base de ce pavé est un rectangle de largeur 7 cm et de longueur 10 cm. Quelle est la hauteur de ce pavé ?

2 Que devient le volume d'un cube de 1 cm^3 de côté lorsque l'on triple la longueur de ses arêtes ?

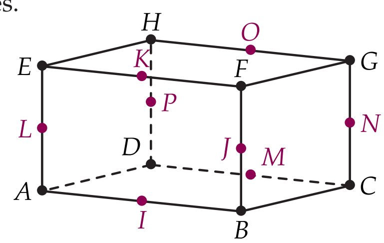
3 On a représenté en perspective, ci-dessous, un cube $ABCDEFGH$:



Utiliser cette figure pour citer deux droites NON matérialisées par un segment déjà tracé qui soient :
- parallèles ;
- sécantes ;
- non coplanaires.

4 Le cube de la question précédente a une arête de longueur 5 cm.
Combien mesurent les segments $[AC]$ et $[AG]$?

5 Voici la représentation en perspective du parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. Les points I, J, K, L, M, N, O, P sont les milieux des arêtes sur lesquelles ils sont placés.



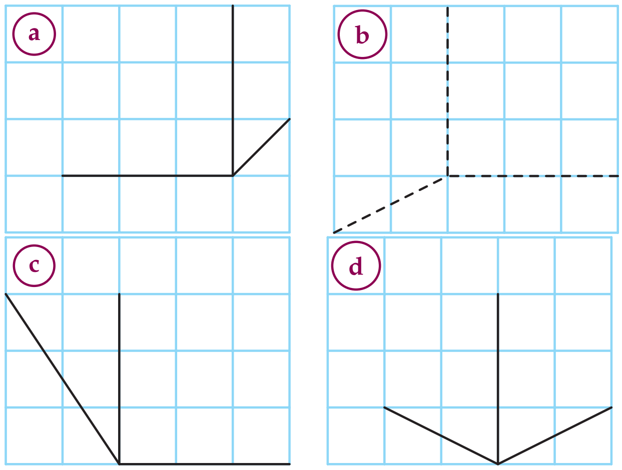
1) Citer :
- **a)** un plan parallèle au plan (EOA) ;
- **b)** un plan parallèle au plan (IMG) ;
- **c)** deux plans strictement parallèles au plan (KJN).

2) Citer une droite NON matérialisée par un segment déjà tracé qui soit :
- **a)** strictement parallèle au plan (EAB) ;
- **b)** strictement parallèle au plan (ADE) ;
- **c)** strictement parallèle au plan (AFG) ;
- **d)** strictement parallèle à chacun des deux plans (ABC) et (DGH).

3) Vrai ou Faux ?
- **a)** Le plan (IJN) est parallèle au plan (KPO).
- **b)** Les droites (IG) et (LO) sont coplanaires.
- **c)** La droite (LO) est parallèle au plan (KGC).

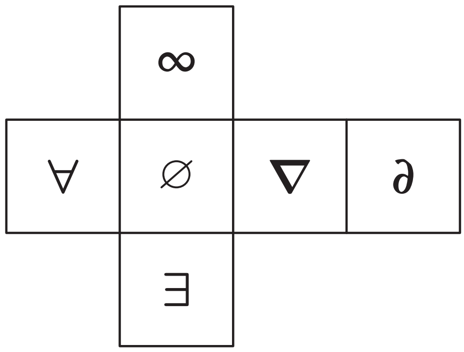
Représentation dans l'espace

6 Reproduire chaque figure et les compléter pour obtenir la représentation en perspective cavalière d'un cube.

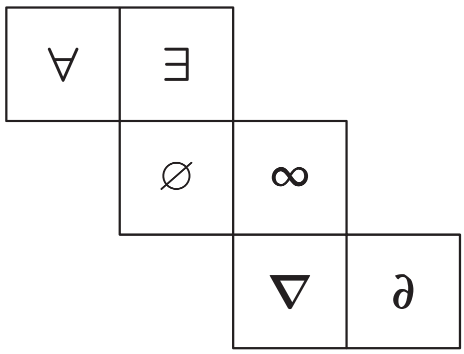


Pour les exercices 7 et 8, on a représenté un patron d'un cube dont les arêtes mesurent 4 cm.
Faire une représentation en perspective cavalière de ce cube et y reporter les motifs en noir sur les faces visibles et en rouge sur les faces invisibles.

7

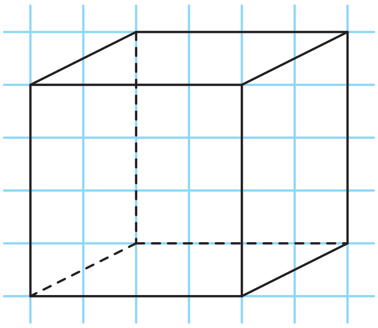


8



S’entraîner

9 On a représenté ci-dessous, en perspective cavalière, un cube de côté 4 carreaux.



En respectant les mêmes règles de perspective, notamment l’angle de fuite et les proportions, construire :

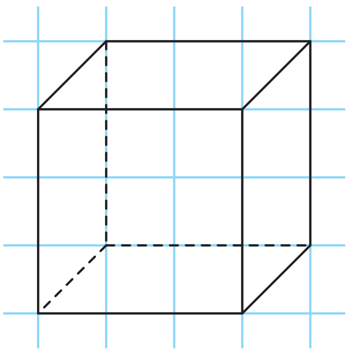
1) un cube d’arêtes de longueur 6 carreaux ;

2) un cube d’arêtes de longueur 5 carreaux ;

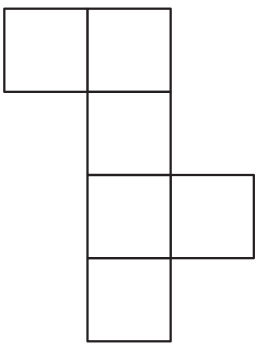
3) un parallélépipède rectangle (pavé droit) de dimension 3, 5 et 6 carreaux ;

4) une pyramide de hauteur 6 carreaux à base carré dont le côté mesure 3 carreaux.

10 Même consigne qu’à l’exercice **9**.

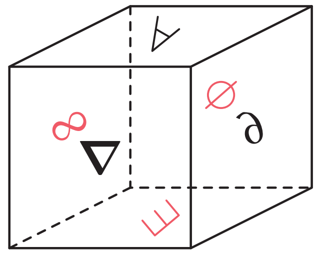


11 Le patron ci-dessous est le même que celui de l’exercice **7**. Dessine les symboles sur les faces.



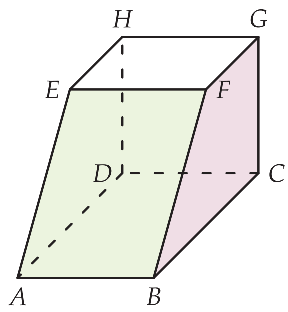
Patrons

12 Construire un patron de ce cube et y reporter les motifs sur chacune des faces.



Les motifs noirs sont sur des faces visibles et les motifs rouges sur des faces non visibles.

13 On considère le prisme droit $ABCDEFGH$ ci-contre. Les faces $EFGH$ et $DCGH$ sont des carrés de côté 2 cm et les faces $ADHE$ et $BCGF$ sont des trapèzes rectangles tels que $BC = AD = 5$ cm.



Construire, en justifiant les étapes de construction, le patron du prisme $ABCDEFGH$ en vraie grandeur.

14 On considère un tétraèdre régulier $ABCS$ de coté 4 cm. I est le milieu de $[AB]$.
Une hauteur du tétraèdre est le segment $[IH]$.

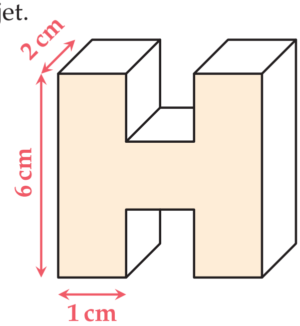
1) Représenter le tétraèdre en perspective cavalière.

2) Calculer la longueur IS.

3) Calculer la longueur IH.

4) Calculer le volume de $ABCS$.

15 Hélène voudrait confectionner son initiale en carton suivant le modèle ci-dessous. Proposer un patron de cet objet.



Volumes

16 Léa prépare des boules de chocolat pour ses enfants. Elle a acheté un moule en silicone comportant 24 cavités en forme de demi-sphères de 3 cm de diamètre.
Quel volume de chocolat est nécessaire pour fabriquer 24 boules pleines ?

17 Un camembert a la forme d'un cylindre de révolution de hauteur 3 cm et de diamètre 11 cm.

La part découpée dans le camembert photographié ci-dessus représente $\frac{1}{8}$ du camembert.
Quelle est le volume de la part ?

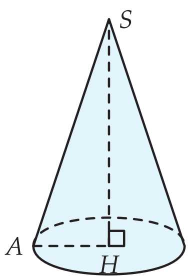
18 En Égypte
La pyramide de Khéops est un monument funéraire modélisé par une pyramide régulière à base carrée de côté 230,3 m.
À l'origine, sa hauteur était de 146,6 m. En raison de l'érosion, elle ne mesure plus que 138,7 m.

1) Représenter une réduction de cette pyramide en perspective cavalière.
Préciser le coefficient de réduction choisi.
2) Quel volume de pierre a été nécessaire pour la construire ?
3) Quel volume a-t-elle perdu depuis sa construction ?

19 Cône de révolution
En faisant tourner le triangle AHS, rectangle en H, autour de (SH), on obtient le cône de révolution représenté ci-dessous où $AS = 6\,\text{cm}$ et $\widehat{ASH} = 15°$.

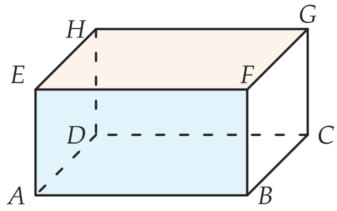
En donnant la valeur exacte puis la valeur approchée par défaut au dixième près, calculer :

1) le rayon du cercle de base ;
2) la hauteur du cône ;
3) le volume de ce cône.



Positions relatives

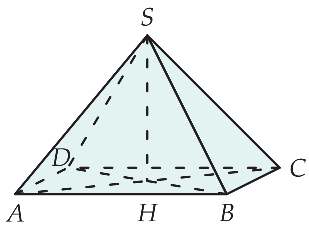
20 Soient $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle.



1) Les droites (AB) et (HG) définissent-elles un plan ? Si oui, nommer ce plan.
2) Les droites (AB) et (CG) définissent-elles un plan ? Si oui, nommer ce plan.
3) Citer trois droites parallèles à (FG).
4) Citer trois droites sécantes à (FG).
5) Citer trois droites non coplanaires à (FG).

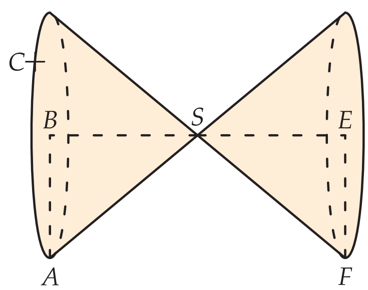
21 Sur la pyramide $SABCD$ à base rectangulaire ci-dessous, H est le pied de la hauteur.
Donner les positions relatives des droites suivantes.

1) (AB) et (CD)
2) (SA) et (BD)
3) (HA) et (SC)
4) (BH) et (DB)



22 Sablier
Sur le sablier ci-dessous, donner les positions relatives du plan (ABC) et de la droite :

1) (AB) ; 2) (SE) ; 3) (EF).



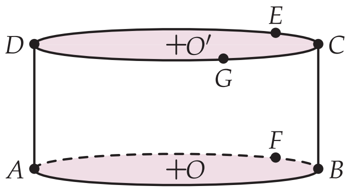
23 Alignés ?
$ABCDEFGH$ est un cube. I est le milieu de $[AE]$.

1) Représenter le cube et y placer le point I.
2) La droite (IH) coupe le plan (ABC) en M.
Démontrer que les points A, D et M sont alignés.

S'entraîner

24 Camembert

Un camembert est modélisé par un cylindre de révolution d'axe (OO').



1) Citer deux plans parallèles.

2) Citer trois plans sécants avec le plan (ABF).

On coupe le cylindre suivant la droite (GE) parallèlement à (CB). Le point F est tel que $(EF)//(CB)$.

3) Quelle sera la nature de la section obtenue ?

4) Que peut-on dire des plans (EFG) et (EOO') ?

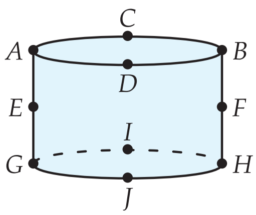
25 Position relative de deux plans

Sur le cylindre, E est le milieu de $[AG]$ et F celui de $[BH]$. Donner les positions relatives des plans :

1) (ABE) et (GHF)

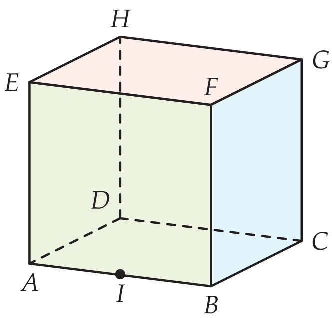
2) (ABC) et (GHJ)

3) (ACG) et (JHI)



26 Intersections de plans

On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ et I un point de $[AB]$.



1) Reproduire la figure ci-dessus et y placer le point I.

2) Construire sur cette figure :

- les intersections des plans (EHI) et (AFB) ;
- les intersections des plans (EHI) et (HDG) ;
- les intersections des plans (EHI) et (BDF) ;
- les intersections des plans (EHI) et (FBC).

Problèmes

27

On considère un cube $ABCDEFGH$.

1) Représenter ce cube en perspective cavalière.

2) a) Justifier que $EFCD$ est un parallélogramme.

b) En déduire que la droite (FC) est parallèle au plan (EBD).

3) a) Montrer que la droite (FH) est parallèle au plan (EBD).

b) En déduire la position relative des plans (FCH) et (EBD).

28 Dans un tétraèdre

$ABCD$ est un tétraèdre. I est le milieu de $[AD]$, $J \in [BD]$ et $K \in [CD]$ tels que $DJ = 0,75BD$ et $DK = 0,25DC$.

1) Représenter ce tétraèdre en perspective cavalière et y placer les points I, J, K.

2) Déterminer et construire (s'ils existent) les points :

a) L, intersection de la droite (IJ) et du plan (ABC) ;

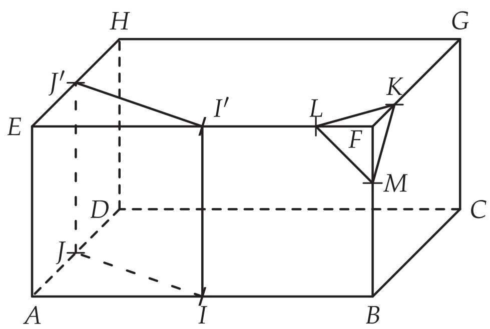
b) M, intersection de la droite (IK) et du plan (ABC).

3) Déterminer, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (ABC).

29

On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ ci-dessous avec :

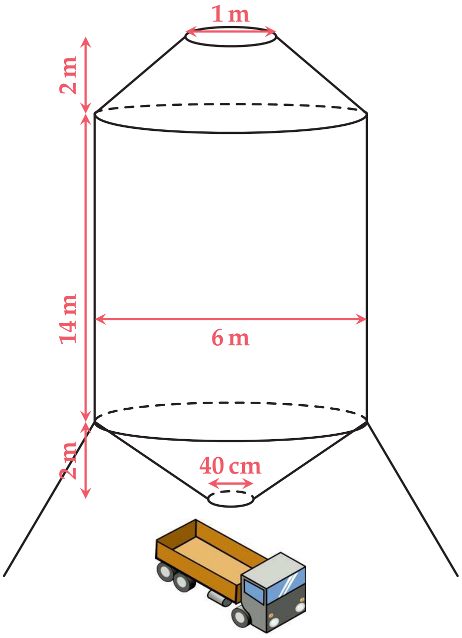
- $AB = 4\,\text{cm}$; $BC = 3\,\text{cm}$; $AE = 2\,\text{cm}$
- les points I, I', J et J' sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[EF]$, $[AD]$ et $[EH]$;
- les points K, L et M sont définis par :
  - $K \in [FG]$ avec $FK = 1\,\text{cm}$;
  - $L \in [FE]$ avec $FL = 1\,\text{cm}$;
  - $M \in [FB]$ avec $FM = 1\,\text{cm}$.



1) Faire un schéma à main levé du patron du polyèdre $IBCDJLMKGHJ'I'$.

2) Construire en vraie grandeur le patron du polyèdre.

30 Un silo à grain sert à stocker les récoltes en attendant de les livrer. Un silo se remplit par le haut à l’arrivée de la moissonneuse et se vide par le bas en remplissant les camions de livraisons.
Voici une représentation d’un silo à grain vue de face. Il s’agit un cylindre encadré par deux troncs de cône.



1) Quel est le volume de ce silo ?
2) Une benne céréalière peut contenir entre 57 et 79 m^3 de grain suivant les modèles. Quel est le nombre minimum de bennes nécessaires pour vider un silo aux trois quarts plein ?

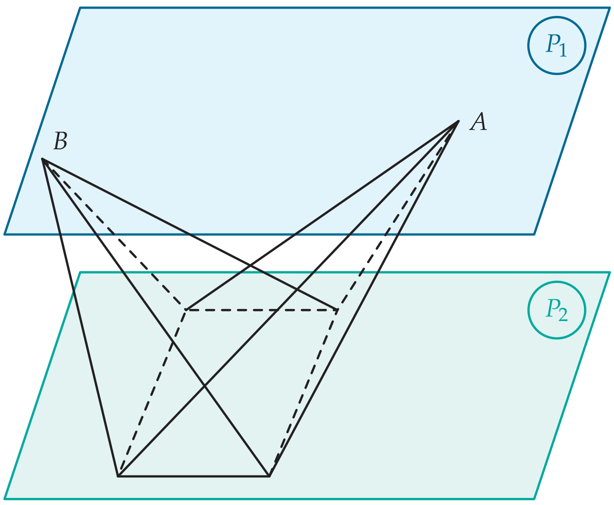
31 **Rechercher l’information**
Représenter, en perspective cavalière et en respectant les proportions, la Tour de Belem, fortin gardant l’entrée de la ville de Lisbonne.

32 On considère l’algorithme suivant.

Algorithme : Volume
Entrées
`X` : *nombre*
`Y` : *nombre*
Liste des variables utilisées
`V1` : *nombre*
`V2` : *nombre*
`V` : *nombre*
Traitements
Donner à `V1` la valeur de `X*X*Y/3`
Donner à `V2` la valeur de `X*X*4`
Donner à `V` la valeur de `V1+V2`
Affichage
Afficher ’Le volume est:’ `V`
Fin de l’algorithme

1) Que renvoie cet algorithme pour $X = 3$ et $Y = 6$?
2) $\mathcal{V}_\infty$ et $\mathcal{V}_\in$ sont les volumes des deux solides classiques. Représenter en perspective cavalière un solide dont le volume serait calculé par cet algorithme.

33 Mélia et Thaïs observent cette figure sur laquelle les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles et les points A et B appartiennent au plan $\mathcal{P}_1$.
Mélia affirme que la pyramide de sommet B a un volume inférieur à celui de la pyramide de sommet A. Mais Thaïs pense que Mélia se trompe.
Qui a raison ?



Approfondir

34 $ABCDE$ est une pyramide telle que $BCDE$ soit un parallélogramme de centre O et de hauteur AO.

I est le milieu du segment $[AB]$.

J est le milieu du segment $[AC]$.

1) Représenter cette pyramide en perspective cavalière et y placer les points I et J.

2) Préciser, en justifiant, les intersections :

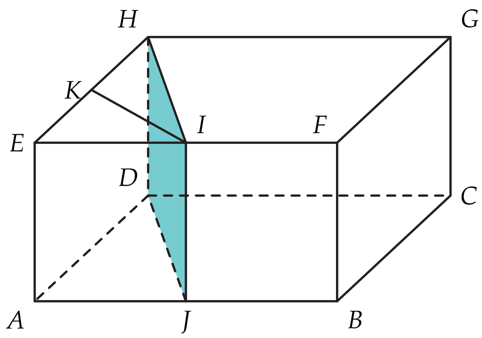
- **a)** des plans (ABC) et (ACD) ;
- **b)** des plans (ABD) et (AEC) ;
- **c)** de la droite (AO) et du plan (BED) ;
- **d)** des droites (DI) et (AO).

3) Démontrer que la droite (IJ) et le plan (BCD) sont parallèles.

4) Démontrer que la droite (IJ) et la droite (ED) sont parallèles.

5) En déduire l'intersection des plans (ABC) et (EID).

35 Utiliser le pavé ci-dessous pour montrer que les propriétés suivantes sont fausses.



- « Si deux plans sont parallèles, alors toute droite contenue dans l'un des plans est parallèle à toute droite de l'autre plan » ;
- « Toute section dans un pavé droit est un rectangle » ;
- « Si une droite contenue dans un plan est parallèle à une autre droite contenue dans un autre plan, alors ces deux plans sont parallèles ».

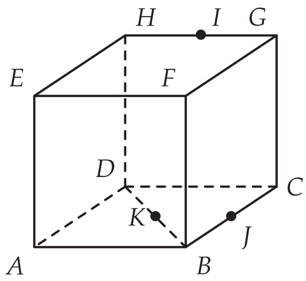
36 **Tournez triangle** **ALGO**

Le triangle SAO rectangle en O engendre un cône de révolution en tournant autour de $[SO]$. À partir de :

- la longueur SO
- l'angle $\widehat{ASO}$

proposer un algorithme calculant les dimensions nécessaires à la confection de ce cône.

37 Dans le cube représenté ci-dessous, I, J et K sont les milieux des segments sur lesquels ils sont situés.



Pour chaque question, indiquer et justifier si les droites proposées sont sécantes.

1) (FG) et (AH).

2) (AH) et (BI).

3) (AI) et (JG).

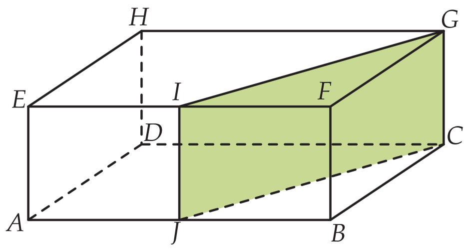
4) (FB) et (HK).

38 $ABCDEFGH$ est un pavé droit tel que :

- $AB = 8\,\text{cm}$;
- $AD = 4\,\text{cm}$;
- $AE = 3\,\text{cm}$.

On appelle I le milieu de $[EF]$ et J celui de $[AB]$.

On coupe le solide par un plan passant par I, J, C et G.



Partie A : étude d'un patron

1) Quelle est la nature de $IJCG$? Justifier.
Représenter JBC puis $IJCG$ en vraie grandeur.

2) Calculer la longueur JC.
On donnera la valeur exacte sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers naturels puis la valeur arrondie au mm près.

3) Quelle est la nature du solide $AJCDEIGH$? Tracer un patron possible.

Partie B : fabrication en grande quantité

Le patron du solide $AJCDEIGH$ est utilisé pour fabriquer une boîte en carton. Une entreprise confectionnant ces boîtes souhaite optimiser ses coûts de production.

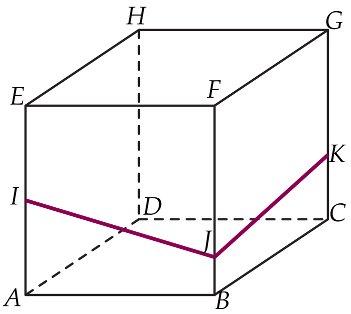
1) Positionner les faces pour faire tenir le patron dans un carré de 15 cm de côté.

2) De quelle longueur de carton de 3 m de large a-t-on besoin pour fabriquer 1 000 boîtes ?

39 Intersections cube-plan et plan-plan

La figure ci-dessous représente un cube $ABCDEFGH$ en perspective cavalière. Les points I, J et K sont des points des arêtes respectives $[AE]$, $[BF]$ et $[CG]$ tels que :

- $BJ = \frac{1}{5}BF$
- $CK = \frac{1}{3}CG$
- I milieu de $[AE]$



Partie A : construction

Reproduire cette figure en perspective cavalière. Cette figure sera complétée au fur et à mesure des questions, *sans effacer les traits de construction*.

Partie B : intersection de (IJK) et (ABC)

1) Quelle est la nature de l'intersection des plans (ABC) et (IJK) ?

2) Justifier que les droites (JK) et (BC) sont sécantes.
En déduire l'intersection du plan (ABC) et de la droite (JK).
La représenter précisément sur la figure.

3) Construire de même l'intersection du plan (ABC) et de la droite (IJ).

4) En déduire l'intersection des plans (ABC) et (IJK).
Justifier et la représenter sur la figure.

Partie C : intersection du plan (IJK) avec les faces du cube

1) Justifier que les plans (IJK) et (ADE) sont sécants selon une droite parallèle à (JK).

2) Construire sur la figure l'intersection du plan (IJK) et de la face $ADHE$.
On appellera L le point d'intersection entre le plan (IJK) et l'arête $[HD]$.

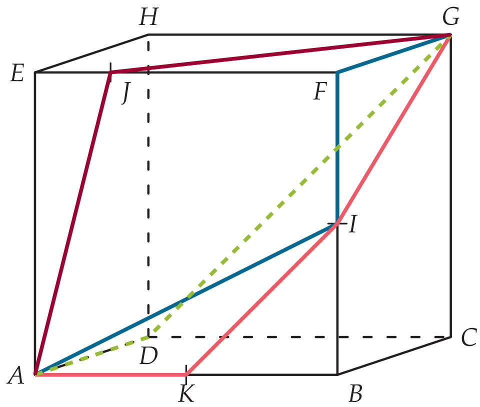
3) Terminer la construction de l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube.

4) Comment vérifier que la construction du point L est correcte ? (Il y a plusieurs possibilités graphiques).

40 Inspiré par *La révolution des fourmis*, Bernard Werber

$ABCDEFGH$ est un cube de 4 cm de côté avec :

- I, le milieu du segment $[BF]$;
- K, le milieu du segment $[AB]$;
- J, le point de $[EF]$ tel que $EJ = \frac{1}{4}EF$.



Partie A : promenade de santé

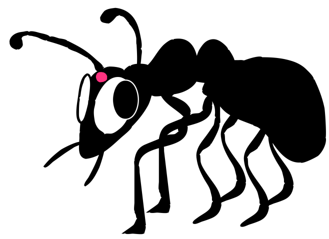
Cinq fourmis se déplacent en ligne droite sur les faces du cube. Elles souhaitent effectuer le trajet séparant A de G. Chacune choisit un chemin différent.

- La fourmi 1 passe par J.
- La fourmi 2 passe par I puis F.
- La fourmi 3 passe par D.
- La fourmi 4 passe par K puis I.

Calculer la distance exacte parcourue par chaque fourmi et en donner la valeur arrondie au centième près.

Partie B : optimisation

La cinquième, celle avec une marque de vernis à ongles, a lu le lièvre et la tortue.



Avant de partir, elle réfléchit à un parcours plus court que celui de ses congénères.

1) Existe-t-il un parcours le plus court possible ?

2) A-t-elle plusieurs options ?
Les déterminer.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Pour les solides usuels :

- cube
- cylindre
- cône
- pavé
- pyramide
- sphère

- Savoir les représenter en perspective cavalière
- Savoir construire un patron
- Savoir reconnaître un patron

Sur une représentation d'un objet :

- Repérer les angles droits.
- Calculer des longueurs.

Connaître et utiliser

- le vocabulaire : coplanaire, parallèle, sécant.
- la notion de parallélisme dans l'espace.

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

41 Lorsque l'on double le rayon d'une sphère, son volume est multiplié par :

a) 2 b) 4 c) 8 d) autre

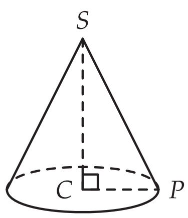
42 Lorsque l'on double la hauteur d'une pyramide, son volume est multiplié par :

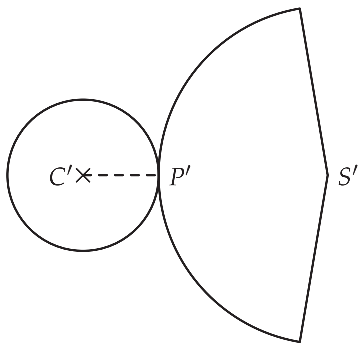
a) 2 b) 4 c) 8 d) autre

43 Le volume d'un cylindre de hauteur 10 cm est de 160π cm^3. Son rayon mesure :

a) 2 cm b) 4 cm c) 16 cm d) autre

Ci-contre, on a représenté en perspective cavalière un cône de sommet S.
C est le centre du disque de base.
P est un point du cercle de base.
Le rayon du disque de base est 2 cm et la hauteur 3 cm.
Une ébauche du patron de ce cône est représentée à sa droite.
L'objectif des questions suivantes est de préciser des éléments de ce patron.





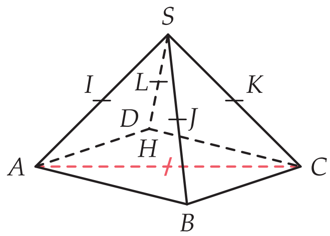
44 La longueur du rayon $S'P'$ est égale à :

a) $\sqrt{13}$ cm b) $2\sqrt{3}$ cm c) 3 cm

45 L'angle au centre du secteur circulaire de sommet S' mesure à peu près :

a) 180° b) 135° c) 241° d) 200°

Pour les questions suivantes, on utilise la figure ci-contre où est représentée en perspective cavalière une pyramide régulière $SABCD$ à base carrée dont un côté mesure 4 cm et une arête 8 cm.
Les points I, J, K, L représentent les milieux respectifs des arêtes sur lesquelles ils sont tracés. Le point H est le centre du carré $ABCD$.



46 Le triangle AJB est :
ⓐ isocèle ⓑ rectangle ⓒ équilatéral ⓓ autre

47 La longueur du segment $[IJ]$ est :
ⓐ $\sqrt{2}$ cm ⓑ 2 cm ⓒ 3 cm ⓓ autre

48 Le quadrilatère $AHKI$ est un :
ⓐ losange ⓑ trapèze ⓒ parallélogramme

49 Le triangle SJK est :
ⓐ isocèle ⓑ rectangle ⓒ équilatéral ⓓ Autre

50 Le quadrilatère $BDLJ$ est un :
ⓐ losange ⓑ trapèze ⓒ parallélogramme

51 L'aire du quadrilatère $IJKL$ est :
ⓐ 4 cm^2 ⓑ 8 cm^2 ⓒ 12 cm^2 ⓓ 16 cm^2

52 Les droites (LJ) et (DC) sont :
ⓐ sécantes ⓑ parallèles ⓒ non coplanaires

53 Les plans (ILJ) et (DBC) sont :
ⓐ sécants ⓑ strictement parallèles ⓒ confondus

54 Les droites (SJ) et (DK) sont :
ⓐ sécantes ⓑ parallèles ⓒ non coplanaires

55 La longueur, en cm, de la hauteur $[SH]$ est :
ⓐ 8 ⓑ 56 ⓒ $\sqrt{32}$ ⓓ $2\sqrt{14}$

56 Le volume, en cm^3, de la pyramide $SABCD$ est :
ⓐ $16\sqrt{14}$ ⓑ $\frac{32}{3}\sqrt{14}$ ⓒ $\frac{32}{24}\sqrt{14}$ ⓓ $\frac{32}{3}\sqrt{56}$

57 Le volume, en cm^3, de la pyramide $SIJKL$ est :
ⓐ $8\sqrt{14}$ ⓑ $\frac{16}{24}\sqrt{56}$ ⓒ $\frac{4}{3}\sqrt{14}$ ⓓ $\frac{32}{3}\sqrt{14}$

Travaux pratiques

TP 1 Section de cube

INFO

1 Dessine-moi un cube

1) Ouvrir un logiciel de géométrie dans l'espace.
2) Place quatre points A, B, C et D tels que $ABCD$ soit un carré.
3) Compléter la figure avec les points E, F, G et H pour que $ABCDEFGH$ soit un cube.
4) Enregistrer la figure deux fois, l'une avec le nom `PetiteTranche`, l'autre avec le nom `Octaèdre`.

2 Avec PetiteTranche

1) Ouvrir le fichier `PetiteTranche`.
2) Placer I, J, K, L, M et N les milieux respectifs de $[AD]$, $[DC]$, $[CG]$, $[GF]$, $[EF]$ et $[AE]$.
3) Construire l'hexagone $IJKLMN$.
4) Est-ce une section du cube (autrement dit, les points I, J, K, L, M, et N sont-ils coplanaires) ? Faire pivoter la figure pour émettre une conjecture avant de justifier.
5) Cet hexagone est-il régulier ? Justifier.

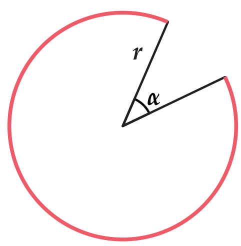
3 Avec Octaèdre

1) Ouvrir le fichier Octaèdre
2) Créer les points I, J, K, L, M, N milieux respectifs des côtés suivant du cube : $[AC]$, $[BG]$, $[GE]$, $[ED]$, $[EB]$ et $[GD]$.
3) Créer deux pyramides de base $JNLM$ et de sommets K et I. On obtient un octaèdre.
4) Combien l'octaèdre a-t-il de faces ? De sommets ? D'arêtes ?
5) Le cube de départ a pour côté quatre unités. Calculer :
   a) la longueur d'une arête de l'octaèdre ;
   b) l'aire de l'octaèdre ;
   c) le volume de l'octaèdre.
6) Construire un patron de l'octaèdre en prenant comme unité le centimètre.

TP 2 Chapeau chinois

INFO

1 Établir une formule

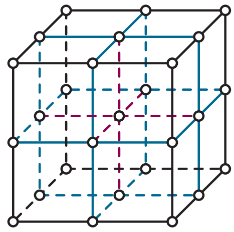


1) La longueur de l'arc de cercle, en rouge sur la figure, correspond au périmètre de la base du cône une fois formé et il est proportionnel à l'angle au centre β ($\beta = 360^\circ - \alpha$).
   Établir que le rayon de la base du cône en fonction de r et α est :
   $\mathcal{R}(r, \alpha) = r\left(1 - \dfrac{\alpha}{360}\right)$.
2) La longueur de la génératrice du cône est le rayon r du patron. Montrer que la hauteur du cône en fonction de r et α est : $\mathcal{H}(r, \alpha) = r\sqrt{1 - \left(1 - \dfrac{\alpha}{360}\right)^2}$.
3) Déduire des questions précédentes le volume $\mathcal{V}(r, \alpha)$ du cône en fonction de r et α.

2 Optimiser

On fixe $r = 10\,\text{cm}$. Estimer, au degré près, la valeur de l'angle α pour laquelle le volume est maximum en utilisant l'outil numérique de votre choix.

TP 3 Cristallographie



En chimie, la cristallographie désigne l'étude de la géométrie microscopique des solides. Les chercheurs ont découvert qu'à l'intérieur d'un cristal, les atomes et/ou les ions sont arrangés suivant des motifs qui se répètent.

Le motif d'un cristal de NaCl (chlorure de sodium) est inscrit dans un cube de 564 pm (picomètre) de côté.

1) Reproduire la figure et la compléter au fur et à mesure de l'exercice.

2) L'ion Na^+ se situe à chaque sommet du cube et au centre de chaque face.

- **a)** Colorier les points de la figure où se situent les ions Na^+ en bleu.
- **b)** Combien y a-t-il d'ions Na^+ dans un motif ?
- **c)** Les ions sont considérés comme sphériques. Le rayon atomique de l'ion Na^+ est de 180 pm. Quel est le volume occupé par les ions Na^+ du motif ?

3) L'ion Cl^- se situe au milieu de chaque arête et au centre du cube.

- **a)** Colorier les points de la figure où se situent les ions Cl^- en rouge.
- **b)** Combien y a-t-il d'ions Cl^- dans un motif ?
- **c)** Le rayon atomique du ion Cl^- est de 100 pm. Quel est le volume occupé par les ions Cl^- ?

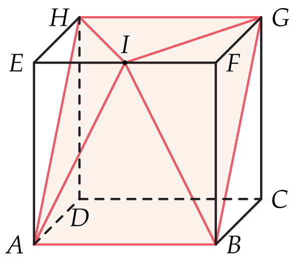
4) La compacité d'un cristal est donné par la formule : compacité $= \dfrac{\text{volume occupé par les ions}}{\text{volume du motif}}$

Quelle est la compacité du cristal de NaCl ?

TP 4 Puzzle dans un cube

ALGO

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 4 cm. I est le milieu de $[EF]$.



1 Construction

1) Construire un patron du prisme à base triangulaire $AEHBFG$.

2) Construire un patron des tétraèdres $IFBG$ et $IEAH$.

3) Construire un patron de la pyramide $IABGH$.

2 Calculs

1) Calculer le volume du prisme à base triangulaire $ADHBCG$.

2) Calculer les volumes des tétraèdres $IFBG$ et $IEAH$.

3) En déduire le volume de la pyramide $IABGH$.

4) Calculer l'aire du rectangle $ABGH$ et en déduire la hauteur de cette pyramide.

3 Production

Un entreprise fabrique un puzzle à partir des solides étudiés précédemment.

La pyramide $IABGH$ est fabriquée en rose et les autres pièces en vert.

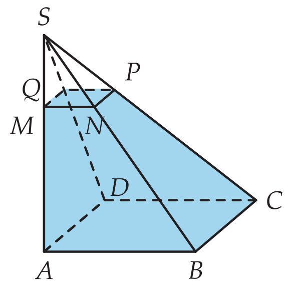
1) Proposer un algorithme qui, à partir de la longueur de l'arête du cube $ABCDEFGH$, calcule le volume de la pyramide $IABGH$.

2) Calculer le volume de plastique rose nécessaire pour fabriquer 1 000 puzzles dans un cube d'arête 10 cm et 1 000 puzzles dans un cube d'arête 60 cm.

Travaux pratiques

TP 5 À moitié vide ou à moitié plein ?

Un récipient est modélisé par une pyramide comme sur la figure ci-contre.



1 Données fixes

$SABCD$ est une pyramide à base carrée de hauteur $[SA]$ telle que $AB = 9\,\text{cm}$ et $SA = 12\,\text{cm}$.
Les triangles SAB et SAD sont rectangles en A.
Calculer le volume de la pyramide $SABCD$.

2 Remplissage

On remplit ce récipient d'eau et on appelle x la hauteur de l'eau en cm.
M est le point de $[SA]$ tel que $MA = x$.
On appelle $MNPQ$ la section de la pyramide $SABCD$ par le plan parallèle à la base passant par M. L'eau occupe donc un tronc de pyramide $ABCDMNPQ$.
On note $\mathcal{V}(x)$ le volume de la pyramide $SMNPQ$.

1) Quelles sont les valeurs que peut prendre x ?
2) Montrer que $MN = \dfrac{3}{4}(12 - x)$ et que $\mathcal{V}(x) = \dfrac{3}{16}(12 - x)^3$.
3) Montrer que la hauteur x en cm atteinte par l'eau pour que la pyramide soit remplie à la moitié de son volume doit vérifier l'équation : $(12 - x)^3 = 864$.
4) En déduire un arrondi au mm de la hauteur atteinte par l'eau quand la pyramide est remplie à moitié (détailler la méthode utilisée).

Récréation, énigmes

Architecture

Voici la Grande Arche de la Défense à Paris et la Puerta de Europa à Madrid.

1) Représenter ces deux bâtiments en perspective cavalière.
2) Réaliser un patron permettant de construire une maquette au 1/1 000 de chacun de ces bâtiments. On prendra comme dimensions réelles :

pour l'arche de la Défense : 100 m pour la longueur de l'arête du cube extérieur et 70 m pour la longueur de l'arête du cube intérieur ;

pour la puerta de Europa : 115 m de hauteur, une inclinaison de 15° et la base est un carré d'aire environ 1 170 m^2.

SOLUTIONS

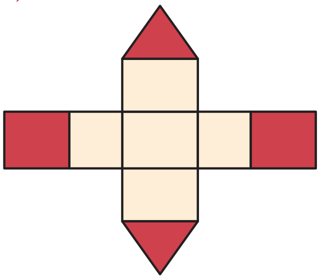
Chapitre G1
Espace

Auto-évaluation

1 1) $4\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ 3) $9\pi\,\text{cm}^2$
2) $6\,\text{cm}^2$ 4) $36\pi\,\text{cm}^2$

2 1) $8\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ 3) $12\,\text{cm}^2$
2) $36\pi\,\text{cm}^2$ 4) $\pi\,\text{cm}^2$

3 1)



2) $50{,}4\,\text{m}^3$

S'entraîner

1 $3\,\text{cm}$

2 $27\,\text{m}^3$

3 1) (ED) et (FC)
2) (ED) et (AH)
3) (ED) et (GB)

4 $AC = 5\sqrt{2}$ et $AG = 5\sqrt{3}$

5 1)
a) (KGC) c) (LIM), (EBC)
b) (ADO)

2)
a) (HC) c) (IJ)
b) (BC) d) (LJ)

3)
a) vrai c) vrai
b) faux

Auto-évaluation QCM

41 c **42** a
43 b **44** a
45 d **46** b
47 b **48** b c
49 a **50** b
51 a **52** c
53 b **54** c
55 d **56** b
57 b c