FONCTIONS

5

Fonctions polynômes du second degré

Connaissances du collège nécessaires à ce chapitre

- Développer une expression littérale
- Reconnaître un axe de symétrie
- Additionner des fractions
- Multiplier des fractions

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 Développer et réduire les expressions suivantes.

1) $(x+1)^2$

2) $(x-3)^2$

3) $(x-1,5)^2-2,5$

4) $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{2}{3}$

5) $5(x-1)(x-4)$

6) $-2(x-4)(x+2)$

7) $7(x+7)(x+3)$

8) $-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{4}\right)\left(x-\dfrac{2}{5}\right)$

2 Calculer les expressions suivantes.

1) $\dfrac{2}{3}-\dfrac{7}{3}$

2) $\dfrac{3}{14}+\dfrac{2}{21}$

3) $\dfrac{-7}{6}-\dfrac{-4}{18}$

4) $\dfrac{12}{48}-\dfrac{5}{8}$

3 Calculer les expressions suivantes.

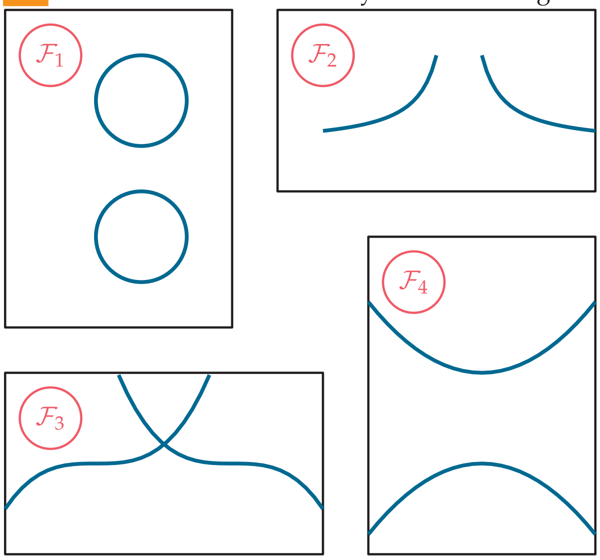
1) $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{7}$

2) $\dfrac{3}{-14}\times\dfrac{-21}{-6}$

3) $\dfrac{-51}{6}\times\dfrac{12}{34}$

4) $\dfrac{12}{48}\times\dfrac{5}{8}$

4 Déterminer les axes de symétries des figures.



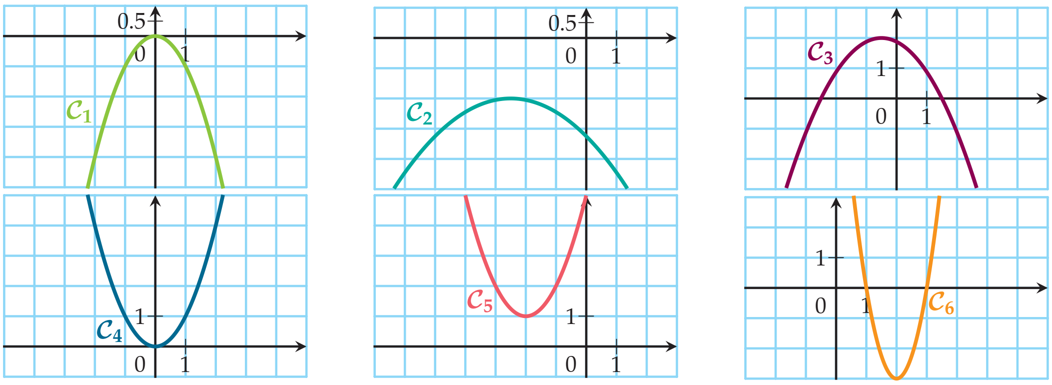
Voir solutions p. 167

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 Paraboliquement vôtre

On a représenté ci-dessus six fonctions trinômes au 2e degré définies sur $\mathbb{R}$.

Partie 1 : Associations



1) Associer chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les formules ci-dessous à l'une des courbes représentatives ci-dessus.

- $f(x) = 3(x-3)(x-1)$
- $g(x) = x^2$
- $h(x) = (x+2)^2 + 1$
- $k(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)$
- $l(x) = -x^2$
- $m(x) = -\frac{1}{5}\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - 2$
- $n(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2$
- $p(x) = 3x^2 - 12x + 9$
- $r(x) = -\frac{1}{5}x^2 - x - \frac{13}{4}$
- $s(x) = 3(x-2)^2 - 3$
- $t(x) = x^2 + 4x + 5$
- $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{8}$

2) Certaines de ces fonctions ont la même courbe représentative.

a) Regrouper dans un tableau les associations faites à la question **1** en les triant par courbe.

b) Quel est le nombre maximum de fonctions associées à une courbe ?

Partie 2 : Images et antécédents

En utilisant l'expression la plus adaptée parmi celles de la question **2a**, déterminer,

1) par les fonctions f, g, h, k, l et m :

a) les images de 0 ; **b)** les éventuels antécédents de 0.

2) par les fonctions f puis k :

a) l'image de 2 ; **b)** les éventuels antécédents de 1.

Vérifier les calculs par lecture graphique.

Partie 3 : Sens de variation et extremum

1) Établir les tableaux de variations des fonctions représentées par les courbes $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_6$.

2) Comparer ces tableaux et les formes des fonctions représentées.

3) Démontrer ces sens de variations.

1. Forme canonique

DÉFINITION : Fonction polynôme de degré 2

Soit a, b, c trois nombres réels avec $a \neq 0$.
On appelle **fonction polynôme de degré 2** toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ pouvant être exprimée sous la forme :

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

On parle aussi de **fonction trinôme**.

PROPRIÉTÉ

Soit P une fonction polynôme du second degré exprimée sous la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$.
Il existe deux nombres réels α et β permettant d'écrire P sous le forme :

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

Cette forme s'appelle **forme canonique**.

PREUVE Elle est disponible en complément sur le manuel numérique.

2. Étude d'une fonction trinôme

PROPRIÉTÉ : Sens de variations

Soit a, α, β trois nombres réels et f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme canonique $f(x) = a\,(x - \alpha)^2 + \beta$.
Le sens de variation d'une fonction dépend du signe de a.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f avec $a > 0$	$\searrow$	β	$\nearrow$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f avec $a < 0$	$\nearrow$	β	$\searrow$

PREUVE La preuve est disponible en complément sur le manuel numérique.

PROPRIÉTÉ : Extremum

Soit a, α, β trois nombres réels.
f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme canonique $f(x) = a\,(x - \alpha)^2 + \beta$.
Sur $\mathbb{R}$, la fonction f admet β comme extremum. Il est atteint pour $x = \alpha$.

- C'est un maximum si α est négatif.
- C'est un minimum si α est positif.

PREUVE Les tableaux de variations établis précédemment prouvent la propriété.

Cours - Méthodes

PROPRIÉTÉ : Signes

Soit a, α, β trois nombres réels et f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Le signe d'une fonction trinôme dépend du signe de a et du signe de β.

- Si $a < 0$ et $\beta \leqslant 0$, alors la fonction est toujours négative.
- Si $a > 0$ et $\beta \geqslant 0$ alors la fonction est toujours positive.
- Dans les autres cas,
  - la fonction change de signe sur l'intervalle $]-\infty;\alpha[$;
  - la fonction change à nouveau de signe sur l'intervalle $]\alpha;+\infty[$.

PREUVE Les tableaux de variations établis précédemment prouvent la propriété.

MÉTHODE 1 Étudier une fonction trinôme du second degré

► Ex. 12 p. 156

Exercice d'application On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x-0,25)^2 - 8$.

Déterminer :

1) son sens de variation ;
2) son extremum ;
3) le signe de la fonction.

Correction Dans le cas de la fonction f :

- $\alpha = 0,25$
- $\beta = -8$
- $a = -2$

1) a est négatif donc la fonction f est croissante sur $]-\infty;0,25[$ et décroissante sinon.
2) Elle admet un maximum en $x = \alpha = 0,25$. Il vaut $f(0,25) = -8$.

x	$-\infty$	0,25	$+\infty$
$f(x)$	↗	-8	↘

3) La fonction f est négative sur $\mathbb{R}$.

3. Représentation graphique

DÉFINITION

La courbe représentative d'une fonction trinôme est une **parabole**.

PROPRIÉTÉ

Soit a, α, β trois nombres réels et f une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. La courbe représentative de cette fonction est une parabole qui admet un axe de symétrie : la droite d'équation $x = \alpha$.

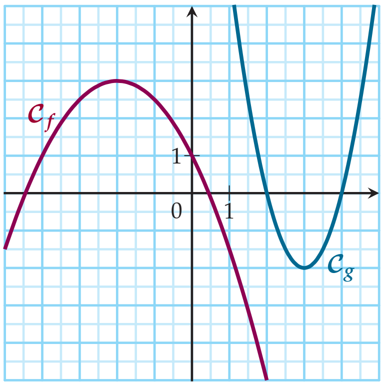
PREUVE La preuve est disponible en complément sur le manuel numérique.

Exemple Tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

- $f(x) = -0,5(x+2)^2 + 3$
- $g(x) = 2(x-3)^2 - 2$

Donner leurs sens de variations et leur éventuel extremum.

Correction



La fonction f :

- est croissante sur $]-\infty; -2[$;
- est décroissante sur $]-2; +\infty[$;
- elle admet un maximum en -2 qui vaut 3.

La fonction g :

- est décroissante sur $]-\infty; 3[$;
- est croissante sur $]3; +\infty[$;
- elle admet un minimum en 3 qui vaut -2.

MÉTHODE 2 Identifier la forme d'une fonction

► Ex. 25 p. 157

Exercice d'application Soit f, g, h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$
- $g(x) = 2(x+1)^2 - 8$
- $h(x) = 2(x-1)(x+3)$.

1) Montrer que f, g, h sont trois formes de la même fonction.

2) Répondre aux questions suivantes en utilisant la forme la plus adaptée.

   a) Chercher les éventuels antécédents de 0 et de -6.

   b) Déterminer les coordonnées du sommet de la courbe représentative de cette fonction.

   c) Calculer les images de 0, de 1 et de -1.

Correction

1) On développe g et h pour prouver qu'elles sont égales à f.
   $g(x) = 2(x+1)^2 - 8 = 2x^2 + 4x + 2 - 8 = 2x^2 + 4x - 6$
   $h(x) = (2x-2)(x+3) = 2x^2 + 6x - 2x - 6 = 2x^2 + 4x - 6$.
   f est la forme **développée**, g la forme **canonique** et h la forme **factorisée** du même trinôme.

2) a) Chercher les antécédents, c'est résoudre une équation.

   - Pour l'antécédent de 0, la forme la plus adaptée est la **forme factorisée**.
     On résout $h(x) = 2(x-1)(x+3) = 0$. Les antécédents de 0 sont 1 et -3.
   - Pour l'antécédent de -6, la plus pertinente est la **forme développée**.
     On résout $f(x) = 2x^2 + 4x - 6 = -6$. On obtient $2x^2 + 4x = 0$.
     On factorise l'expression : $x(2x+4) = 0$. Les antécédents de -6 sont 0 et -2.

   b) Pour chercher les coordonnées du sommet d'une parabole, la **forme canonique** est la plus pertinente. Ici, c'est g avec $\alpha = -1$.
   Donc les coordonnées du sommet de la parabole sont $(-1; -8)$.

   c) Calculer une image, c'est évaluer une expression. La forme la plus adaptée dépend de x.

   - $f(0) = -6$, l'image de 0 est -6.
   - $h(1) = 0$, l'image de 1 est 0.
   - $g(-1) = -8$, l'image de -1 est -8.

S'entraîner

Activités mentales

1 Que peut-on dire de

1) x^2 si $0 < x < 3$?
2) $2x^2$ si $x \leqslant -5$?
3) $-3x^2$ si $x \geqslant 3$?
4) $2x^2 - 3$ si $x < 2$?

2 Que peut-on dire de x si

1) $x^2 \geqslant 4$?
2) $x^2 \leqslant 5$?
3) $x^2 \leqslant -16$?
4) $(x-1)^2 < 0$?

3 Pour chacune des fonctions, déterminer en quelle valeur elle admet un minimum ou un maximum.

1) $-2x^2$
2) $f(x) = 2(x-1)^2 + 2$
3) $g(x) = -7(x+3)^2 - 5$
4) $h(x) = -\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + 2$

4 On donne f, une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(6) = f(2) = 3$. Peut-on en déduire :

1) son tableau de variations ?
2) la valeur de son extremum ? Où est-il atteint ?

5 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3(x+2)^2 - 1$.

Félix affirme que, sans calculatrice, il peut prouver que $f(3{,}2145) > f(2{,}987)$. Comment fait-il ?

6 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -7(x-5)^2 + 7$. Sans calculatrice, classer dans l'ordre croissant :

1) • $f(5{,}6)$ • $f(6{,}2)$ • $f(9{,}8)$
2) • $f(2{,}8)$ • $f(4{,}9)$ • $f(-1{,}2)$

7 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5(x+2)^2 - 3$.

1) Lydie affirme sans faire aucun calcul que $f(-3) = f(-1)$. Comment fait-elle ?
2) Sans calcul, trouver une autre égalité avec deux autres nombres.

8 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3(x+4)^2 - 1$.

1) Déterminer l'axe de symétrie de la représentation graphique de cette fonction.
2) Quelles sont les coordonnées de son sommet ?

9 Même consigne qu'à l'exercice **8** avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4(x-3)^2 + 1$.

10 Quelles sont les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3(x+1)^2 - 2$?

Différentes formes d'un trinôme

11 Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions trinômes ?

1) $f(x) = (3x-2) + (5x+4)$
2) $g(x) = (3x+1)(5x+4)$
3) $h(x) = 7x^2 - 8x + 1$

12 ► MÉTHODE 1 p. 154

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3(x-3)^2 + 5$.

1) Montrer que $f(x) = 3x^2 - 18x + 32$.
2) Choisir la forme la plus adaptée pour calculer chaque image puis calculer.
   a) $f(3)$ b) $f\left(\sqrt{2}\right)$ c) $f(0)$

13 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 4x - 5$.

1) Montrer que $f(x) = -2(x+1)^2 - 3$.
2) Calculer les images suivantes.
   a) $f(-1)$ b) $f\left(-\sqrt{3}\right)$ c) $f(0)$

14 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x-4)(1-x)$.

1) Développer et réduire l'expression de la fonction f.
2) Choisir la forme la plus adaptée pour calculer les images suivantes puis calculer.
   a) $f(1)$ b) $f\left(\frac{3}{4}\right)$ c) $f\left(\frac{4}{3}\right)$

15 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)^2 - 9$

1) Donner la forme factorisée de $f(x)$.
2) Donner sa forme développée.
3) Quels sont les antécédents de 0 par f ?

16 On considère une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-1)^2 - 4$. Résoudre $g(x) = 0$.

17 On considère une fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$.

1) Développer et réduire f.
2) Montrer que $f(x) = 2(x-2)(x-3)$.
3) Choisir la forme la plus adaptée pour calculer les images suivantes.
   a) $f(2)$ b) $f\left(\frac{5}{2}\right)$ c) $f(-1)$

18 Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner le nom de la forme sous laquelle elle est écrite.

1) $f(x) = 5x^2 - 7x + 1$
2) $g(x) = (x-1)(3x-4)$
3) $h(x) = 3(x-2)^2 + 1$
4) $i(x) = 3x^2 + 2x + 7$
5) $j(x) = (2x-8)(4-x)$
6) $k(x) = -4(x+7)^2 - 2$

19 Relier entre elles les expressions égales.

1)

Forme développée			Forme canonique
$-3x^2 - 6x - 5$	•	•	$3(x-3)^2 + 1$
$3x^2 - 18x + 28$	•	•	$-2(x+4)^2 - 1$
$-2x^2 - 4x - 2$	•	•	$-3(x+1)^2 - 2$
$4x^2 - 8x + 6$	•	•	$-2(x-1)^2 - 4$
$-2x^2 - 16x - 33$	•	•	$-2(x+1)^2$
$-2x^2 + 4x - 6$	•	•	$4(x-1)^2 + 2$

2)

Forme développée			Forme canonique
$-3x^2 - 6x - 7$	•	•	$3(x+4)^2 + 5$
$-3x^2 + 6x - 1$	•	•	$-3(x-1)^2 + 2$
$3x^2 + 24x + 53$	•	•	$-3(x+1)^2 - 4$
$3x^2 - 12x + 15$	•	•	$3(x+2)^2 - 7$
$3x^2 - 12x + 5$	•	•	$3(x-4)^2 + 1$
$3x^2 - 24x + 1$	•	•	$3(x-2)^2 + 3$

3)

Forme factorisée			Forme canonique
$3(x-1)(x+2)$	•	•	$3\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$
$3(x+2)(x-3)$	•	•	$3\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$
$3(x+1)(x+2)$	•	•	$3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{75}{4}$
$3(x-1)(x-2)$	•	•	$3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{27}{4}$
$3(x+3)(x+2)$	•	•	$3\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$

20 On considère h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x-1)^2 - 16$. Exprimer h sous forme factorisée puis sous forme développée.

21 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4(x+2)^2 - 25$. Exprimer f sous forme factorisée puis sous forme développée.

22 On considère g, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 9$. Exprimer g sous forme factorisée.

Sens de variations et extremum

23 On étudie le sens de variation sur $]-\infty; 3]$ de la fonction f définie par $f(x) = (x-3)^2 - 5$.
Recopier et compléter en justifiant chaque étape.
Soient a et b deux réels tels que $a < b \leqslant 3$.
$a - 3 \dots b - 3 \dots 0$
$(a-3)^2 \dots (b-3)^2$
$(a-3)^2 - 5 \dots (b-3)^2 - 5$
$f(a) \dots f(b)$
Donc f est … sur …

24 Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer pour quelle valeur de x elle admet un extremum.

1) $f(x) = 2(x-1)^2 + 2$
2) $g(x) = -7(x+3)^2 - 5$
3) $h(x) = -\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - 2$

25 ► MÉTHODE 2 p. 155
Démontrer que la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2(x+4)^2 - 5$ est croissante sur $[-4; +\infty[$.

26 Sur quel intervalle la fonction h, définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -2(x-3)^2 + 6$ est-elle croissante ?

27 Démontrer que la fonction m, définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = 3(x-4)^2 + 2$ est croissante sur $[4; +\infty[$.

28 Sur quel intervalle la fonction p, définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = -2(x+3)^2 - 4$ est-elle décroissante ?

29 On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4(x-7)^2 + 1$.
Quel est son sens de variation sur $\mathcal{I} = [0; 7]$?

30 On considère la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2(x+1)^2 - 3$.
Quel est son sens de variation sur $\mathcal{I} = [-1; 0]$?

31 On considère la fonction h, définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3(x+2)^2 + 1$.
Quel est son sens de variation sur $\mathcal{I} = [-3; -2]$?

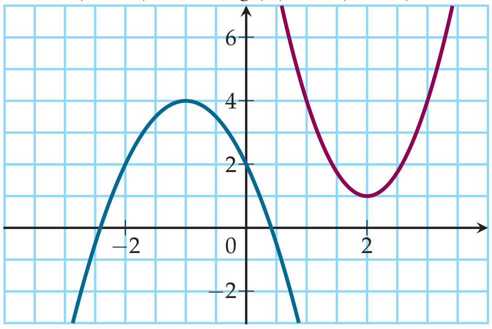
32 Déterminer les variations de la fonction polynôme du second degré h qui vérifie :
- $h(3) = 6$
- $h(6) = 2$
- $h(9) = 6$

33 Déterminer les variations de la fonction polynôme du second degré g qui vérifie :
- $g(1) = -3$
- $g(-2) = 0$
- $g(-5) = -3$

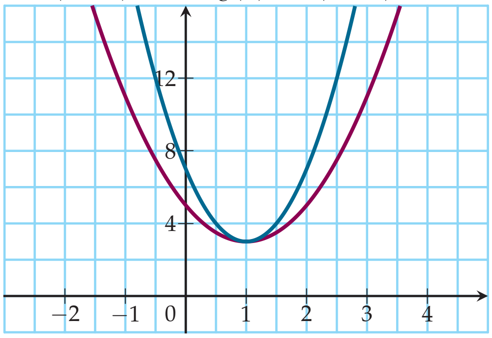
S'entraîner

34 Associer chaque courbe à la bonne fonction dans chacun des cas.

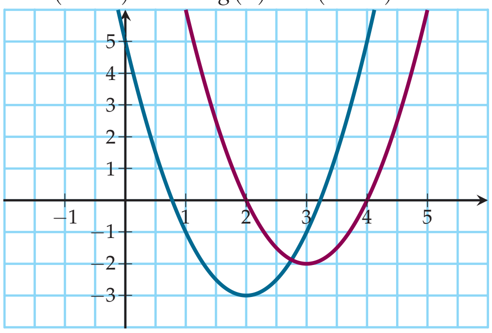
1) $f(x) = -2(x+1)^2 + 4$ et $g(x) = 3(x-2)^2 + 1$.



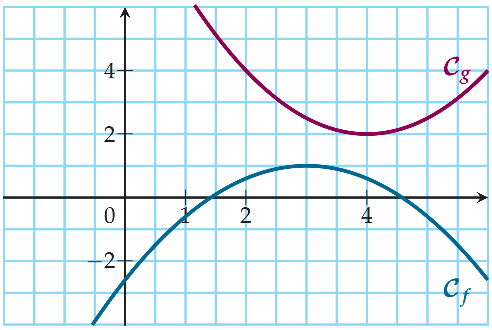
2) $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$ et $g(x) = 4(x-1)^2 + 3$.



3) $f(x) = 2(x-2)^2 - 3$ et $g(x) = 2(x-3)^2 - 2$.



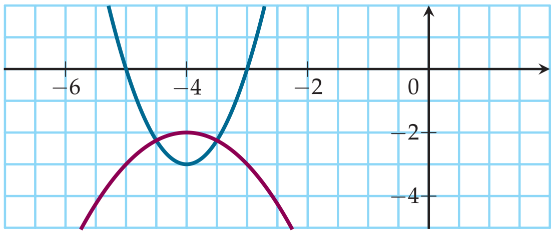
35 À partir des représentations graphiques des trinômes f et g définis sur $\mathbb{R}$, dresser leurs tableaux de variations.



36 Elsa utilise un logiciel pour représenter deux trinômes dans le même repère. Elle sait que :

$f(x) = 3x^2 + 24x + \ldots$ et $g(x) = -x^2 - \ldots x - 18$.

1) À partir des représentations graphiques, compléter les expressions des deux fonctions.



2) Déterminer graphiquement les coordonnées des extrema en précisant pour chacun si c'est un minimum ou un maximum.

3) Dresser les tableaux de variations des deux fonctions.

4) Quelle propriété est commune aux deux paraboles ?

5) Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.

37 Retrouve les tableaux de variations correspondants aux fonctions suivantes.

- $f(x) = -3(x+1)^2 + 2$
- $h(x) = 3(x-2)^2 + 1$
- $g(x) = 3(x-1)^2 + 2$
- $j(x) = 3(x-2)^2 - 1$

1)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
		↘	2	↗	

2)

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
		↗	2	↘	

3)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
		↘	1	↗	

4)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
		↘	-1	↗	

38 Même consigne qu’à l’exercice **37**

- $f(x) = 2(x-4)^2 + 5$
- $h(x) = 2(x-5)^2 + 4$
- $g(x) = 2(x+4)^2 - 5$
- $k(x) = 2(x-5)^2 - 4$

1)

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
	$\searrow$	-5	$\nearrow$

2)

x	$-\infty$	4	$+\infty$
	$\searrow$	5	$\nearrow$

3)

x	$-\infty$	5	$+\infty$
	$\searrow$	-4	$\nearrow$

4)

x	$-\infty$	5	$+\infty$
	$\searrow$	4	$\nearrow$

39 Dresser les tableaux de variations des fonctions.

1) $f(x) = 5(x-7)^2 + 4$
2) $g(x) = -(x-3)^2 + 7$
3) $h(x) = -4(x+1)^2 - 3$
4) $k(x) = 2(x+1)^2 - 3$
5) $l(x) = -2(x+3)^2 - 3$
6) $m(x) = 6(x-8)^2 + 2$

40 Dresser les tableaux de variations des fonctions.

1) $k(x) = \frac{1}{4}\left(-2x - \frac{4}{7}\right)^2 - 7$

2) $f(x) = -2\left(\frac{2}{3}x - 1\right)^2 - \frac{2}{5}$

41 Mettre sous forme canonique chacune des fonctions polynômes du second degré ci-dessous.

1) $f(x) = (3x-6)^2 - 1$
2) $g(x) = (-2x-4)^2 + 5$
3) $h(x) = (4x+6)^2 + 3$
4) $l(x) = (-3x+7)^2 - 2$
5) $m(x) = 2(3x-12)^2 + 4$
6) $n(x) = \frac{1}{4}(-2x+8)^2 - 7$
7) $p(x) = -\frac{1}{3}(3x-5)^2 + 6$

42 Déterminer trois fonctions trinômes f, g et h qui vérifient chacune le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$h(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$

43 Trouver deux fonctions polynômes du second degré f et g telles que :

1) f admet un maximum de 3 pour $x = 2$;
2) g admet un minimum de 2 pour $x = -1$.

44 Trouver deux fonctions trinômes f et g qui vérifient les conditions suivantes :

- f est croissante sur $[1; +\infty[$;
- f est positive sur $\mathbb{R}$;
- g admet un minimum en $C(0,5; -0,5)$;
- g est négative sur $[-3; 4]$.

45 On donne ci-dessous le tableau de variations d’une fonction trinôme.
Déterminer sur quel ensemble $f(x) \geqslant 2$.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	2 $\searrow$	0	$\nearrow$

46 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-2)^2 - 8$.

1) Calculer $f(4)$.
2) En déduire sur quel ensemble $f(x) \leqslant 0$.

47 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 16(x-3)^2 - 9$.

1) Factoriser g.
2) En déduire sur quel intervalle $g(x) > 0$.

Approfondir

48 **Avec un paramètre**

On considère l'équation **(E)** : $x^2 + 2x + m = 0$.

L'objectif de l'exercice est de déterminer pour quelles valeurs de m l'équation **(E)** admet au moins une solution.

1) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations ci-dessous.

a) $x^2 + 2x = 0$

b) $x^2 + 2x + 4 = 0$

2) **a)** Vérifier que pour tout réel x :
$x^2 + 2x + m = (x+2)^2 - 4 + m$.

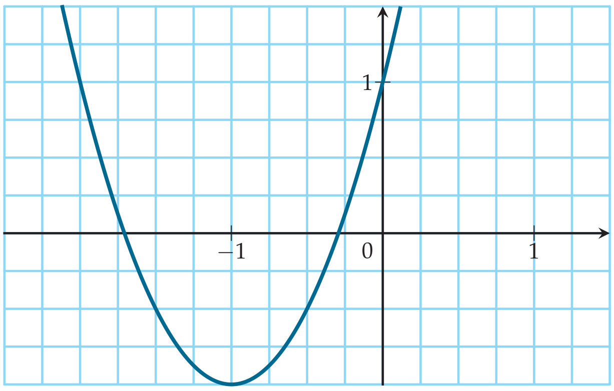
b) Justifier alors que résoudre l'équation **(E)** revient à résoudre l'équation $(x+2)^2 = 4 - m$.

c) Conclure.

49 Le graphique donne la courbe représentative d'un trinôme défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

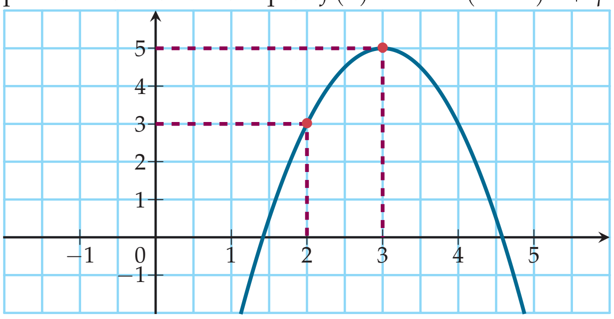
1) Donner par lecture graphique $f(0)$; $f(-1)$; $f(-2)$.

2) En déduire a, b et c puis l'expression de f.



50 **Avec la forme canonique**

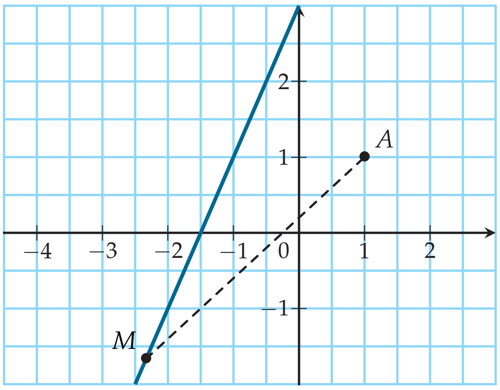
Ci-dessous est donnée la représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction trinône f définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.



1) Lire graphiquement les coordonnées du sommet de la parabole représentant la fonction f.

2) Déterminer l'expression de $f(x)$.

51 On considère la droite d d'équation $y = 2x + 3$ et A le point de coordonnées $(1;1)$. M est un point quelconque de la droite d et on note x l'abscisse de M.



1) On définit la fonction f par : $f(x) = AM^2$.

a) Justifier que l'ordonnée de M est $y_M = 2x + 3$.
Vérifier que $f(x) = 5x^2 + 6x + 5$.

b) Vérifier que l'expression $5(x+0,6)^2 + 3,2$ est la forme canonique du trinôme f.

c) Étudier les variations de la fonction f. Pour quelle valeur x_0 la fonction atteint-elle son extremum ?

d) M_0 est le point de la droite d tel que la distance AM^2 soit minimale. Justifier que les coordonnées de M_0 sont $(-0,6;1,8)$.

2) On considère le point B de coordonnées $(0;3)$.

a) Vérifier que B est un point de la droite d.

b) Déterminer la nature du triangle ABM_0.
Que peut-on dire des droites (AM_0) et d ?

52 Un artisan fabrique entre 0 et 60 vases par jour et estime que le coût de production de x vases est modélisé par la fonction C donnée par $C(x) = x^2 - 10x + 500$.
On note $R(x)$ la recette, en euros, correspondant à la vente de x vases fabriqués. Un vase est vendu 50 €.

1) Exprimer $R(x)$ en fonction de x.

2) Calculer le coût, la recette et le bénéfice réalisée lorsque l'artisan vend 50 vases.

3) Vérifier que le bénéfice, en euros, réalisé par l'artisan est donné par la fonction B dont l'expression est :
$B(x) = -x^2 + 60x - 500$.

4) **a)** Développer l'expression : $-(x-30)^2 + 400$.

b) En déduire le nombre de vases à vendre pour réaliser un bénéfice maximum.

53 Deux aires à comparer

$VITE$ est un carré de côté 10 cm. O est un point du segment $[VI]$. $VOLA$ est un carré avec A sur le segment $[VE]$. Le but est de trouver la position de O pour que l'aire du carré $VOLA$ soit supérieure à l'aire du triangle TIO.

1) On note x la longueur VO. On appelle f la fonction donnant l'aire du carré $VOLA$ et g la fonction donnant l'aire du triangle TIO en fonction de x. Donner les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$.

2) Quelle inéquation doit-on résoudre pour répondre au problème donné ?

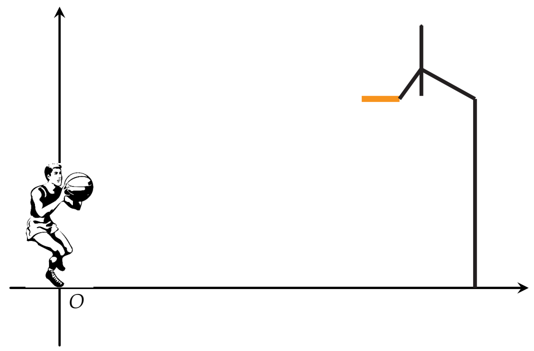
3) Voici une capture du logiciel **Xcas.**

$developper(x\hat{}2 - 4*(8-x))$
$5*x - 100 + x^2$
$factoriser(x\hat{}2 - 4*(8-x))$
(x-5)*(x+10)
$forme\_canonique(x\hat{}2 - 5*(8-x))$
$(x+2)^2 - 36$

Résoudre le problème donné en choisissant judicieusement l'écriture de $x^2 - 5(10-x)$.

54 Le lancer franc INFO

Lors d'un lancer franc au basket, le joueur se situe à environ 4,60 m du centre du panier, lui-même fixé à 3,05 m du sol.



Le joueur lance le ballon au niveau des épaules, c'est-à-dire à 1,65 m du sol. On admettra que, dans le repère choisi, la courbe décrite dans l'espace par le ballon est la parabole d'équation $y = 0,5x^2 - 1,95x + 1,65$, où x est la distance horizontale, en m, du ballon au joueur et y la hauteur, en m, du ballon au sol.

Peut-on affirmer que le joueur a réussi son panier ? Quelle est la hauteur maximale atteinte par le ballon ?

55 Coût moyen INFO

Une usine fabrique du dissolvant liquide avec une production maximale quotidienne de 1 500 L. Lorsqu'elle produit x centaines de litres par jour, le coût de production, en euros, est donné par $C(x) = x^2 + 8x + 64$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la quantité à produire pour minimiser le coût moyen.

1) Déterminer, par le calcul, le coût moyen lorsque l'usine fabrique 500 L, 1 000 L et 1 200 L.

2) Sur la courbe du coût (notée $\mathcal{C}$), sont placés les points M_1, M_2 et M_5 d'abscisses respectives 5, 10 et 15.

Déterminer les coefficients directeurs des droites (OM_1), (OM_2) et (OM_5).

Dans la suite de l'exercice, on admettra que le coût moyen de production de x centaines de litres est donné par le coefficient directeur de la droite (OM), avec M, point de la courbe $\mathcal{C}$ du coût d'abscisse x.

3) **Avec un logiciel de géométrie dynamique**

a) Tracer la courbe du coût sur son ensemble de définition.

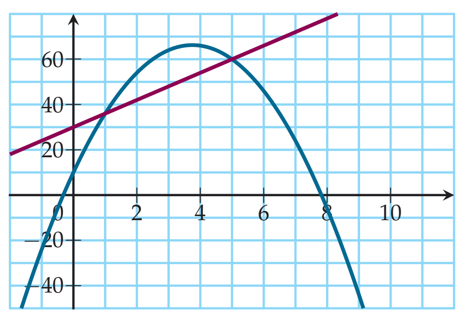
b) Placer un point M quelconque sur la courbe $\mathcal{C}$. Faire afficher le coefficient directeur de (OM).

c) Déplacer le point M et déterminer sa position pour laquelle le coût moyen semble minimal.

d) Démontrer que la droite d'équation $y = 24x$ et la courbe $\mathcal{C}$ n'ont qu'un seul point d'intersection.

56 Positions relatives

Voici la droite (d) d'équation $y = 6x + 30$ et la parabole $\mathcal{P}$ représentant la fonction $f : f(x) = -4x^2 + 30x + 10$.



1) Démontrer, qu'étudier les positions relatives de la droite d et de la parabole $\mathcal{P}$ revient à résoudre l'inéquation $-4x^2 + 24x - 20 \geqslant 0$.

2) Vérifier que, pour tout réel x :
$-4x^2 + 24x - 20 = -4(x-3)^2 + 16$.

3) Résoudre alors l'inéquation $-4x^2 + 24x - 20 \geqslant 0$.

4) Conclure.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Reconnaître les formes d'une fonction trinôme :
- forme factorisée
- forme développée
- forme canonique

Choisir la forme la plus pertinente pour
- calculer une image ou un antécédent
- déterminer le sens de variation
- déterminer l'extremun de la fonction

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

57 Parmi les fonctions suivantes, quels sont les trinômes du second degré ?

a) $4x^2 - 5x + 3$ b) $4x^3 - 5x^2 - 3$ c) $4x - 3$ d) $6x^2 - 5$

58 Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui sont des formes canoniques de trinômes ?

a) $(x-2)^2$ b) $(3x-4)^2 - 8$ c) $-2(x+6)^2 + 7$ d) $5(x-3)^2 + 6x$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 12x + 54$.

59 Quelle est la forme canonique de la fonction f ?

a) $(x-3)(-2x-18)$ b) $-2(x-3)(x+9)$ c) $-2(x+3)^2 + 72$ d) $-2(x+3)^2 - 54$

60 Quelle est la forme factorisée de la fonction f ?

a) $(x-3)(-2x-18)$ b) $-2(x-3)(x+9)$ c) $-2(x-3)^2 + 72$ d) $-2(x+3)^2 - 18$

61 Pour calculer l'image d'un nombre par la fonction f, quelle est la forme la plus pertinente :

a) la forme factorisée
b) la forme développée
c) la forme canonique
d) cela dépend des valeurs

62 Pour calculer l'antécédent de 0 par la fonction f, quelle est la forme la plus pertinente :

a) la forme factorisée
b) la forme développée
c) la forme canonique
d) cela dépend des valeurs

63 Pour déterminer le sens de variation de la fonction f, quelle est la forme la plus pertinente :

a) la forme factorisée
b) la forme développée
c) la forme canonique
d) cela dépend des valeurs

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -9(x+2)^2 - 15$.

64 Sur l'intervalle $]-\infty; -2[$, la fonction f est :

(a) croissante (b) décroissante (c) non monotone

65 Sur $\mathbb{R}$, la fonction f admet :

(a) un maximun en -2 (b) un minimun en -2 (c) on ne peut pas savoir

66 Sur $\mathbb{R}$, la fonction f est :

(a) positive (b) négative (c) change de signe

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2(x+1)^2 + 18$.

67 Sur l'intervalle $]-4; 2[$, la fonction g est :

(a) croissante (b) décroissante (c) on ne peut pas répondre

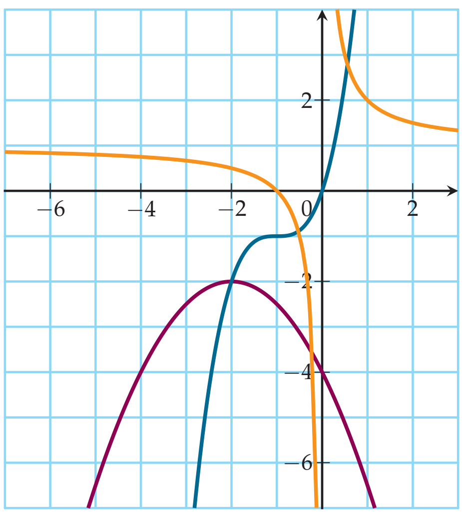
68 Sur $\mathbb{R}$, la fonction g admet :

(a) un maximum en -1 (b) un minimum en -1 (c) on ne peut pas répondre

69 Sur $\mathbb{R}$, la fonction g est :

(a) positive (b) négative (c) change de signe

Voici les représentations graphiques de trois fonctions.



70 Quelle courbe représente une fonction trinôme ?

(a) La courbe jaune
(b) La courbe bleue
(c) La courbe rouge

71 La représentation graphique de la fonction trinôme admet :

(a) comme axe de symétrie, la droite d'équation $x = 0$
(b) comme centre de symétrie, le point de coordonnées $(-1, -1)$
(c) comme axe de symétrie, la droite d'équation $x = -2$

Travaux pratiques

TP 1 Modélisations en sciences physiques

Un des phénomènes étudiés en sciences physiques au lycée est la chute libre des corps.
Un corps en chute libre est un corps qui n'est soumis qu'à son poids.

1 Lâcher d'une bille sans vitesse initiale

On lâche une bille à 5 m du sol, sans vitesse initiale. Voici les relevés de cette expérience :

Temps (en s)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Distance parcourue (en m)	0,05	0,20	0,44	0,78	1,23	1,76	2,4	3,14	3,97	4,90

1) Dans un repère orthonormé, tracer le nuage de points correspondant au tableau ci-dessus. (Unité en abscisses : 10 cm pour 1 s, unité en ordonnées : 2 cm pour 1 m.)

2) Peut-on modéliser cette situation à l'aide d'une fonction affine ? Argumenter.

3) Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

Temps t (en s)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
t^2										
Distance d (en m)	0,05	0,20	0,44	0,78	1,23	1,76	2,4	3,14	3,97	4,90

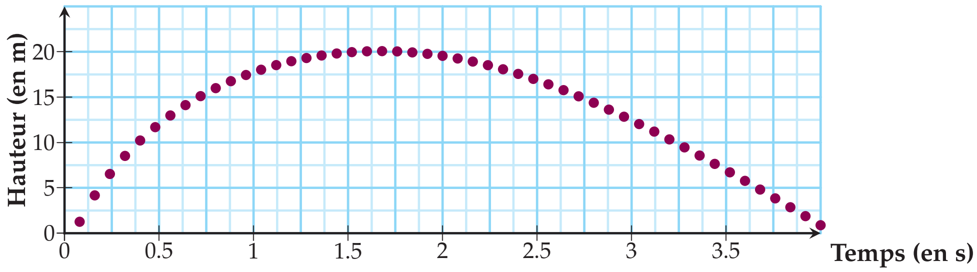
4) Quelle relation semble-t-il y avoir entre la deuxième ligne et la troisième ligne du tableau ? En déduire une relation entre t et d.

5) On lâche une bille à 6 m du sol. À quel instant touche-t-elle le sol ?

Un corps en chute libre aura sa position décrite par **une fonction du second degré** du temps t, appelée équation horaire du mouvement.

2 Étude du lancer d'une fusée à eau

Une expérience consiste à lancer une fusée à eau. À l'aide d'une caméra et d'un logiciel adapté, on relève la hauteur de la fusée en fonction du temps.



1) À quelle hauteur se trouve la fusée au bout de 1 s ? au bout de 3 s ?

2) On suppose que la hauteur en fonction du temps suit l'équation horaire de la chute libre, soit : $d(t) = -\frac{1}{2}g\,(t-\alpha)^2 + \beta$, avec g accélération de la pesanteur ($g \approx 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$).

a) Repérer le point le plus haut de la trajectoire. En déduire les valeurs de α et de β.

b) En déduire l'expression de $d(t)$.

c) Sur le graphique, tracer la parabole représentant d.
Que peut-on observer ? Ce modèle est-il satisfaisant ? Justifier.

3) **a)** Quelle fonction affine $d(t) = at + b$ peut modéliser l'équation horaire pour $t > 3$ s ?

b) Sur le graphique précédent, représenter la fonction affine d sur l'intervalle $[3; 4]$.

c) Comment expliquer ce phénomène ?

TP 2 Famille de fonctions

INFO

Soit k un entier relatif. On souhaite étudier les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = -x^2 + kx.$$

À chaque valeur de k correspond une fonction f_k.
On note $\mathcal{P}_k$ la parabole représentant la fonction f_k.

1 Étude du cas particulier de la fonction f_2

Dans cette partie, on prendra $k = 2$.

1) Donner l'expression de $f_2(x)$.

2) Développer $-(x-1)^2 + 1$. Préciser son maximum sur $\mathbb{R}$.

3) Dresser son tableau de variations.

2 Étude graphique de la famille de fonctions

Dans cette partie, on utilise un logiciel de géométrie dynamique.

1) a) Représenter, dans un même repère, f_1, f_2, f_4, f_{-2} et f_{-6}.

b) Les cinq paraboles semblent passer par un même point, S. Préciser ses coordonnées.

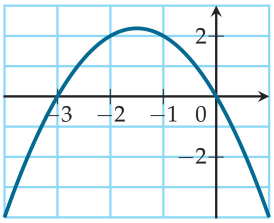
c) Calculer $f_k(0)$. Que vient-on de vérifier ?

2) On a représenté ci-contre une parabole de la famille étudiée .

a) Déterminer graphiquement les antécédents de 0.

b) Factoriser $f_k(x) = -x^2 + kx$.
En déduire les solutions de l'équation $f_k(x) = 0$.

c) À quelle valeur de k correspond la parabole ci-contre ?



3 Une propriété de la famille de fonctions

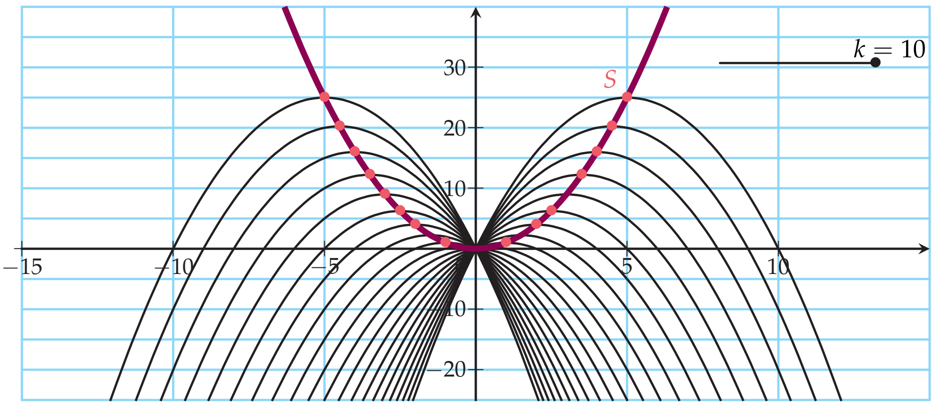
Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique.

1) Créer un paramètre k pouvant varier de -10 à 10, avec un pas de 1.
Créer la fonction $x \mapsto -x^2 + kx$.

2) Faire varier k. Vérifier les résultats des questions précédentes.

3) Activer la trace de la parabole puis faire varier k.
Parmi ces paraboles, sélectionner $\mathcal{P}_5$ et $\mathcal{P}_{-5}$. Les colorier en bleu.

4) Que représente le point S pour la parabole $\mathcal{P}_k$? Activer sa trace.
Tracer, en rouge, la courbe de la fonction carrée. Que constate-t-on ?



Travaux pratiques

TP 3 De l'utilité des racines

1 Pour factoriser

On étudie une méthode de factorisation.

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 19x + 18$.

a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
Vérifier que les deux solutions trouvées graphiquement sont bien exactes.
On appelle a et b ces deux solutions.

b) Développer $(x - a)(x - b)$.

c) En déduire une factorisation de $f(x)$.

2) Reprendre les questions précédentes avec $g(x) = x^2 - x - 0,75$ et $h(x) = 3,6x^2 - 14,4x - 18$.

2 Pour optimiser

Dans cette partie, on considère les trinômes f, g et h de la partie précédente.

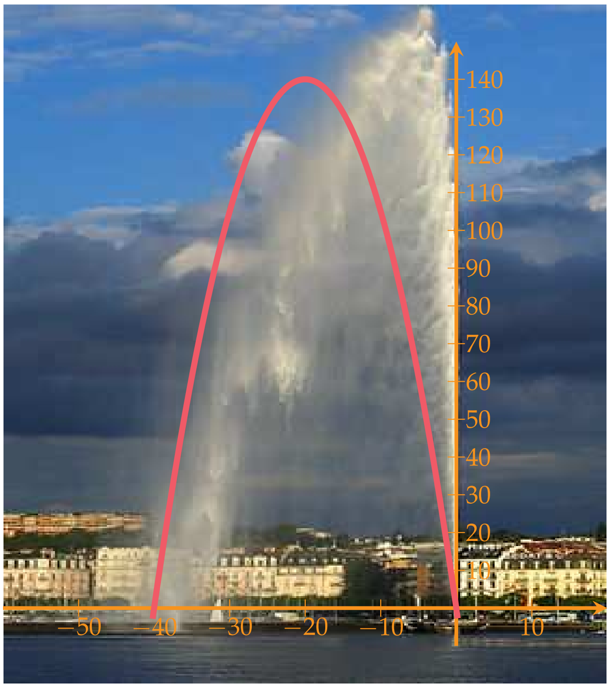
1) Par des considérations de symétrie, déterminer les coordonnées du sommet des paraboles.

2) En déduire la forme canonique de chacun des trinômes.

Récréation, énigmes

Un symbole

Le symbole de Genève est le "Jet d'eau", une fontaine de près de 140 m de haut.
L'eau, propulsée dans le ciel bleu sur fond de montagnes, retombe à une soixantaine de mètres plus loin.



On assimile la courbe formée par le jet d'eau à la parabole $\mathcal{P}$ dessinée ci-dessus.
Retrouver la fonction du second degré associée à celle-ci.

SOLUTIONS

Chapitre F5

Fonctions polynômes du second degré

Auto-évaluation

1

1) $x^2 + 2x + 1$
2) $x^2 - 6x + 9$
3) $x^2 - 3x - 0,25$
4) $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{9}$
5) $5x^2 - 25x + 20$
6) $-2x^2 + 4x + 16$
7) $7x^2 + 70x + 147$
8) $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{20}x - \frac{1}{20}$

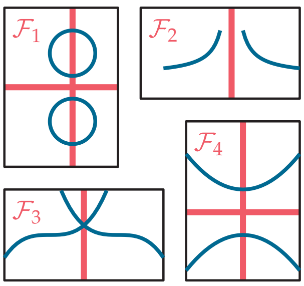
2

1) $-5/3$ **3)** $-17/18$
2) $13/42$ **4)** $-3/48$

3

1) $2/7$ **3)** -3
2) $-3/4$ **4)** $5/32$

4



S'entraîner

1

1) $0 < x^2 < 9$
2) $2x^2 \geqslant 50$
3) $-3x^2 \leqslant -27$
4) $5 > 2x^2 - 3 \geqslant -3$

2

1) $x \in]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$
2) $x \in \left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right]$
3) x n'existe pas.
4) x n'existe pas.

3

1) 0 **3)** -3
2) 1 **4)** $-0,25$

4

1) non **2)** non, en 4

5 f est croissante sur $[-2; +\infty[$.

6

1) $f(5,6) > f(6,2) > f(9,8)$
2) $f(-1,2) < f(2,8) < f(4,9)$

7

1) La courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -2$.
2) $f(2) = f(-6)$

8

1) $x = -4$. **2)** $(-4; -1)$

9

1) $x = 3$. **2)** $(3; 1)$

10

f est croissante sur $]-\infty; -1[$, décroissante sinon.

12

1) développer l'expression
2) a) canonique :
$3(3-3)^2 + 5 = 5$
b) développer :
$3\left(\sqrt{2}\right)^2 - 18\sqrt{2} + 32 =$
$38 - 18\sqrt{2}$
c) développer :
$0^2 - 18 \times 0 + 32 = 32$

25 a est positif et $\alpha = -4$

Auto-évaluation QCM

57 a d
58 a c
59 c
60 b
61 d
62 a
63 c
64 a
65 a
66 b
67 c
68 b
69 a
70 c
71 c