FONCTIONS

3

Variations et extrema

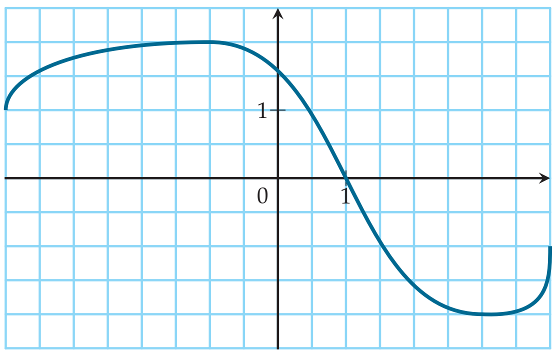
Connaissances du collège nécessaires à ce chapitre

- Calculer l'image d'un nombre par une fonction
- Lire une image par une fonction sur un graphique
- Reconnaître une fonction affine
- Connaître les effets des opérations sur l'ordre des nombres

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 La représentation graphique d'une fonction f est donnée ci-dessous.



1) Sur quel axe lit-on les images de nombres par la fonction f ?

2) Lire :

a) $f(-4)$ **b)** $f(-1)$ **c)** $f(3)$ **d)** $f(4)$

2 La fonction g est définie par $g(x) = 3x - 4$.
Par la fonction g, quelle est l'image de :

1) 0 ? **2)** $\dfrac{2}{3}$?

3 Déterminer les fonctions affines.

1) $f(x) = 2x$

2) $g(x) = \dfrac{5x-7}{4}$

3) $h(x) = (4x-1)^2$

4) $m(x) = (x+5)^2 - x^2$

4 a est un nombre tel que $a \leqslant 8$.
Que peut-on dire de :

1) $a + 4$?
2) $a - 4$?
3) $a \times 4$?
4) $a \times (-4)$?
5) $a \div 4$?
6) $a \div (-4)$?

5 Soit a et b deux nombres tels que $a < b < -2$.
Que peut-on dire de :

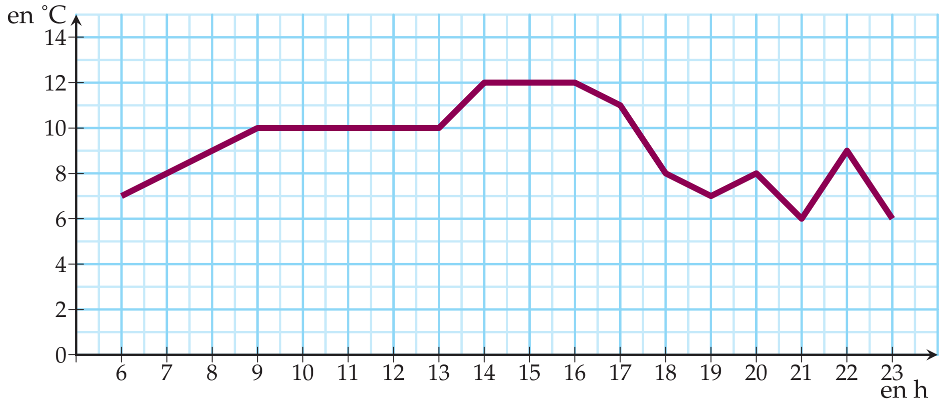
1) $a + b$?
2) $a - b$?
3) $\dfrac{a}{b}$?
4) ab ?

Voir solutions p. 133

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 En Bretagne, il fait beau... plusieurs fois par jour !

Aurore a un capteur qui relève les températures en continu.
Voici ce qu'elle a obtenu dans son jardin de Saint-Brieuc le lundi 30 décembre 2013.



1) Donner la température à 9 h et à 17 h.

2) À quelle(s) heure(s) atteint-on
  a) la température de 8°C ?
  b) La température minimale ?
  c) La température maximale ?

3) Sur quelle(s) tranche(s) horaire(s)
  a) la température croît-elle ? Décroît-elle ?
  b) La température reste-t-elle constante ?

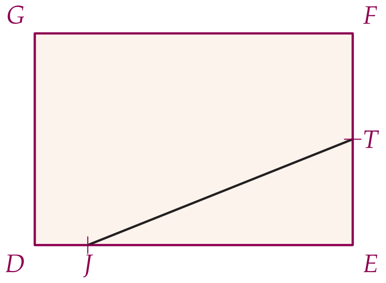
4) Décrire les variations de la température en fonction du temps.

ACTIVITÉ 2 Dans la cour de l'école

À Mathyville, les enfants aiment bien les jeux de réflexion. Ils ont inventé le jeu suivant :

> Un élève dit « le pirate » cache un « Trésor » dans la cour rectangulaire de l'école.
> Ensuite, il donne au joueur une carte au trésor qui indique comment évolue la distance du joueur au trésor lorsque le joueur fait le tour de la cour en restant sur son bord.
> Le joueur doit utiliser ce message pour trouver le Trésor. Le joueur ne peut faire le déplacement à l'intérieur de la cour et doit utiliser seulement ses capacités de réflexion.

Voici un exemple : sur le schéma ci-dessous, le rectangle $DEFG$ représente la cour de largeur 40 pas et de longueur 60 pas et le trésor (T) est placé au milieu de $[EF]$.



Le déplacement imaginaire du joueur (J) se fait sur le bord de ce rectangle, en partant de (D), dans le sens inverse du sens de rotation des aiguilles d'une montre.
Voici les phrases du message qui permet de repérer le Trésor :

> Entre 0 et 80 pas :
> ta distance au trésor T diminue.
> Puis jusqu'à 160 pas :
> ta distance au trésor T augmente.
> Ensuite, jusqu'à 180 pas :
> ta distance au trésor T diminue.
> Enfin, cette distance augmente.

1) Créer le message qui correspond à un Trésor placé en F.

2) Créer le message qui correspond à un Trésor placé au milieu de $[FG]$.

3) Retrouver la position du Trésor indiquée grâce au message suivant :

> Ta distance au trésor T
> - diminue jusqu'à 40 pas,
> - augmente jusqu'à 60 pas,
> - diminue jusqu'à 90 pas,
> - augmente jusqu'à 100 pas,
> - diminue jusqu'à 120 pas,
> - augmente jusqu'à 160 pas,
> - diminue jusqu'à 170 pas,
> - augmente jusqu'à 200 pas.
>
> Où est le Trésor ?

4) Les enfants trouvent que cela fait beaucoup de phrases !
Ils décident de mettre en place un codage qui évite de faire autant de phrases. Voici le codage adopté pour le premier exemple ci-dessus (le Trésor étant situé au milieu de $[EF]$).

Compteur de pas	0		80		160		180		200
Variations de la distance JT		↘		↗		↘		↗	

Proposer, avec ce codage, le message correspondant au second message ci-dessus.

5) Proposer, avec ce codage, le message permettant de trouver le Trésor placé en G.

6) En utilisant le message codé ci-dessous, retrouver la position du Trésor.

Compteur de pas	0		30		60		130		200
Variations de la distance JT		↘		↗		↘		↗	

7) Le professeur de mathématiques, qui passe dans la cour, aperçoit les enfants jouant à ce jeu. Après avoir vu le message ci-dessus, il décide, en lien avec la leçon en cours sur les fonctions, de proposer aux élèves quelques évolutions du message codé et donne en exemple celui de la question 3. Tout d'abord afin de limiter les écritures, il appelle :

- x la valeur indiquée par le compteur de pas ;
- $f(x)$ la distance JT correspondant à une valeur de x
  en faisant remarquer que cette distance est fonction de x.

Ensuite, il propose de compléter le message en portant certaines distances importantes comme ci-dessous (message de la question **3**).
Il prétend que ce sera une aide pour trouver le Trésor : est-ce vrai ?

x	0		40		60		90		100		120		160		170		200
Variations de $f(x)$	50	↘	30	↗	$10\sqrt{13}$	↘	20	↗	$10\sqrt{5}$	↘	10	↗	$10\sqrt{10}$	↘	40	↗	50

8) Recopier, modifier et compléter, en utilisant la méthode du professeur de mathématiques, les deux messages codés des questions 4 et 6.

Cours - Méthodes

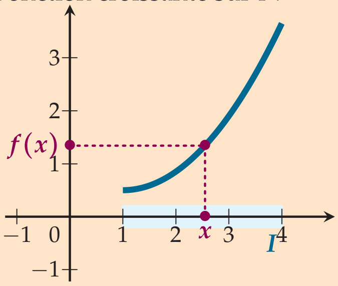
1. D'un point de vue graphique

A. Fonction croissante, décroissante, constante

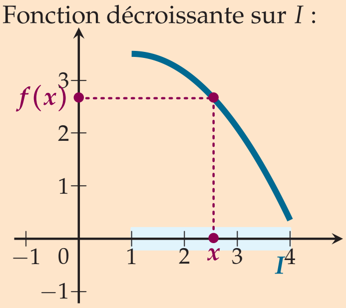
DÉFINITION : Intuitive

- On dit que f est **croissante** sur un intervalle I lorsque :
  si x augmente sur I alors $f(x)$ augmente.
- On dit que f est **décroissante** sur un intervalle I lorsque :
  si x augmente sur I alors $f(x)$ diminue.

Fonction croissante sur I :

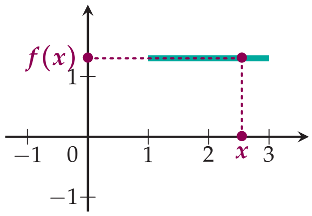


Fonction décroissante sur I :



REMARQUES : Soit f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
On voit sur un graphique que :

- f est croissante sur I lorsque $\mathcal{C}_f$ **« monte »** sur I ;
- f est décroissante sur I lorsque $\mathcal{C}_f$ **« descend »** sur I.
- Lorsque sur un intervalle, la courbe est **horizontale**, on dit que la fonction est **constante**. On considère qu'elle est à la fois croissante et décroissante.
- Une fonction **qui ne change pas de sens de variations** sur un intervalle est dite **monotone** sur cet intervalle.



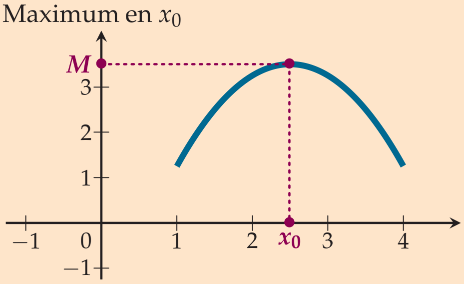
B. Maximum et minimum d'une fonction

DÉFINITION : Intuitive

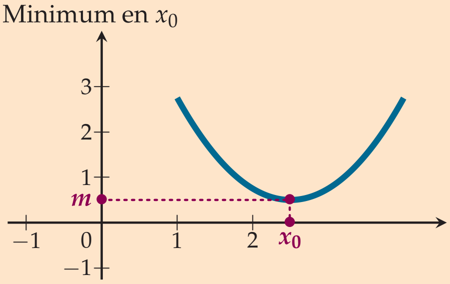
Sur un intervalle I,

- le **maximum** d'une fonction f est la plus grande des valeurs prises par $f(x)$;
- le **minimum** d'une fonction f est la plus petite des valeurs prises par $f(x)$.

Maximum en x_0



Minimum en x_0



DÉFINITION : Tableau de variations

Un **tableau de variations** regroupe toutes les informations concernant les variations d'une fonction sur son domaine de définition.

MÉTHODE 1 Dresser un tableau de variations

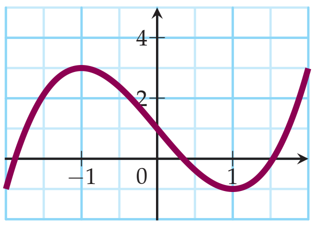
► Ex. 6 p. 121

Un tableau de variations comporte deux lignes.

- Aux extrémités de la 1e ligne, on trouve les **bornes** du domaine de définition de la fonction. Entre les bornes, on place d'**éventuelles** valeurs particulières.
- Le sens de variation de la fonction est indiqué sur la 2e ligne par **une ou plusieurs flèches** sur les intervalles où elle est monotone : ↗ pour croissante et ↘ pour décroissante.
- Les valeurs pour lesquelles la fonction **n'est pas définie** sont indiquées par une double barre verticale sur la deuxième ligne.
- On indique **au bout des flèches** les images des valeurs de la 1re ligne.

Exercice d'application

Dresser le tableau de variations de la fonction définie sur $[-2; 2]$ par la courbe ci-dessous.



Correction

x	-2		-1		1		2
$f(x)$		↗	3	↘	-1	↗	

2. D'un point de vue algébrique

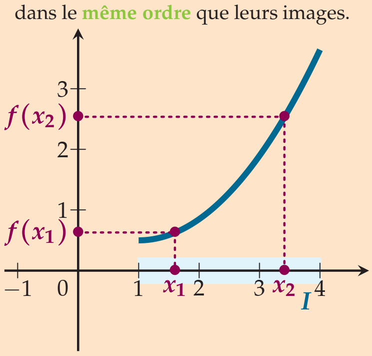
A. Variations d'une fonction

DÉFINITION : Croissance, décroissance sur un intervalle

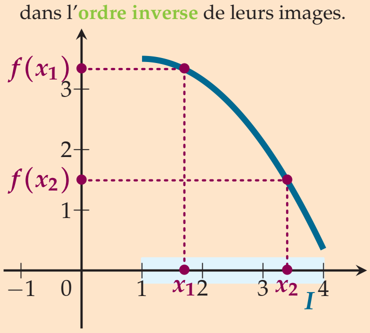
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_1 et x_2 deux nombres de I.

- Si $x_1 \leqslant x_2$ implique $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ alors f est dite **croissante** sur I.
- Si $x_1 \leqslant x_2$ implique $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ alors f est dite **décroissante** sur I.

f est croissante sur I :
deux nombres de I sont rangés
dans le même ordre que leurs images.



f est décroissante sur I :
deux nombres de I sont rangés
dans l'ordre inverse de leurs images.



PROPRIÉTÉ : Tableau de variations des fonctions affines et de la fonction inverse

Le sens de variation de la fonction affine dépend du signe de a.

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax+b$ avec $a>0$	↗	

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax+b$ avec $a<0$	↘	

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘	‖	↘

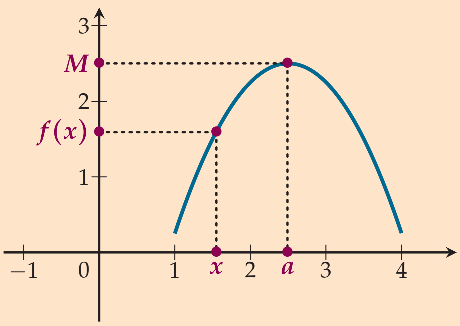
PREUVE

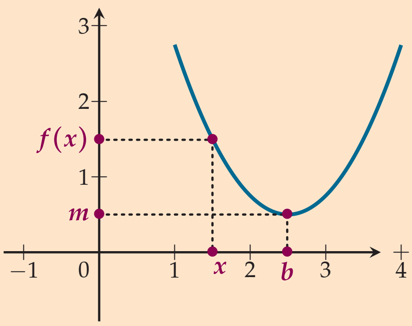
- On considère une fonction f tel que $f(x) = ax + b$ et deux nombres tels que $x_1 < x_2$.
  Si $a < 0$, $ax_1 > ax_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$. La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.
  Si $a > 0$, $ax_1 < ax_2$ et $f(x_1) < f(x_2)$. La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
- La preuve du sens de variation de la fonction inverse est l'objet de l'exercice **32**.

B. Maximum et minimum d'une fonction

DÉFINITION : Maximum, minimum et extremum d'une fonction

- Dire que f admet un **maximum** en a sur l'intervalle I signifie que :
  Il existe un réel M tel que pour tout x dans I : $f(x) \leqslant M$ et $M = f(a)$.
- Dire que f admet un **minimum** en b sur l'intervalle I signifie que :
  Il existe un réel m tel que pour tout x dans I : $f(x) \geqslant m$ et $m = f(b)$
- Un **extremum** est le terme générique pour désigner un maximum ou un minimum.





PROPRIÉTÉ : Tableau de variations de la fonction carrée

- La fonction carrée est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- Elle admet, sur $\mathbb{R}$, un minimum en 0.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	↘	0	↗

PREUVE La preuve est l'objet de l'exercice **31**.

S'entraîner

Activités mentales

1 Sans utiliser de calculatrice, comparer :

1) $(-4,5)^2$ et $(-2,5)^2$

2) $(\sqrt{5})^2$ et $(1,7)^2$

3) $\dfrac{1}{5^2}$ et $\dfrac{1}{3^2}$

4) $(-5)^2$ et $(3,5)^2$

2 Sans utiliser de calculatrice, comparer :

1) $\dfrac{1}{25}$ et $\dfrac{1}{35}$

2) $-\dfrac{1}{41}$ et $-\dfrac{1}{92}$

3) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

4) $-\dfrac{1}{8}$ et $\dfrac{1}{3}$

3 Déterminer le sens de variations de chacune des fonctions affines définies ci-dessous :

1) $f_1(x) = -3x + 10$

2) $f_2(x) = \dfrac{x}{2} - 4$

3) $f_3(x) = -3 + 2x$

4) $f_4(x) = -\dfrac{2x}{7} + \dfrac{3}{5}$

4 Une fonction f possède les propriétés ci-dessous :

- elle est définie sur $[-3; 5]$;
- elle est croissante sur $[-3; -1]$;
- elle est décroissante sur $[-1; 4]$;
- elle est croissante sur $[4; 5]$;
- sur l'intervalle $[-3; 4]$, son maximum vaut 6 ;
- sur l'intervalle $[-1; 5]$, son minimum vaut -3 ;
- l'image de -3 est 1 ;
- 5 est un antécédent de 7.

Dresser le tableau de variations de cette fonction

5 Une fonction g possède les propriétés ci-dessous :

- elle est définie sur $[-7; 4]$;
- elle est décroissante sur $[-7; -3]$;
- elle est croissante sur $[-3; 0]$;
- elle est décroissante sur $[0; 2]$;
- elle est croissante sur $[2; 4]$;
- sur l'intervalle $[-7; 0]$, son minimum vaut -5 ;
- sur l'intervalle $[-3; 2]$, son maximum vaut 8 ;
- sur l'intervalle $[0; 4]$, son minimum vaut -1 ;
- l'image de -7 est 1 ;
- 4 est un antécédent de 6.

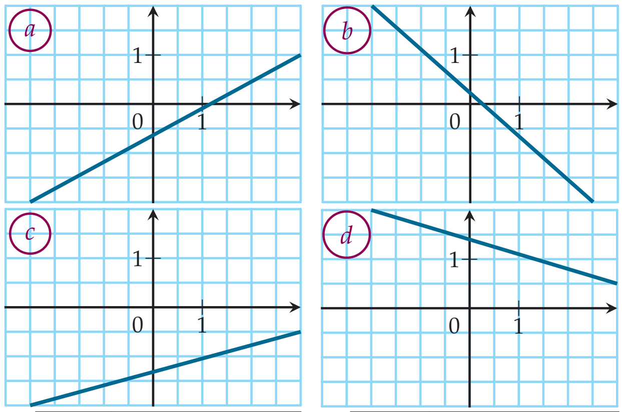
Trouver les erreurs qui se sont glissées dans le tableau de variations de cette fonction :

x	-7		-3		0		2		6
$f(x)$	2	↘	-5	↗	8	↘	-3	↗	4

Point de vue graphique

6 ► MÉTHODE 1 p. 119

Associer chaque courbe à son tableau de variations.



1)

x	-2		3
$f(x)$	2	↘	$0,5$

2)

x	$-2,5$		3
$f(x)$	-2	↗	$-0,5$

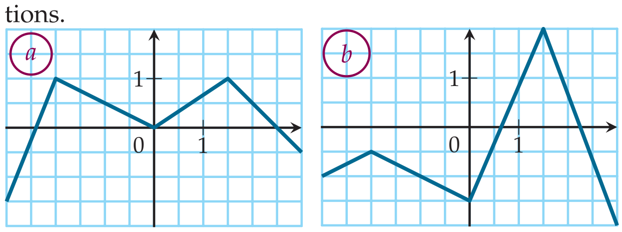
3)

x	$-2,5$		3
$f(x)$	-2	↗	1

4)

x	-2		$2,5$
$f(x)$	2	↘	-2

7 Associer chaque courbe à son tableau de variations.



1)

x	-3		-2		0		$1,5$		3
$f(x)$	-1	↗	$-0,5$	↘	$-1,5$	↗	2	↘	-2

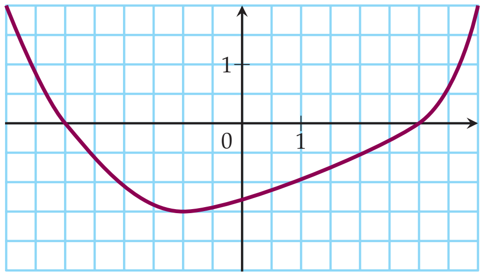
2)

x	-3		-2		0		$1,5$		3
$f(x)$	$-1,5$	↗	1	↘	0	↗	1	↘	$-0,5$

S'entraîner

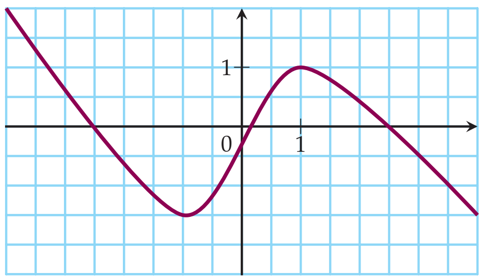
8 Compléter le tableau de variations proposé à partir de représentation graphique ci-dessous.

x	-4		4
$f(x)$	2		2



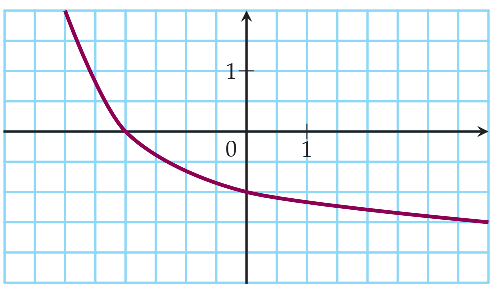
9 Même consigne que l'exercice **8**.

x	-4	$\dots$		$\dots$	$\dots$
$f(x)$	$\dots$	0	$\dots$	1	$-1{,}5$



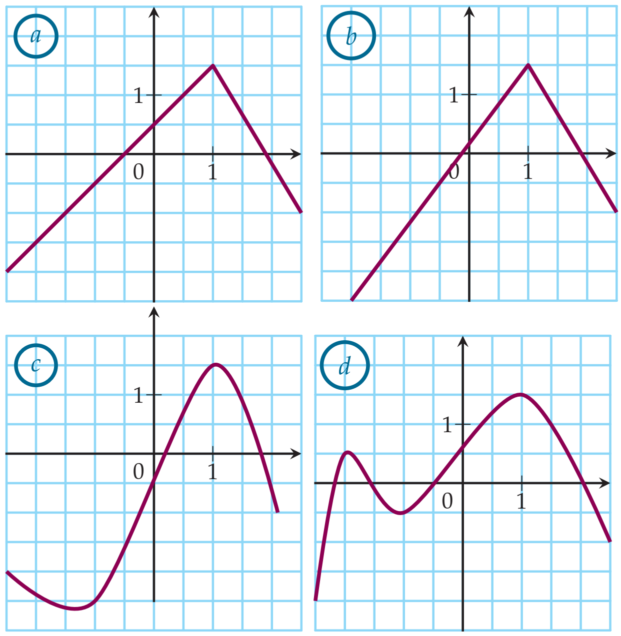
10 Même consigne que l'exercice **8**.

x	-3	$\dots$
$f(x)$		

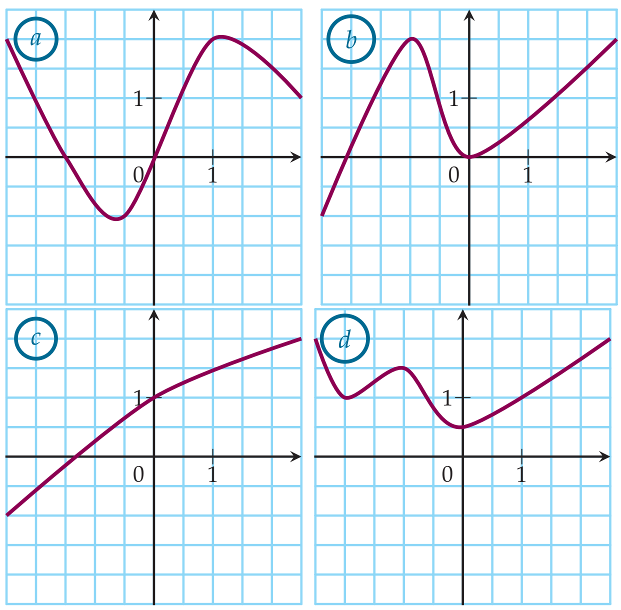


11 Voici le tableau de variations d'une fonction f. Choisir la courbe correspondante à ce tableau.

x	$-2{,}5$		1		$2{,}5$
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$1{,}5$	$\searrow$	-1



12 Pour chacune des courbes suivantes, établir le tableau de variations des fonctions représentées.



13 Pour chacune des fonctions suivantes, tracer une représentation graphique sur la calculatrice, puis décrire ses variations et dresser son tableau de variations le plus précisément possible.

1) $f(x) = 4x^3 - 5x + 2{,}5$ **2)** $g(x) = \dfrac{3x-6}{x+2}$

14 Voici le tableau de variations d’une fonction f.

x	-4		-1		1		3		$3{,}5$
$f(x)$	-4	↗	-2	↘	-5	↗	0	↘	-1

1) Quel est l’ensemble de définition de la fonction f ?
2) Indiquer le sens de variations de la fonction f.
3) Préciser les extrema éventuels de la fonction f et pour quelle(s) valeur(s) ils sont atteints.
4) Tracer deux courbes différentes susceptibles de représenter graphiquement la fonction f.

15 Voici des informations concernant une fonction f définie sur l’intervalle $[-1;5]$.

- $f(-1) = f(5) = 0$ • $f(2) = 3$ • $f(4) = -2$
- f est croissante sur $[-1;2]$ et sur $[4;5]$;
- f est décroissante sur $[2;4]$.

1) Dresser le tableau de variations de f.
2) Tracer deux courbes différentes susceptibles de représenter graphiquement la fonction f.
3) Préciser les extremums éventuels de la fonction f et pour quelle(s) valeur(s) ils sont atteints.

16 Proposer un tableau de variations et une courbe d’une fonction f définie sur $]-\infty;6]$ tels que :

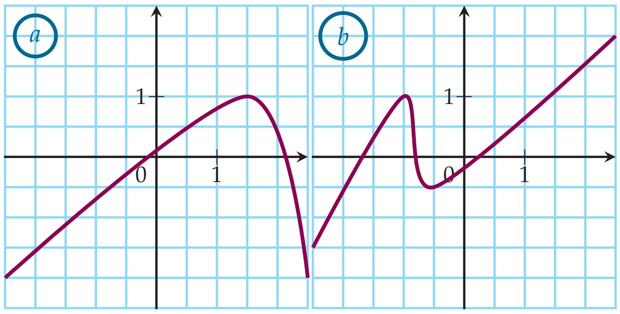
- f est croissante sur $]-\infty;4[$ et décroissante sur $]4;6]$;
- $f(4) = -2$ et l’image de 6 est -6.

17 Proposer un tableau de variations et une courbe d’une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

- décroissante sur $]-\infty;5[\cup]9;+\infty[$;
- croissante sinon ;
- elle coupe l’axe des abscisse en 4 et 11 ;
- elle atteint un maximum relatif en 9.

18 **Relatif ou absolu ?**

Pour chacune des courbes suivantes :
1) déterminer si la fonction représentée admet un maximum absolu et/ou relatif ;
2) dresser le tableau de variations.



19 Pour chaque tableau de variations ci-dessous, déterminer si la fonction représentée admet :

- un maximum et/ou un minimum ;
- absolu et/ou relatif.

1)

x	$-\infty$		0		9
$f(x)$		↘	$+8$	↗	

2)

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$g(x)$		↘	-10	↗	8	↘	

3)

x	$-\infty$		-2		7		$+10$
$h(x)$		↗	0	↘	-30	↗	7

4)

x	$-\infty$		15		$+\infty$
$m(x)$		↗	25	↘	

5)

x	1		$+\infty$
$p(x)$	-5	↗	

S'entraîner

Point de vue algébrique

20 **Tableaux incorrects**

Les tableaux de variations suivants comportent des erreurs. Lesquelles ? Justifier.

x	-10		-2		0		$7{,}5$
$f(x)$		↗	2	↘	$\frac{10}{3}$	↗	8

x	-10		-5		2
$g(x)$	7	↗	-6	↗	9

21 **Vrai ou faux ?**

Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	3		5		6		10
$f(x)$	4	↗	9	↘	-4	↗	1

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie, fausse ou si on ne peut pas conclure. Justifier.

1) $f(3) < f(4)$
2) $f(4,9) > f(5,9)$
3) $f(5,1) < f(5,9)$
4) $f(10) > f(3)$
5) f est définie sur $[-2;10]$;
6) 5 est le maximum de f sur $[3;10]$;
7) f admet un minimum absolu en 3 sur sur $[3;10]$;
8) $f(x)$ appartient à $[-4;9]$.

22 **Comparaisons à l'aide d'un tableau**

x	-2		0		3		4
$f(x)$	-1	↗	$\frac{5}{2}$	↘	-1	↗	6

Comparer si possible les nombres suivants.

1) $f(-2)$ et $f(-1)$
2) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ et $f\left(\frac{3}{2}\right)$
3) $f(-1)$ et $f(1)$
4) $f(3,6)$ et $f(3,7)$
5) $f\left(\frac{7}{2}\right)$ et $f(4)$
6) $f(1)$ et $f(3,5)$

23 Soit f une fonction définie sur $[-2;5]$ telle que :

- $f(-2) = 2$ • $f(2) = -3$ • $f(5) = 0$
- f est décroissante sur $]-2;2[$ et croissante sinon ;
- f admet un minimum en 2 égal à -3.

1) Encadrer $f(x)$ quand :
a) $x \in]-2;2[$ **b)** $x \in]3;4[$
2) Si $x \in [-2;5]$, que peut-on dire de $f(x)$?
3) Quels sont les extrema de f ?

24 Comparer les nombres suivants sans les calculer.

1) $(-0,7)^2$ et $(-0,082)^2$
2) $(2-\pi)^2$ et $(\pi+1)^2$
3) $(\pi-1)^2$ et 16
4) $(-1,25)^2$ et $2,25^2$

25 Sans utiliser de calculatrice, comparer :

1) $\sqrt{0,02}$ et $\sqrt{0,005}$
2) $17\sqrt{2}$ et 24
3) $5\sqrt{7}$ et $4\sqrt{11}$
4) $-\sqrt{21}$ et $-\sqrt{14}$

26 Comparer les nombres suivants sans les calculer.

1) $-\dfrac{1}{2,05}$ et $-\dfrac{1}{1,95}$
2) $\dfrac{1}{5+\sqrt{2}}$ et $\dfrac{1}{5-\sqrt{2}}$

27 Quelles sont les inégalités vérifiées par $\dfrac{1}{x}$ quand :

1) $2 < x < 5$
2) $-7 < x < -1$
3) $0 < x < 3$
4) $x \in [-2;0[\cup]0;3[$

28 Donner un encadrement de x quand :

1) $1 < \dfrac{1}{x} < 3$
2) $-4 < \dfrac{1}{x} < -2$
3) $\dfrac{2}{3} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{7}{6}$
4) $-2 < \dfrac{1}{x} < 0$

29 **Fonctions affines**

Décrire les variations des fonctions suivantes.

1) $f(x) = -2x + 13$
2) $g(x) = \dfrac{1}{2}x - 4$
3) $l(x) = \left(\sqrt{5} - 3\right)x + 4$
4) $j(x) = \dfrac{-7x - 5}{3}$

30 On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-2)^2$.

1) Conjecturer le sens de variation de la fonction f.
2) Démontrer que $f(b) - f(a) = (b-a)(a+b-4)$.
3) On suppose que $a < b < 2$.
a) Quel est le signe de $b - a$?
b) Comparer $a + b$ et 4 puis $f(b)$ et $f(a)$.
c) En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty;2[$.
4) On suppose que $2 < a < b$.
Quel est le sens de variation de la fonction f ?
5) La fonction f admet-elle un extremun ? Lequel ?

31 **Variations de la fonction carrée**

Le but de cet exercice est de démontrer les variations de la fonction carrée.

1) Soient a et b deux réels positifs tels que $a < b$.

Recopier et compléter :

- $a < b$ donc $a^2 \ \ldots \ ab$
- $a < b$ donc $ab \ \ldots \ b^2$
- soit : $a^2 \ \ldots \ b^2$.
- donc la fonction carrée est $\ \ldots\ $ sur $[0\,;+\infty[$

2) Démontrer de même, les variations de la fonction carrée sur $]-\infty;0]$ en prenant cette fois a et b deux réels négatifs tels que $a < b$.

3) Établir le tableau de variations de la fonction carrée.

32 **Variations de la fonction inverse**

Le but de cet exercice est de démontrer les variations de la fonction inverse.

1) Soit a et b strictement positifs avec $a < b$.

a) Montrer que $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{ab}$.

b) Quel est le signe de $b - a$?

c) Quel est le signe de ab ?

d) En déduire le sens de variation de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2) Soit a et b strictement négatifs avec $a < b$.

a) Quel est le signe de $b - a$?

b) Quel est le signe de ab ?

c) En déduire le sens de variation de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{-*}$.

33 On considère le tableau de variations de la fonction g définie sur $[-5;8]$.

x	-5		0		1		3		8
$g(x)$	1	↘	0	↗	4	↘	0	↘	-5

Dire si chacune des affirmations suivantes est **vraie**, **fausse** ou si **l'on ne peut pas conclure**.

1) 0 a pour image 3 ;

2) 0 a deux antécédents ;

3) $g(-4) \geqslant g(-3)$

4) $g(-2) \geqslant g(0{,}5)$

5) le maximum de g sur $\left[-5;\dfrac{1}{2}\right]$ est 1

6) Si $a \in [-5;1]$ alors $g(a) \geqslant 0$

7) Si $g(a) \geqslant 0$ alors $a \in [-5;1]$

34 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$.

1) Conjecturer les variations de la fonction f.

2) a) Recopier et compléter le programme de calcul.

$$x \longrightarrow \cdots \longrightarrow \cdots \longrightarrow \frac{1}{x^2+4}$$

b) Recopier et compléter le raisonnement.

Soient a et b deux nombres positifs tels que $a < b$.

$$\begin{array}{lll} a < b \implies & a^2 \ldots b^2 & \text{car} \ldots \\ \implies & a^2+4 \ldots b^2+4 & \text{car} \ldots \\ \implies & \dfrac{1}{a^2+4} \cdots \dfrac{1}{b^2+4} & \text{car} \ldots \end{array}$$

La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

3) Démontrer que f est croissante sur $\mathbb{R}^-$.

35 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{3x-5}{-x+2}$.

1) Conjecturer les variations de la fonction f sur $]-\infty;2[$ puis sur $]2;+\infty[$.

2) a) Vérifier que, pour $x \neq 2$, $f(x) = -3 + \dfrac{1}{-x+2}$.

b) Recopier et compléter le programme de calcul.

$$x \longrightarrow -x+2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \cdots$$

c) Justifier que la fonction affine $x \mapsto -x+2$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

d) Démontrer que f est croissante sur $]2;+\infty[$.

3) Démontrer que f est croissante sur $]-\infty;2[$.

36 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{3x^2+4}{x^2+1}$.

1) a) Conjecturer le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

Pour quelle valeur de x semble-t-il atteint ?

b) f semble-t-elle avoir un minimum ?

2) a) Vérifier que : $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x^2+1}$.

b) Compléter le programme de calcul ci-dessous.

$$x \longrightarrow \cdots \longrightarrow \cdots \longrightarrow 3 + \frac{1}{x^2+1}.$$

c) Compléter le raisonnement suivant.

$$\begin{array}{lll} 0 \leqslant x^2 \implies & \cdots \leqslant x^2+1 & \\ \implies & 1 \ldots \dfrac{1}{x^2+1} & \text{car} \ldots \\ \implies & 3 \ldots \dfrac{3}{x^2+1} & \\ \implies & 4 \ldots 3 + \dfrac{3}{x^2+1} & \end{array}$$

d) Calculer $f(0)$. Que vient-on de démontrer ?

3) 3 est-il un minimun de f sur $\mathbb{R}$?

Approfondir

37 Logique

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x + 1$.
Que penser des affirmations suivantes ? Argumenter.

1) Émilie affirme que f est croissante sur $[-3; -1]$.
2) Jean calcule $f(0)$ et $f(3)$ et vérifie que $f(3) > f(0)$.
   Il conclut alors que f est croissante sur $[0; 3]$.
3) Renée affirme que 4 est un maximum de f sur $\mathbb{R}$.

38 Calcul formel

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 2$.
À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient :

$factoriser(-x\hat{}2 + 4x - 4)$
$-(x-2)\hat{}2$

1) Conjecturer la valeur du maximum de f sur $\mathbb{R}$.
2) Calculer $f(x) - 6$.
3) Justifier que le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est bien 6.

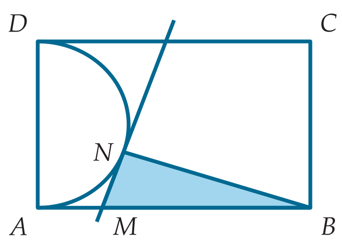
39 Cercle et triangle INFO

On considère une rectangle $ABCD$ tel que $AB = 6$ cm et $BC = 3$ cm. On place un point M libre sur $[AB]$.
À l'intérieur du rectangle, on construit le demi-cercle de diamètre $[AM]$ et le triangle MBC.

1) Comment varie l'aire de la figure composée du demi-cercle et du triangle en fonction de la position de M ?
2) Atteint-elle un maximum ? Un minimum ?
   Si oui, préciser pour quelle position de M.

40 Cercle et rectangle INFO

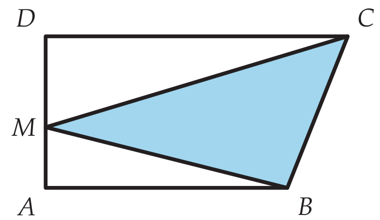
On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 6$ cm et $AD = 4$ cm. À l'intérieur, on construit le demi-cercle de diamètre $[AD]$ sur lequel on place N un point libre.
La tangente en point N au demi-cercle coupe $[AB]$ en un point M .



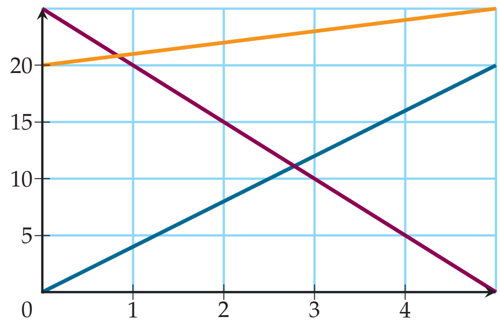
1) Étudier les variations de l'aire du triangle BMN en fonction de la distanceAM.
2) Admet-elle un maximum ? Un minimum ?
   Préciser la position du point M.

41 Un trapèze

On considère un trapèze rectangle $ABCD$, comme sur la figure ci-dessous. On place un point libre M sur le segment $[AD]$.



La distance AM en cm est notée x.
On a représenté les graphiques des trois fonctions donnant, en fonction de x, l'aire des triangles ABM, BCM et DCM.



1) À quelle aire correspond chacun des graphiques ? Justifier.
2) Retrouver les expressions des fonctions représentées.
3) En déduire les longueurs de chaque côté du trapèze.

42 Bénéfice optimum

Un artisan fait une étude sur la vente de sa production de vases. Il en fabrique entre 0 et 60 et estime que le coût de production de x vases fabriqués est modélisé par la fonction C donnée par $C(x) = x^2 - 10x + 500$.
On note $R(x)$ la recette, en euros, correspondant à la vente de x vases fabriqués. Un vase est vendu à 50 €.

1) Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
2) Calculer le coût et la recette réalisés lorsque l'artisan vend 50 vases.
3) Vérifier que le bénéfice, en euros, réalisé par l'artisan est donné par la fonction B dont l'expression est :
   $B(x) = -x^2 + 60x - 500$.
4) a) Développer l'expression : $-(x-30)^2 + 400$.
   b) En déduire le nombre de vases à vendre pour réaliser un bénéfice maximum.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

À partir de la courbe représentative d'une fonction :

- déterminer son sens de variations
- établir son tableau de variations

À partir du tableau de variations d'une fonction :

- proposer une (ou des) courbe(s) représentative(s)
- déterminer les extrema sur un intervalle
- comparer les images de deux nombres par une fonction

Fonctions de référence

- Pour une fonction affine :
  - déterminer et utiliser son sens de variation
  - dresser son tableau de variations
- Pour une fonction inverse ou une fonction carré :
  - connaître et utiliser leurs variations
  - connaître leurs tableaux de variations

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes. (ONPPS signifie On Ne Peut Pas Savoir.)

On considère la fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-6		-2		-1		2		4
Variations de $f(x)$	3	↘	-5	↗	2	↘	-1	↗	0

43 On a :

ⓐ $f(-1,9) < f(-1,5)$ ⓑ $f(-1,9) > f(-1,5)$ ⓒ on ne peut pas savoir

44 On a :

ⓐ $f(-3) \leqslant f(-1,5)$ ⓑ $f(-3) \geqslant f(-1,5)$ ⓒ on ne peut pas savoir

45 On a :

ⓐ $f(0,5) > f(1)$ ⓑ $f(0,5) < f(1)$ ⓒ on ne peut pas savoir

46 On a :

ⓐ $f(3,5) \geqslant f(2,5)$ ⓑ $f(3,5) \leqslant f(2,5)$ ⓒ on ne peut pas savoir

47 si $x \in [-1;4[$ on a :

ⓐ $f(x) \leqslant f(-1)$ ⓑ $f(x) \geqslant f(-1)$ ⓒ on ne peut pas savoir

48 si $x \in]-6;-1]$ on a :

ⓐ $f(3) < f(x)$ ⓑ $f(3) > f(x)$ ⓒ on ne peut pas savoir

On rappelle, ci-contre, le tableau de variations de la fonction inverse :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de $\frac{1}{x}$		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

49 La double barre du tableau signale que la fonction inverse :

(a) admet un maximum en 0 (b) admet un minimum en 0 (c) ne peut donner une image à 0

50 Sans calculer, on peut dire que les inverses de -3 et de -2 sont rangés dans :

(a) le même ordre que -3 et -2 (b) l'ordre inverse de -3 et -2 (c) inconnu sans calcul

51 Sans calculer, on peut dire que les inverses de $0,25$ et de $0,5$ sont rangés dans :

(a) le même ordre que $0,25$ et $0,5$ (b) l'ordre inverse de $0,25$ et $0,5$ (c) inconnu sans calcul

52 Sans calculer, on peut dire que les inverses de -5 et de 2 sont rangés dans :

(a) le même ordre que -5 et 2 (b) l'ordre inverse de -5 et 2 (c) inconnu sans calcul

On rappelle, ci-contre, le tableau de variations de la fonction carrée :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

53 Sans calculer, on peut dire que les carrés de -5 et de -3 sont rangés dans :

(a) le même ordre que -5 et -3 (b) l'ordre inverse de -5 et -3 (c) inconnu sans calcul

54 Sans calculer, on peut dire que les carrés de $0,1$ et de $0,7$ sont rangés dans :

(a) le même ordre que $0,1$ et $0,7$ (b) l'ordre inverse de $0,1$ et $0,7$ (c) inconnu sans calcul

55 Sans calculer, on peut dire que les carrés de -6 et de 1 sont rangés dans :

(a) le même ordre que -6 et 1 (b) l'ordre inverse de -6 et 1 (c) inconnu sans calcul

56 Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = 7$ admet :

(a) Aucune solution (b) une solution (c) deux solutions (d) ONPPS

57 Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = -5$ admet :

(a) Aucune solution (b) une solution (c) deux solutions (d) ONPPS

58 Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = 0$ admet :

(a) Aucune solution (b) une solution (c) deux solutions (d) ONPPS

On considère la fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-6		-2		-1		3		7
Variations de $f(x)$	7	$\searrow$	-5	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0

59 Sur l'intervalle $[-2; 4]$, le maximum de la fonction f est :

(a) 2 (b) -1 (c) 0 (d) ONPPS

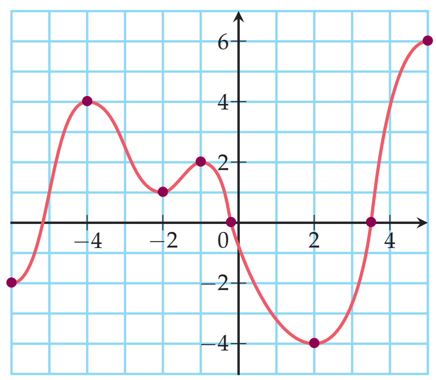
60 Sur l'intervalle $[-5; -3]$, la fonction est :

(a) monotone (b) croissante (c) décroissante (d) ONPPS

61 La fonction f est croissante sur :

(a) $[3; 7]$ (b) $[0; 1]$ (c) $[2,1; 2,5]$ (d) $[-1,5; -1] \cup [4,5; 7]$

Voici la courbe représentative d'une fonction f.



62 Sur $[-6; 2]$, le maximum de f est :

(a) -4 (b) -1 (c) -2 (d) 4

63 Sur $[-6; 5]$, -4 est :

(a) un minimum relatif (c) un maximum relatif

(b) un minimum absolu (d) un maximum absolu

64 La fonction f est croissante sur :

(a) $[-4; -2]$ (b) $[-6; -4]$ (c) $[3; 4]$ (d) $[0; 1]$

65 Quel tableau de variations correspond à cette courbe ?

(a)

x	-6		-4		-2		-1		2		5
Variations de $f(x)$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	6

(b)

x	-6		-4		-2		-1		$3{,}5$		5
Variations de $f(x)$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	6

Travaux pratiques

TP 1 inspiré par *Romeo and Juliet*, de William Shakespeare

INFO

Roméo et Juliette sont tombés amoureux.
Mais leur parents sont ennemis et refusent qu'ils se voient.
Juliette se désespère assise sur un banc dans le jardin des Capulet à l'ombre d'un mur couvert d'un rosier grimpant.
Roméo l'aperçoit au loin et voudrait la consoler le plus rapidement possible tout en lui cueillant une rose en chemin.

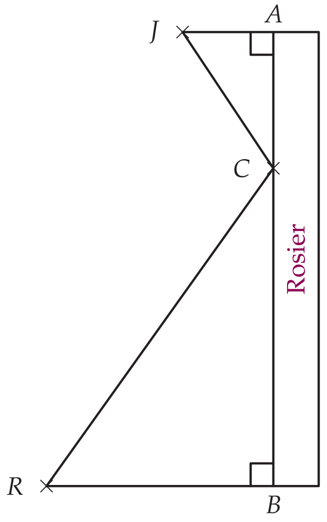
1 Première étude : modélisation en géométrie dynamique

1) Reproduire la figure ci-contre à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
Le point J représente Juliette et le point R Roméo.
Le segment $[AB]$ représente le mur couvert du rosier grimpant. Le point C, mobile sur ce segment, représente l'endroit où Roméo devra cueillir la rose.

- $AB = 6$
- $JA = 2$
- $RB = 5$
- (JA) et (RB) sont perpendiculaires à (AB)
- C est un point libre sur le segment $[AB]$

2) Grâce aux fonctionnalités du logiciel, décrire comment varie la longueur du trajet $RC + CJ$ en fonction de la position du point C sur le segment $[AB]$.

3) Conjecturer où doit être situé le point C pour que ce trajet soit le plus court possible.



2 Étude mathématique

Dans cette partie, on pose $x = AC$ et on étudie la fonction $f(x)$ qui, à x, associe le chemin parcouru par Roméo c'est-à-dire la longueur $RC + CJ$ sur le schéma.

1) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

2) Donner une expression algébrique de la fonction f.

3) À l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un tableur, déterminer une approximation à 10^{-2} près de la position du point C qui minimise le trajet $RC + CJ$.

4) Comparer avec le résultat conjecturé dans la partie 1.

3 Recherche de la valeur exacte

Dans cette partie, on détermine géométriquement la position du point C.

1) Reproduire la figure et y placer le point R', symétrique du point R par rapport au point B.
On appelle I l'intersection des segments $[AB]$ et $[R'J]$.

2) Justifier que $RI + IJ = R'I + IJ$.

3) Expliquer pourquoi I minimise la longueur $RC + CJ$ pour C mobile sur $[AB]$.

4) Quel théorème étudié au collège peut s'utiliser dans les triangles AIJ et BIR' ?

5) Calculer AC et comparer avec la valeur trouvée dans la partie 2.

TP 2 On inverse

INFO

1 Mais quelle est cette courbe ?

Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique.

1) Construire les points suivants dans le repère du logiciel : $O(0;0)$, $I(1;0)$ et $A(0;-2)$.

2) Placer un point libre M sur la droite (OI).

3) Tracer la parallèle à la droite (MA) passant par I. Elle coupe l'axe des ordonnées au point N.

4) Placer le point H tel que le quadrilatère $OMHN$ soit un rectangle.

5) À l'aide de l'option `trace`, conjecturer la nature de la courbe sur laquelle se déplace H, lorsque M se déplace sur la droite (OI) ? Quelle fonction représente-t-elle ? Justifier.

2 Ça varie...

On note f la fonction de la première partie. On se propose d'étudier ses variations.

Soient a et b deux nombres réels non nuls, tels que $a < b$.

1) Justifier que comparer $f(a)$ et $f(b)$ revient à étudier le signe de $f(b) - f(a)$.

2) Exprimer $f(b) - f(a)$ sous la forme d'un produit ou d'un quotient.

3) Soient $a > 0$ et $b > 0$ avec $a < b$. Quel est le signe de $b - a$ et ab ?

4) En déduire le signe de $f(a) - f(b)$. Quel est le sens de variations de f sur $]0;+\infty[$?

5) Refaire l'étude avec $a < 0$, $b < 0$ et $a < b$ puis dresser le tableau de variations complet de f.

TP 3 Le long d'un quart de cercle

INFO

1 Conjecture

Ouvrir un logiciel de géométrique dynamique.

1) Placer trois points A, B et C tel que ABC soit rectangle isocèle en A. Tracer le petit arc de cercle de centre A d'extrémités B et C. Le point M est un point libre sur cet arc. Placer le point N, pied de la perpendiculaire à (AB) passant par M ainsi que le point P, pied de la perpendiculaire à (AC) passant par M.

2) Conjecturer la position du point M pour laquelle l'aire du rectangle $ANMP$ est maximale.

2 Affinage

Dans le repère $(A;B,C)$, on note x la longueur AN et $f(x)$ l'aire du rectangle $ANMP$.

1) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

2) Sur la figure, créer un point R dont l'abscisse est égale à la longueur AN et dont l'ordonnée est égale à l'aire du rectangle $ANMP$. Sur quel objet géométrique se déplace le point R ?

3) Dresser alors le tableau des variations de la fonction f et faire une conjecture en utilisant la précision permise par le logiciel.

3 Démonstration

1) Exprimer la distance NM en fonction de x. En déduire une expression de $f(x)$.

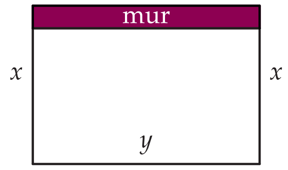
2) Montrer que $f(x) = \sqrt{x^2(1-x^2)}$. En déduire que $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{4} - \left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)^2}$.

3) Expliquer pourquoi $f(x)$ est maximal lorsque $x^2 = \dfrac{1}{2}$. En déduire la réponse au problème et comparer avec les conjectures précédentes.

Travaux pratiques

TP 4 La grange

Contre le mur de sa grange, un fermier veut construire un enclos grillagé rectangulaire suivant le schéma ci-contre. Le 4e côté est une partie du mur. Il dispose pour cela de quarante mètres de grillage pour clore trois côtés du rectangle et obtenir un enclos d'aire maximale.



1) Montrer que l'aire $\mathcal{A}(x)$ de l'enclos en fonction de x est égale à $\mathcal{A}(x) = -2x^2 + 40x$.
2) Tracer la courbe de la fonction $\mathcal{A}$ à la calculatrice sur l'intervalle $[0; 20]$.
3) En déduire le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$.
4) Montrer que $\mathcal{A}(x)$ est maximale lorsque la longueur est égale au double de sa largeur.
5) À l'aide de la calculatrice, donner l'ensemble des nombres x pour lesquels $\mathcal{A}(x) \leqslant 72$.

Récréation, énigmes

Les dimensions magiques

Dans le commerce, les boîtes de conserve cylindrique de même contenance ont toutes les mêmes dimensions. Comment ces dimensions ont-elles été choisies ?
Hasard ou stratégie ?

Partie A : un peu de calcul littéral

On considère une boite de conserve de hauteur h et de rayon r.
1) Exprimer le volume $\mathcal{V}$ d'un cylindre de hauteur h et dont le rayon de la base est r.
2) En déduire une expression de h en fonction de $\mathcal{V}$ et r.
3) Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ de ce cylindre en fonction de h et de r ?
4) En remplaçant h par l'expression trouvée précédemment, exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de $\mathcal{V}$ et r.

Partie B : du concret

Dans le commerce, on trouve des boîtes de conserve de $212\,\text{cm}^3$, $425\,\text{cm}^3$ et $850\,\text{cm}^3$.

1) Donner l'expression des trois fonctions qui, au rayon de la base de la boîte de conserve, associent l'aire de la boîte pour les trois volumes proposés.
Les nommer $\mathcal{A}_{212}$, $\mathcal{A}_{425}$ et $\mathcal{A}_{850}$.
2) Utiliser la calculatrice ou un tableur pour tracer dans un même repère ces trois fonctions.
3) Déterminer le minimum pour chacune des trois fonctions au dixième près.
Relever leur antécédent et les nommer r_{212}, r_{425} et r_{850}.
(Si besoin dresser un tableau de valeurs pertinent).
4) En reprenant l'expression de h en fonction de r et $\mathcal{V}$ de la première partie, calculer la hauteur correspondante pour chacun des trois volumes étudiés et des trois rayons déterminés.
5) À votre avis, quels objectifs ont sous-tendu le choix des dimensions des boîtes de conserve cylindriques ?

SOLUTIONS

Chapitre F3
Variations et extrema

Auto-évaluation

1

1) Sur l'axe des ordonnées.
2) a) $f(-4) = 1$
b) $f(-1) = 2$
c) $f(3) = -2$
d) $f(4) = -1$

2

1) -4 2) -2

3

1) oui 3) non
2) oui 4) oui

4

1) $a + 4 \leqslant 12$
2) $a - 4 \leqslant 4$
3) $a \times 4 \leqslant 32$
4) $a \times (-4) \geqslant -32$
5) $a \div 4 \leqslant 2$
6) $a \div (-4) \geqslant -2$

5

1) $a + b < -4$
2) $a - b < 0$
3) $\dfrac{a}{b} > 1$
4) $ab > 4$

S'entraîner

1

1) $(-4,5)^2 > (-2,5)^2$
2) $(\sqrt{5})^2 > (1,7)^2$
3) $\dfrac{1}{5^2} < \dfrac{1}{3^2}$
4) $(-5)^2 > (3,5)^2$

2

1) $\dfrac{1}{25} > \dfrac{1}{35}$
2) $-\dfrac{1}{41} < -\dfrac{1}{92}$
3) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
4) $-\dfrac{1}{8} < \dfrac{1}{3}$

3

1) décroissante sur $\mathbb{R}$
2) croissante sur $\mathbb{R}$
3) décroissante sur $\mathbb{R}$
4) décroissante sur $\mathbb{R}$

4

x	-3		-1		4		5
$f(x)$	1	$\nearrow$	6	$\searrow$	-3	$\nearrow$	7

5

1) Échanger 6 et 4
2) Remplacer -3 par -1
3) Remplacer le 2 de la $f(x)$ par 1

6 1) *d*. 3) *a*.
2) *c*. 4) *b*.

Auto-évaluation QCM

43 a **44** c
45 a **46** a
47 b **48** c
49 c **50** b
51 b **52** c
53 b **54** a
55 c **56** c
57 a **58** b
59 a **60** c
61 a d **62** a
63 d **64** b c
65 a