FONCTIONS

1

Généralités sur les fonctions

Connaissances du collège nécessaires à ce chapitre

- Évaluer la valeur d'une expression littérale
- Résoudre des équations
- Placer des points dans un repère
- Lire les coordonnées d'un point dans un repère

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 Soit l'expression $2x^2 + 5x - 1$.

Quelle est sa valeur si :

1) $x = 2$?

2) $x = -1$?

2 Résoudre les équations suivantes.

1) $2x - 4 = 7$.

2) $5x + 8 = 9x - 15$.

3 Quelle est la valeur de $\dfrac{2x-5}{x-3}$ si $x = 0$?

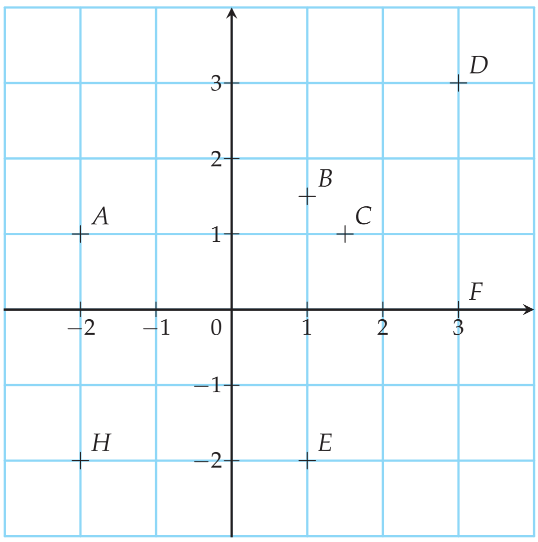
4 Sur le graphique ci-contre :

1) Quel est le point de coordonnées $(-2; 1)$?

2) Quelles sont les coordonnées du point F ?

3) Quel(s) est(sont) le(s) point(s) d'abscisse 1 ?

4) Quel(s) est(sont) le(s) point(s) d'ordonnée -2 ?



Voir solutions p. 97

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 Où est l'eau ?

Voici les hauteurs d'eau, en mètres, relevées par le marégraphe de Saint-Malo le 30 août 2012.

Heure	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Hauteur (m)	2,452	3,651	5,943	8,481	10,486	11,271	10,82	9,496	7,655
Heure	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Hauteur (m)	5,721	3,994	2,744	2,233	2,997	5	7,775	10,264	11,707
Heure	18	19	20	21	22	23	24		
Hauteur (m)	11,687	10,492	8,575	6,388	4,339	2,783	1,815		

Les observations du marégraphe de Saint-Malo sont la propriété du SHOM, de la CCI pays de Saint-Malo, de la DDTM Ille-et-Vilaine et sont mises à disposition sur le site des Réseaux de référence des observations marégraphiques (`refmar.shom.fr`)

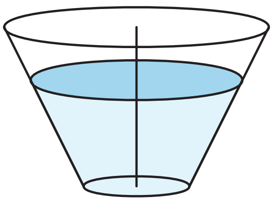
1) À quelle heure la marée est-elle haute ? Basse ?

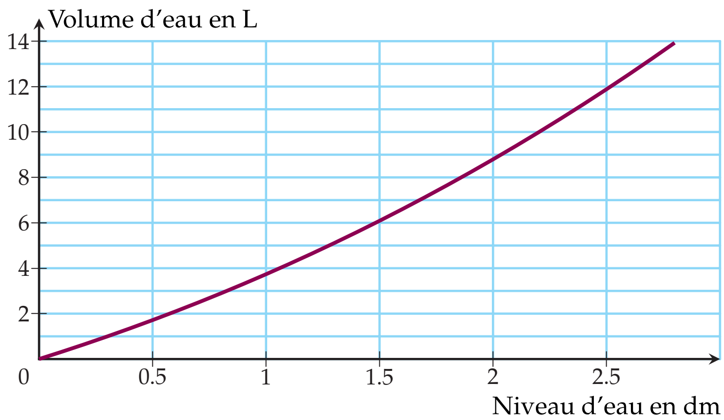
2) Quand la mer a-t-elle dépassé une hauteur de 10 m ?

3) Quand la mer a-t-elle une hauteur inférieure à 4 m ?

ACTIVITÉ 2 Inspirée par *La Fille du puisatier*, Marcel Pagnol

Pascal Amoretti, puisatier, possède plusieurs seaux pour transporter de l'eau.
Il voudrait connaître le volume d'eau transporté en mesurant juste la hauteur d'eau grâce à une jauge, c'est-à-dire une réglette graduée.
Jacques Mazel, son beau-fils, lui construit le schéma et la courbe ci-dessous.





À l'aide du graphique, compléter les tableaux de correspondance suivants.

Hauteur en dm	0	0,5	1	1,5	2	2,5
Volume d'eau en L						
Volume d'eau en L	1	2	3	4	5	10
Hauteur en dm						

Les graduations obtenues n'étant pas assez fines, Pascal demande à son gendre de préciser ses calculs. La suite de l'histoire ... au TP 2.

ACTIVITÉ 3 Somme de chiffres

On considère un processus qui, à tout nombre entier naturel, associe la somme de ses chiffres.

1) Qu'obtient-on à partir du nombre 13 717 ?

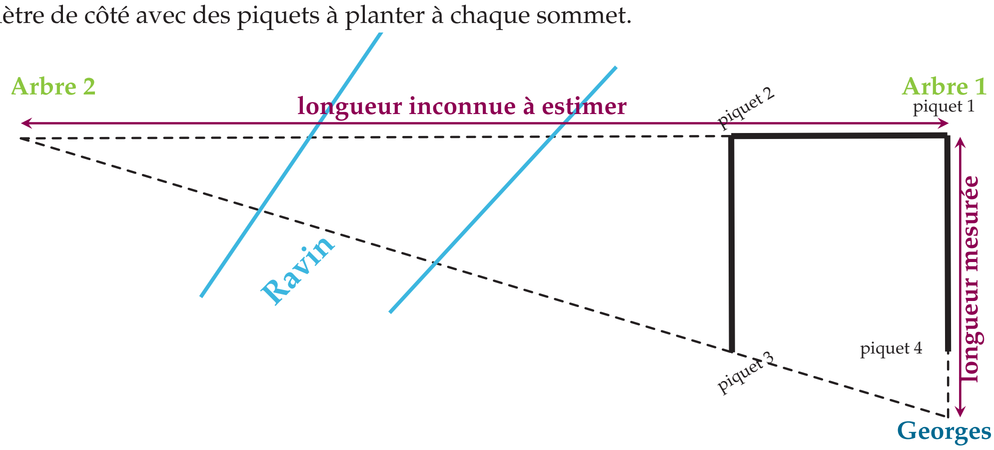
2) Proposer un nombre dont le résultat de ce processus est 22.

3) Combien de nombres de l'intervalle $]0;10\,000]$ permettent d'obtenir 3 ? Expliquer.

4) Est-ce que tout entier naturel peut être le résultat de ce processus ?

ACTIVITÉ 4 Sur un fil

Georges est un funambule. Il se promène dans la montagne à la recherche de deux arbres séparés par un ravin pour tendre un câble. Il souhaite, à chaque site qu'il découvre, estimer la longueur du câble à utiliser. Il se construit un U en bois (un carré avec un côté en moins) d'un mètre de côté avec des piquets à planter à chaque sommet.



Voici les instructions pour mesurer la distance entre les deux arbres :

- planter le piquet 1 à côté de l'arbre 1 ;
- aligner le piquet 1, le piquet 2 et les deux arbres puis fixer les piquets 3 et 4 ;
- se placer de manière à être aligné avec l'arbre 2 et le piquet 3 d'une part ; et avec l'arbre 1 et le piquet 4 d'autre part.
- mesurer sa distance à l'arbre 1 ;
- rechercher, dans le tableau, la distance correspondante entre les deux arbres.

1) Georges est un étourdi ; il a perdu le tableau de correspondance.

a) Il a effectué les 4 premières étapes et a mesuré une distance de 1,2 m entre lui et l'arbre 1. Calculer la distance entre les arbres 1 et 2.

b) Dresser un tableau de correspondance variant entre 1,1 et 2 avec un pas de 0,1 entre :

- les distances mesurées x entre Georges et l'arbre 1
- et la distance y entre les deux arbres pour x.

2) Georges pense alors qu'une application pour son smartphone serait une très bonne idée. Proposer un algorithme qui calculerait la distance entre les deux arbres séparés par le ravin à partir de la distance entre l'arbre 1 et Georges.

Cours - Méthodes

1. Définitions

DÉFINITION : Fonction

Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de nombres réels. Définir une **fonction** f sur $\mathcal{D}$ revient à associer, à chaque réel x de $\mathcal{D}$, un réel *et un seul*, appelé **image** de x.

VOCABULAIRE : $\mathcal{D}$ est l'**ensemble de définition de** f. $\mathcal{D}$ peut être l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, ou être constitué d'une ou plusieurs parties de $\mathbb{R}$.

NOTATIONS :

- Soit $a \in \mathcal{D}$. L'**image** du nombre a par la fonction f est **unique** et se note $f(a)$.
  $f(a)$ se lit « f de a ». La notation suivante se rencontre également $f : a \mapsto f(a)$.
- Si b est l'image de a, on a l'égalité $f(a) = b$ et a est un **antécédent** de b par la fonction f.

DÉFINITION : Fonctions de référence

Une **fonction de référence** est une fonction simple qui permet l'étude d'une famille plus large de fonctions.

- La **fonction carrée** est la fonction qui à x associe x^2.
  Elle est définie sur $\mathbb{R}$.
- La **fonction inverse** est la fonction qui à x associe $\dfrac{1}{x}$.
  Elle est définie sur $\mathbb{R}^*$.
- Une **fonction affine** est une fonction qui à x associe $mx + p$ (avec m et p réels).
  Elle est définie sur $\mathbb{R}$.

NOTATIONS :

- Quand un intervalle contient des nombres aussi grands (aussi petits) que l'on veut, le symbole $+\infty$ ($-\infty$) remplace la borne.
- $\mathbb{R}^+$ note l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls. C'est l'ensemble $[0; +\infty[$.
- $\mathbb{R}^-$ note l'ensemble des nombres réels négatifs ou nuls. C'est l'ensemble $]-\infty; 0]$.
- $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ note l'ensemble des nombres non nuls. C'est l'ensemble $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

2. Différentes représentations d'une fonction

DÉFINITION : Expression d'une fonction

Soit f une fonction, $\mathcal{D}$ son ensemble de définition et $x \in \mathcal{D}$. L'**expression algébrique** d'une fonction donne directement $f(x)$ en fonction de la variable x.

Exemple

Une fonction est déterminée par le programme de calcul suivant :

- choisir un nombre ;
- lui ôter 6 ;
- prendre le carré du résultat.

Trouver l'expression définissant cette fonction.

Correction

On note g la fonction qui à un nombre x, lui associe le résultat du programme de calcul.
Après avoir choisi un nombre x, le programme lui ôte 6.
On obtient donc $x - 6$.
Ensuite le programme élève ce nombre au carré soit : $(x-6)^2$.
Donc la fonction liée à ce programme de calcul est définie par :
$g : x \mapsto (x-6)^2$.

Cours - Méthodes

DÉFINITION : Tableau de valeurs

Soit f une fonction, $\mathcal{D}$ son ensemble de définition et x un élément de $\mathcal{D}$.
Un **tableau de valeurs** d'une fonction f donne, sur la première ligne (ou colonne), différentes valeurs de la variable x et, en vis-à-vis sur la deuxième ligne (ou colonne), les images $f(x)$ qui leur sont associées.

REMARQUE : Un tableau de valeurs n'est pas unique.
Il dépend du choix des valeurs de x sur la première ligne (ou colonne).

MÉTHODE 1 Construire un tableau de valeurs

► Ex. 17 p. 86

Exercice d'application

Dresser un tableau de 10 valeurs de la fonction g définie par $g(x) = (2x-3)^2$ à partir de $x = -5$ avec un pas de 1.

Correction

Le pas de 1 signifie qu'il y a une différence de 1 entre chaque valeur de x de la première ligne.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	169	121	81	49	25	9	1	1	9	25

DÉFINITION : Courbe représentative d'une fonction

La **courbe représentative de la fonction** f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ où x parcourt le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f.
Elle est souvent notée $\mathcal{C}_f$.
L'**équation de cette courbe représentative** est : $y = f(x)$.

VOCABULAIRE : La courbe représentative de la fonction carrée s'appelle une **parabole**, celle de la fonction inverse une **hyperbole**.

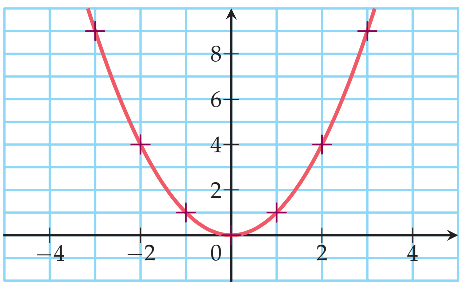
MÉTHODE 2 Tracer une courbe représentative

► Ex. 26 p. 86

Exercice d'application Tracer la parabole représentant la fonction f définie par $f(x) = x^2$.

Correction On établit un tableau de valeurs de la fonction f, on reporte les coordonnées des points dans un repère puis on les relie à la main.

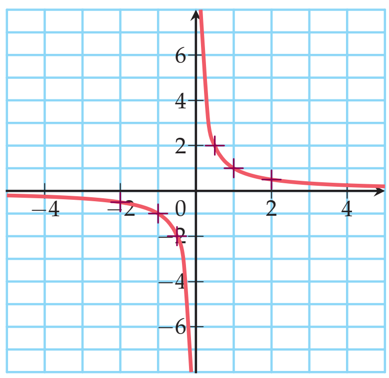
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9



Exercice d'application Tracer l'hyperbole représentant la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

Correction

x	-2	-1	$-0,5$	0	0,5	1	2
$f(x)$	$-0,5$	-1	-2	$\times$	2	1	0,5



3. Détermination d'images et d'antécédents

MÉTHODE 3 Calculer des images à partir d'une expression littérale

► Ex. 37 p. 88

Exercice d'application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^5 + 6x^2 - 9$.
Calculer les images de 0 et de -1 par la fonction f.

Correction

0 et -1 appartiennent à $\mathbb{R}$, l'ensemble de définition de f.
$f(0) = 4 \times 0^5 + 6 \times 0^2 - 9 = -9$
$f(-1) = 4 \times (-1)^5 + 6 \times (-1)^2 - 9 = -4 + 6 - 9 = -7$
Les images de 0 et -1 par f sont respectivement -9 et -7.

MÉTHODE 4 Rechercher un (ou des) antécédent(s) par le calcul

► Ex. 38 p. 88

Exercice d'application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 5$.
Déterminer le(s) antécédent(s) éventuel(s) de 16 par la fonction f.

Correction

On note x un nombre dont l'image est 16.
x est solution de l'équation $f(x) = 16$ soit $3x - 5 = 16$.
$3x = 16 + 5 = 21$ donc $x = 21 \div 3 = 7$
$7 \in \mathbb{R}$, l'ensemble de définition de f.
Donc, 7 est l'unique antécédent de 16 par la fonction f.

REMARQUES :

- Calculer l'**image** d'un nombre, c'est **évaluer** la valeur d'une expression littérale.
- Calculer le (ou les) **antécédent(s)** d'un nombre, c'est **résoudre** une équation.

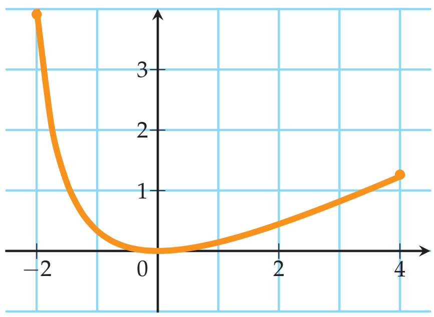
MÉTHODE 5 Lire graphiquement une image et des antécédents

► Ex. 46 p. 89

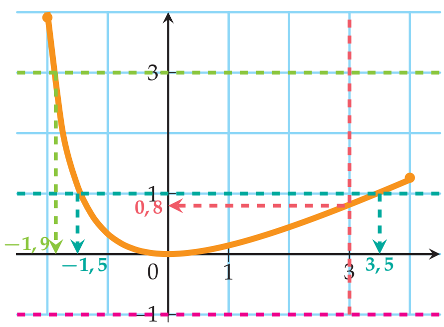
Exercice d'application

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2; 4]$.

1) Quelle est l'image de 3 par f ?
2) Par f, quels sont les antécédents de :
   - -1 ?
   - 1 ?
   - 3 ?



Correction



Par lecture graphique,

1) **l'image de 3** par f est environ 0,8.
2) - **-1 n'a pas d'antécédent** par f.
   - **1 a deux antécédents** par f : environ $-1,5$ et 3,5.
   - **3 a un unique antécédent** par f : environ $-1,9$.

S'entraîner

Activités mentales

1 Calculer $f(2)$ pour la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

2 La fonction g est définie par $g(x) = -3x + 7$. Quelle est l'image de deux tiers par g ?

3 h est définie par $h(x) = (2x - 6)(2x + 1)$. Calculer $h(3)$.

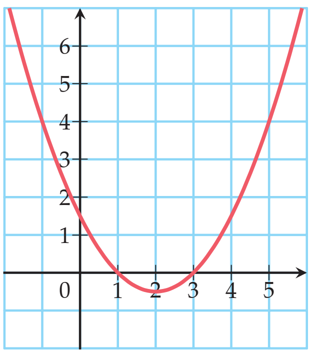
4 Voici un tableau de valeurs de la fonction l. Par la fonction l, donner :
1) l'image de -5 ; **2)** un antécédent de -1.

x	2	-5	10	-1
$l(x)$	-1	4	-1	-5

5 Quel est l'antécédent de 5 par la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 10x$?

6 La fonction m est définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = 3x - 5$. Quel est l'antécédent de 4 ?

7 Voici la courbe représentative d'une fonction h. Déterminer les images de :
1) 3 **2)** 5 **3)** 0 **4)** -1



8 On donne $l(3) = 5$. Déterminer les coordonnées d'un point appartenant à la courbe représentative de la fonction l.

9 Le point $A(-1; 2)$ appartient à la courbe représentative de la fonction k. Compléter : $k(\cdots) = \cdots$

10 Le point $A(2; 1)$ appartient-il à la courbe représentative de la fonction m définie par $m(x) = 3x^2 - 2x + 1$?

11 Dans un repère, quelle est l'ordonnée du point A d'abscisse -2 appartenant à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 2$?

Définitions

12 On considère le processus qui, à un nombre réel, fait correspondre son carré.

1) Compléter :

$\boxed{2} \longrightarrow$ mise au carré $\longrightarrow \boxed{\cdots}$

$\boxed{\cdots} \longrightarrow$ mise au carré $\longrightarrow \boxed{9}$

2) Pour chaque schéma ci-dessus, recopier et compléter les phrases ci-dessous :
- … est l'image de …
- … a pour image …
- … est un antécédent de …
- … a pour antécédent(s) …

13 On considère une fonction d telle que $d(3) = -2$. Traduire cette notation en complétant les phrases de l'exercice précédent.

14 On étudie le processus p qui, à tout entier compris entre 1 et 99, associe son chiffre des dizaines.

1) Donner $p(24)$.

2) Donner le (ou les) antécédent(s) éventuel(s) de 2 par p.

3) Trouver, si possible, un réel x tel que :
- $p(x) = 3$
- $p(3) = x$

4) Peut-on exprimer $p(x)$ en fonction de x ?
Si oui, donner cette expression.

15 Si on souhaitait exprimer les quantités suivantes à l'aide d'une formule ou d'une fonction, quelles seraient les variables qui interviendraient ?

1) le périmètre d'un cercle ;
2) l'aire d'un rectangle ;
3) le temps de chute d'une pièce ;
4) l'intensité d'un circuit électrique ;
5) la vitesse d'un véhicule ;
6) l'état de l'eau (liquide, gazeux, solide).

16 Pour chaque fonction, dire quelle est sa nature.
- $f : x \mapsto 2x + 9$
- $k : x \mapsto \sqrt{x}$
- $h : x \mapsto x^2$
- $l : x \mapsto \dfrac{x}{x^2}$
- $g : x \mapsto (2x - 5)^2 - (2x + 5)^2$

S’entraîner

Tableaux de valeurs

17 ► MÉTHODE 1 p. 83

Soit une fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x - 2$ sur $[-3;3]$. Construire un tableau de valeurs de la fonction f comportant au moins cinq valeurs de x.

18 Avec l’aide de la calculatrice, dresser un tableau de valeurs de la fonction r définie sur $[-10;10]$ par $r(x) = \sqrt{x^2+1}$ avec un pas de 1.

19 On définit f par $f(x) = -3x + 5$ sur $\mathbb{R}$. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	0		2		-4
$f(x)$		0		2	

20 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3}{3\sqrt{2x+1}}$.

1) Dresser le tableau de valeurs de f pour x entre 0 et 10 avec un pas de 1. Arrondir les images à 10^{-2} près.
2) Dresser le tableau de valeurs de f pour x entre 7 et 9 avec un pas de 0,5. Arrondir les images à 10^{-1} près.

21 Déterminer a pour que le tableau ci-dessous soit un tableau de valeurs d’une fonction h définie par $h(x) = x^2 + ax + 9$ sur $\mathbb{R}$ puis compléter le tableau.

x	-1	0	1	
$h(x)$	4		16	36

22 Déterminer a et b pour que le tableau ci-dessous soit un tableau de valeurs d’une fonction h définie par $h(x) = x^2 + ax + b$ sur $\mathbb{R}$.

x	-1	0	1	2
$h(x)$	-9	-7	-3	3

23 En utilisant le tableau ci-dessous, répondre par vrai ou faux aux affirmations.

x	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{2}$	$-\frac{9}{7}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{2}{11}$
$h(x)$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{6}{5}$

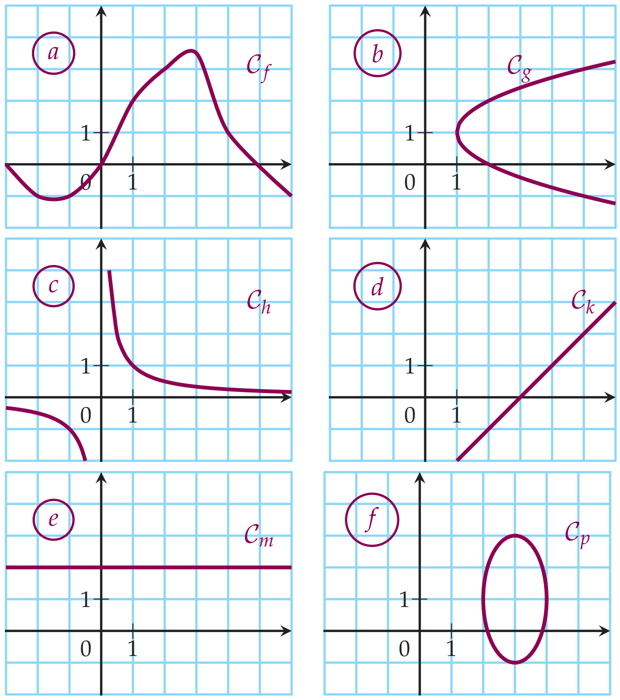
1) $\frac{2}{3}$ et $\frac{2}{11}$ ont des images opposées ;

2) $\frac{2}{3}$ et $\frac{7}{2}$ ont des antécédents inverses.

Représentations graphiques

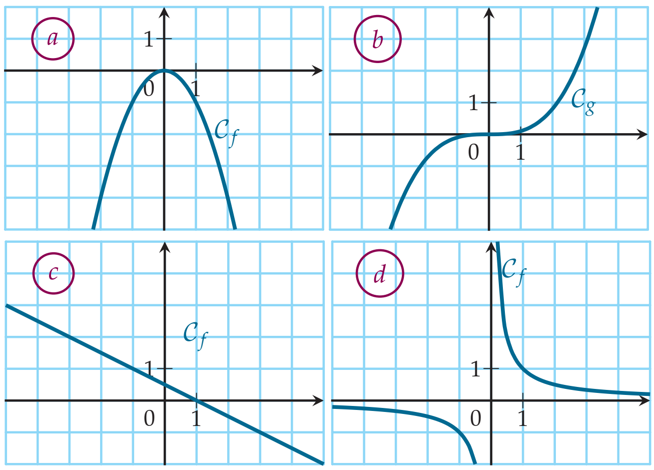
24 **Fonctions ?**

Parmi les graphiques proposés, lesquels correspondent à la représentation graphique d’une fonction ?



25 **Fonctions usuelles ?**

Indiquer, si possible, le nom de la courbe et le nom de la famille de fonctions représentée.



26 ► MÉTHODE 2 p. 83

Tracer la courbe représentative de f définie par $f(x) = (x+1)^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$ pour x entre -4 et 4.

27 **Tracer une ou des courbes ?**

Soit f la fonction définie sur $]0;3]$ par $f(x) = \dfrac{3}{x} - 2$.

1) Établir un tableau de valeurs avec un pas de 0,25.

2) Tracer la courbe représentative de la fonction f.

28 **Un ou des tableaux de valeurs ?**

En voulant tracer une courbe, Roméo a obtenu le tableau de valeurs suivant :

x	$-1,6$	$-1,3$	$-1,1$	0,17	0,32	0,89
$f(x)$	$-0,62$	$-0,77$	$-0,91$	5,88	3,12	1,12

En traçant la même courbe, Juliette a obtenu le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x)$	$-0,33$	$-0,5$	-1	1	0,5	0,33

Tracer une courbe représentative de la fonction. Donner son nom.

29 **Avec la calculatrice**

Soit f définie sur $[-4;2]$ qui à x associe $\dfrac{2x+2}{x+5}$.

1) Éditer un tableau de valeurs de f avec la calculatrice.

2) Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.

3) Vérifier le tracé sur l'écran de la calculatrice.

30 **Feuille changeante** INFO

1) Programmer une feuille de calcul d'un tableur pour obtenir un tableau de valeurs entre -5 et 5 avec un pas de 1 et la courbe représentative associée de n'importe quelle fonction f définie par $f(x) = ax^2 + b$ où l'utilisateur pourra choisir a et b.

2) Utiliser la feuille de calcul pour $a = \dfrac{3}{5}$ et $b = -\sqrt{2}$.

31 **Famille de fonctions**

1) Sur un même graphique, tracer les courbes représentatives des fonctions f, g et h définies par :

- $f(x) = x^2$
- $g(x) = (x+1)^2$
- $h(x) = x^2 + 1$

On appelle A, B et C les points d'abscisse 2 des courbes respectives $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$.

2) Quelle est l'ordonnée de A ?

3) Comment obtenir les ordonnées de B et C ?

4) Construire une courbe représentative de la fonction h définie par $h(x) = (x+2)^2 + 3$ à partir de $\mathcal{C}_f$.

Calculs d'images et d'antécédents

32 Voici un tableau de valeurs de la fonction $\mathcal{P}$, qui, au nombre de photos à imprimer, associe le prix à payer d'après le site `www.jesuisleroidesphotos.com`.

Nombre de photos	50	100	300	500	800
Prix en €	8	14	36	60	64

1) Déterminer $\mathcal{P}(300)$. Interpréter le résultat.

2) Que peut-on dire de $\mathcal{P}(600)$?

33 Voici un tableau de valeurs de la fonction $\mathcal{V}$ qui, à la longueur du rayon d'une sphère, associe son volume.

r en cm	3	6	9
$\mathcal{V}(r)$ en cm^3	36π	288π	972π

1) Quelle est la valeur exacte de $\mathcal{V}(6)$?

2) Quel est le volume d'une sphère de rayon 3 cm ? En déduire l'image de 3 par la fonction $\mathcal{V}$.

34 Voici un tableau de valeurs de la fonction v qui, à x en cm, associe le volume d'une boîte de conserve de hauteur x, arrondi au cm^3 près.

x	2	4	8	10
$v(x)$	50	402	3 217	6 283

1) Déterminer un ou des antécédents de 3 217 par v.

2) Peut-on déterminer un antécédent de 5 000 par v ?

35 Quand le gardien de but d'une équipe de football tire dans le ballon, ce dernier suit une trajectoire dite parabolique. Voici un tableau de valeurs de la fonction h qui, au temps t écoulé en secondes depuis le tir, associe la hauteur du ballon en mètres.

t	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$h(t)$	1,75	3	3,75	4	3,75	3	1,75	0

1) Déterminer un ou des antécédents de 3 par h.

2) Peut-on déterminer un antécédent de 5 par h ?

36 On considère la fonction k sur $\mathbb{R}$ définie par $k(x) = -7x + 9$. Calculer :

1) $k(10)$ **2)** $k(-4)$ **3)** $k\left(\dfrac{3}{7}\right)$ **4)** $k(\sqrt{5})$

S'entraîner

37 ► MÉTHODE 3 p. 84

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 7x$. Calculer les images de :

1) 2 2) -3 3) 0 4) $\sqrt{5}$

38 ► MÉTHODE 4 p. 84

On définit deux fonctions k et l, définies sur $\mathbb{R}$, par :

$$k(x) = 2x + 3 \text{ et } l(x) = x^2.$$

1) Déterminer le(s) antécédent(s) de 2 par la fonction k.
2) Déterminer le(s) antécédent(s) de 3 par la fonction l.
3) Citer un nombre qui n'a pas d'antécédent par l.

39 On considère la fonction d définie sur $\mathbb{R}^*$ par $d(x) = \frac{7}{x} - 4$. Par la fonction d, déterminer, si possible, le ou les antécédents de :

1) 3 2) 2 3) $\frac{1}{7}$ 4) -4

40 On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (2x - 7)(3x + 1)$.

Calculer le ou les nombres qui ont pour image 0.

41 On considère la fonction m définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = (x + 1)^2$.

Par cette fonction, déterminer, si possible, le (ou les) antécédent(s) de :

1) 4 2) -1 3) 0 4) 5

42 **Une formule** ALGO

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 5$.

1) Déterminer le ou (les) antécédent(s) de -2 ; 7,3 et -4 par la fonction f.
2) L'algorithme ci-dessous détermine le(s) antécédent(s) d'un nombre par la fonction f. Le compléter.

```
1.  Algorithme : Antécédent
2.  Liste des variables utilisées
3.      a : réel
4.      b : réel
5.  Entrées
6.      Demander b
7.  Traitements
8.      Calculer ...
9.      Stocker la réponse dans a
10. Affichage
11.     Afficher a
12. Fin de l'algorithme
```

43 On considère le fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{-5}{2x^2 - 3}.$$

1) Par la fonction g, calculer les images de :
   a) -1 b) 0 c) $\frac{5}{2}$ d) $2\sqrt{3}$
2) Déterminer le (ou les) antécédent(s) de 2 par g.
3) 0 a-t-il un antécédent par cette fonction ? Pourquoi ?
4) Quels nombres n'ont pas d'image par g ?

44 On considère deux fonctions : f définie sur $[-8; 8]$ par $f(x) = x^4 - 3x^2 - 2$ et g définie par : $g(x) = \frac{3x + 1}{x + 2}$.

1) Calculer :
   a) $f(0)$ b) $g(0,3)$ c) $f(\sqrt{2})$ d) $g(-4)$
2) Calculer l'image de -5 par f.
3) Calculer l'image de -3 par g.
4) Déterminer le ou (les) éventuel(s) antécédent(s) de 1 par la fonction g.
5) Déterminer le ou (les) éventuel(s) antécédent(s) de -2 par la fonction f.
6) Que se passe-t-il si $x = -2$ pour la fonction g ?

45 **Programme de calcul** ALGO

Voici un programme de calcul qui peut s'appliquer à n'importe quel nombre réel.

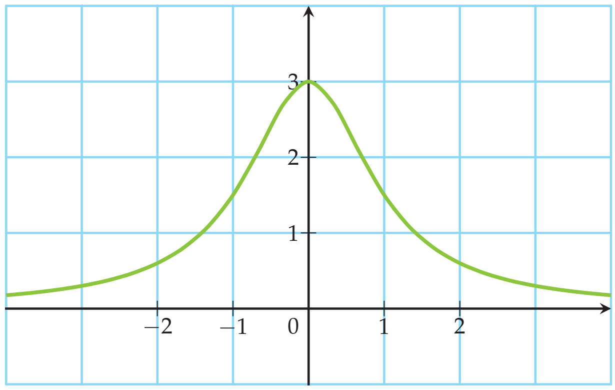
- doubler le nombre de départ ;
- ajouter 5 ;
- multiplier par 3 ;
- ajouter le nombre de départ ;

1) Donner les images de :
   - 0 • 2 012 • 12,7
2) Programmer un algorithme associé à ce programme de calcul et vérifier les réponses trouvées au 1.
3) Donner l'(es) antécédent(s) de 0.
4) À quel(s) nombre(s) faut-il appliquer le programme pour trouver 40,9 ?
5) Écrire un programme de calcul d'au moins 3 étapes qui donne 0 quand le nombre de départ est 5.

Lectures graphiques

46 ► MÉTHODE 5 p. 84

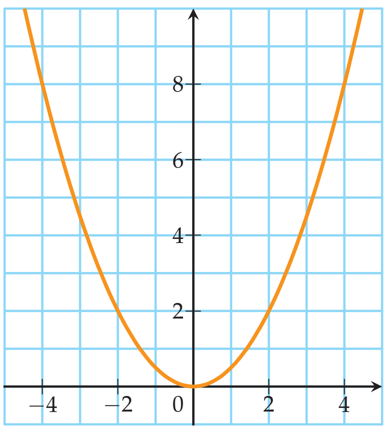
Voici la courbe représentative d’une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



Par lecture graphique, déterminer :

1) l’image de -1 par f ;
2) l’image de 0 par f ;
3) le (ou les) antécédent(s) de 1 par f ;
4) le (ou les) antécédent(s) de 3 par f.

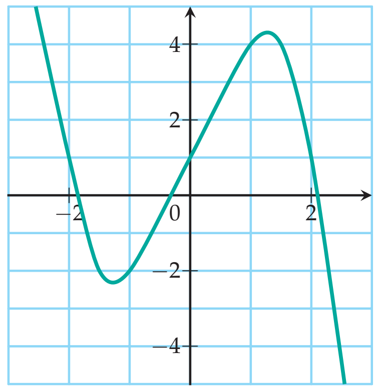
47 Voici la courbe représentative d’une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1) Par lecture graphique, compléter les égalités suivantes :
   a) $f(...) = 4$
   b) $f(2) = ...$
   c) $f(...) = 0,5$
   d) $f(0) = ...$
2) Par lecture graphique, compléter le tableau de valeurs suivant.

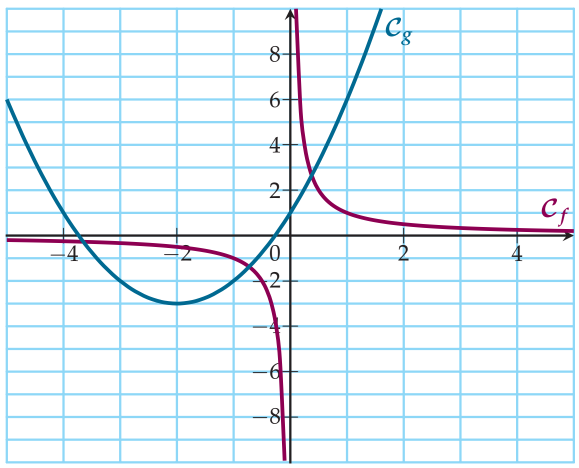
x	-3	-1		1		
$f(x)$			2		7	5

48 Voici la courbe représentative d’une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1) Par lecture graphique, déterminer :
   a) l’image de -1 par f ;
   b) $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$, $f(2)$;
   c) le(s) antécédent(s) de 1 par f ;
   d) les éventuels nombres qui ont 0 pour image.
2) Citer, si possible, un nombre qui a :
   a) aucun antécédent ;
   b) 1 antécédent ;
   c) 2 antécédents ;
   d) 3 antécédents.

49 Voici les courbes représentatives d’une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ et d’une fonction g définie sur $\mathbb{R}$.

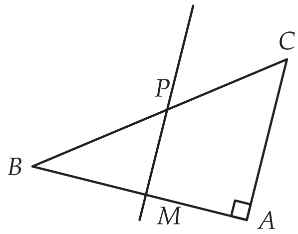


1) Par lecture graphique, déterminer :
   a) l’image de 1 par la fonction f puis g ;
   b) le (ou les) antécédent(s) de 4 par la fonction g ;
   c) le (ou les) antécédent(s) de -6 par la fonction f.
2) Quel nombre a un seul antécédent par la fonction g ?
3) Quel nombre n’a pas d’antécédent par f ?

Approfondir

50 **Dans un triangle rectangle** ALGO

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$ et $AC = 3$ et M un point appartenant à $[AB]$. La droite perpendiculaire à (AB) passant par M coupe (BC) en P.



On étudie la longueur BP.

1) Que vaut BP si M est le milieu de $[AB]$?
Si M est confondu avec le point A ? Avec le point B ?

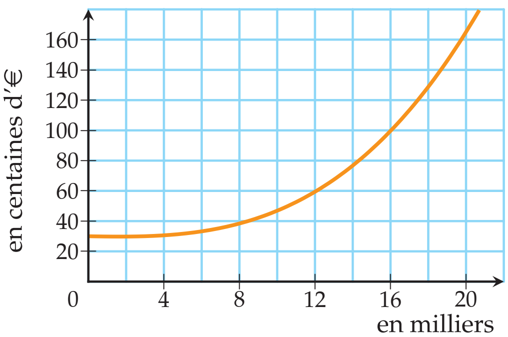
2) On note $AM = x$.

- **a)** Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
- **b)** Exprimer BP en fonction de x.

3) Écrire un algorithme permettant de calculer BP à partir de la longueur AM.

51 **En économie** INFO

L'entreprise Flora commercialise des vases en porcelaine. Par an, elle confectionne entre 0 et 20 000 vases. Le coût total de production f, exprimé en centaines d'euros, est fonction du nombre de vases fabriqués, en milliers. Le graphique ci-dessous présente la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f.



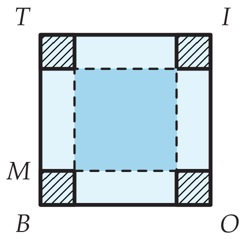
1) **a)** Quel est le coût de production de 10 000 vases ?
b) Quelle quantité maximale d'objets est-il possible de produire pour un coût inférieur à 14 000 € ?

2) Le coût moyen h est donné par $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

- **a)** Estimer $h(5)$.
- **b)** Reproduire la courbe $\mathcal{C}$ puis tracer, dans le même repère, la représentation graphique du coût moyen.
- **c)** Estimer le nombre de vases qu'il faut fabriquer pour obtenir un coût moyen minimal.

52 **En boîte !**

On considère un carré de côté 15 cm. Dans chaque coin, on découpe un même carré pour obtenir un patron d'une boîte sans couvercle.



Partie A : un patron

1) Construire une boîte en choisissant $BM = 3$ cm.

2) Calculer son volume.

3) Peut-on réaliser une boîte sachant que $BM = 8$ cm ? Expliquer.

Partie B : une fonction

On pose $BM = x$ et on appelle $\mathcal{V}$ la fonction qui à x associe le volume de la boîte sans couvercle.

1) Déterminer une expression de la fonction $\mathcal{V}$.

2) Quel est l'ensemble de définition de $\mathcal{V}$?

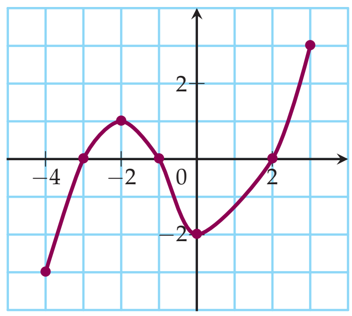
3) À l'aide de votre calculatrice ou d'un logiciel, tracer la courbe représentative de la fonction $\mathcal{V}$.

4) Pour quelles valeurs de x le volume est-il supérieur ou égal à 100 ?

5) Le volume de cette boîte peut-il dépasser 1 dL ?
Si oui, donner les dimensions d'une boîte vérifiant cette condition. Si non, expliquer pourquoi.

53 **Avec un paramètre**

On considère une fonction f définie sur $[-4; 3]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



1) Quels sont le (ou les) antécédent(s) de 0 par f ?

2) Combien d'antécédent(s) possède 2 ?

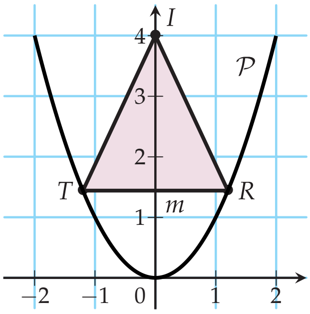
3) Quel est le nombre d'antécédent(s) de 1 ?

4) Donner un nombre réel m qui n'a qu'un unique antécédent par f.

5) Donner le nombre d'antécédent(s) de t par f, suivant les valeurs de t.

54 INFO On considère $\mathcal{P}$ la courbe représentative de la fonction carrée, restreinte à l'intervalle $[-2;2]$ et le point I de coordonnées $(0;4)$.

Pour tout nombre réel m de l'intervalle $[0;4]$, on place sur $\mathcal{P}$ les points T et R d'ordonnées m tels que $x_T \leq x_R$.



Le but de l'exercice est de trouver des valeurs de m pour que l'aire du triangle TRI soit égale à deux unités d'aire puis soit maximale et enfin soit minimale.

1) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire la figure et émettre des conjectures sur chacun des problèmes posés.
2) Par la fonction carrée, citer le(s) antécédent(s) de 2.
3) Quelle est l'aire du triangle TRI pour $m = 2$?
4) On définit la fonction $\mathcal{A}$ qui à m associe l'aire du triangle TRI.
   a) Vérifier que, pour tout réel m de $[0;4]$:
   $\mathcal{A}(m) = (4-m)\sqrt{m}$.
   b) Tracer la courbe représentative de $\mathcal{A}$ à la calculatrice. À l'aide de la courbe :
      i) donner une valeur approchée du (ou des) antécédent(s) de 2 par la fonction $\mathcal{A}$.
      ii) $\mathcal{A}$ admet-elle un minimum ? un maximum ? S'ils existent, combien valent-ils et pour quelle(s) valeur(s) de m sont-ils atteints ?

55 Le triangle ABC rectangle isocèle en B est tel que $AB = BC = 4$ cm. On note M le point de $[AB]$ tel que $AM = x$ avec $0 \leqslant x \leqslant 4$. On place les points P et Q respectivement sur $[BC]$ et sur $[AC]$ tels que le quadrilatère $MBPQ$ soit un rectangle.

Partie A : établir la fonction

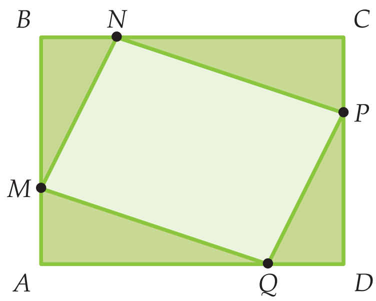
1) Exprimer MB en fonction de x.
2) Pour quelle(s) valeur(s) de x le rectangle $MBPQ$ est-il un carré ?
3) Montrer que l'aire $S(x)$, en cm², du rectangle $MBPQ$ est égale à : $x(4-x)$.
4) Tracer une représentation graphique de S.

Partie B : utiliser la fonction

1) Donner les dimensions des rectangles $MBPQ$, lorsqu'ils existent, ayant pour aire 2, 4 et 5 cm².
2) Vérifier que $x(4-x) - 3 = (1-x)(x-3)$.
3) En déduire les antécédents de 3 par la fonction S. Combien peut-on trouver de rectangles $MBPQ$ ayant une aire de 3 cm² ?

56 **Histoire de parallélogrammes**

On considère un rectangle $ABCD$ de dimensions données : $AB = 6$ cm et $BC = 8$ cm.
Sur le côté $[AB]$, on place un point M quelconque.
On considère ensuite les points N sur $[BC]$, P sur $[CD]$ et Q sur $[DA]$ tels que : $AM = BN = CP = DQ$.



On pose $AM = x$. On appelle f la fonction qui, à x, associe la valeur de l'aire de $MNPQ$.
1) Vérifier que $MNPQ$ est un parallélogramme.
2) AM peut-elle prendre la valeur 7 ?
   Quel est l'ensemble de définition de f ?
3) Quelle peut-être la valeur maximale de $f(x)$?
   Pour quelle valeur de x est-elle atteinte ?
4) Démontrer que $f(x) = 2x^2 - 14x + 48$.
5) À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, tracer la courbe représentative de f.
   Ajuster la fenêtre d'affichage.
6) Graphiquement, lire les antécédents de 24 et de 36.
7) Les valeurs trouvées sont-elles exactes ? Conclure.

57 **Vrai ou Faux ? Et pourquoi ?**

1) Tout nombre de l'ensemble de définition d'une fonction f a au moins une image par f.
2) Tout nombre de l'ensemble de définition d'une fonction f est l'antécédent d'au moins un nombre par f.
3) Le processus qui, à un nombre, associe soit 0 s'il est pair, soit 1 s'il est premier est une fonction.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Reconnaître une fonction définie par
- un processus
- une courbe
- un tableau de valeurs

Reconnaître une fonction usuelle
- linéaire ou affine
- carrée
- inverse

Déterminer l'image d'un nombre par une fonction
- connue par une expression littérale
- connue par sa courbe représentative
- connue par un tableau de valeurs

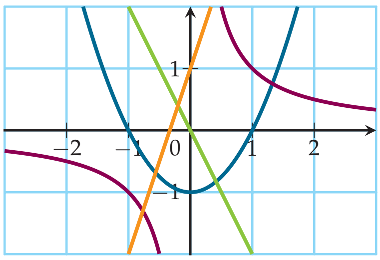
Déterminer un antécédent d'un nombre par une fonction
- connue par une expression littérale
- connue par sa courbe représentative
- connue par un tableau de valeurs

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net @

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

Pour les questions 58 à 61, on utilise les courbes représentatives de fonctions ci-contre.



58 La courbe verte représente une fonction :

(a) linéaire (b) carrée (c) autre

59 La courbe rouge représente une fonction :

(a) linéaire (b) carrée (c) inverse

60 La courbe bleue représente une fonction :

(a) carrée (b) affine et non linéaire (c) autre

61 La courbe orange représente une fonction :

(a) linéaire (b) affine (c) inverse

Pour les questions 62 et 63, la fonction f est connue par le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	-8	$-6{,}5$	-5	$-3{,}5$	-2	$-0{,}5$	1	2,5	4	5,5	7	8,5	10

62 L'image de 2,5 par la fonction f est :

(a) $-6{,}5$ (b) 0,5 (c) 8,5

63 Un antécédent de 1 par la fonction f est :

(a) 4 (b) 0 (c) aucune des réponses

64 L'image de 2 par la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$ est :

(a) -22 (b) -3 (c) aucune des réponses

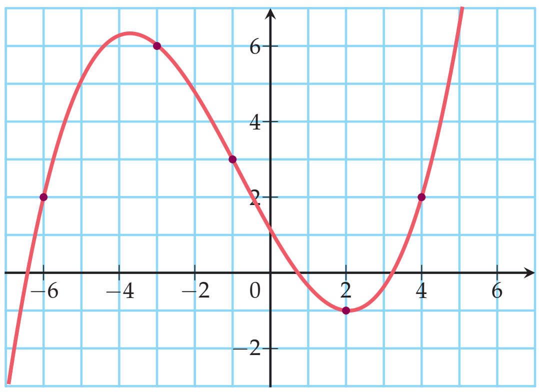
65 Un antécédent de -5 par la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - 3$ est :

(a) 2 (c) 0,5 (e) aucune des réponses
(b) $-0,5$ (d) -23

66 On considère la fonction g, définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{1}{x}$. L'image de 4 par g est :

(a) 0,25 (c) -4 (e) aucune des réponses
(b) -2 (d) $-0,25$

Pour les questions suivantes, on utilise la fonction f, définie sur $[-7;5]$, représentée graphiquement ci-contre :



67 Par cette fonction, l'image de -2 est :

(a) comprise entre -7 et -6 (c) comprise entre 4 et 5
(b) 4,5 (d) on ne peut pas savoir

68 Par cette fonction, 2 est l'image de :

(a) -1 (c) -6
(b) 4 (d) on ne peut pas savoir

69 Par cette fonction, le nombre 2 a :

(a) exactement deux antécédents (c) au moins trois antécédents
(b) exactement 3 antécédents (d) aucune de ces réponses

70 $f(0)$ est environ égal à :

(a) 1 (c) 1,15 (e) 0,75
(b) 0,8 (d) 1,2 (f) aucune de ces valeurs

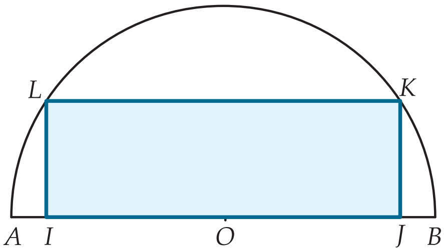
71 La (ou les) valeur(s) éventuelle(s) du réel x pour lesquelles $f(x) = -1$ sont :

(a) environ $-6,6$ et 2 (c) seulement 2
(b) exactement 3 (d) aucune de ces réponses

Travaux pratiques

TP 1 Demande à ta machine

Monsieur Sphéro, architecte, souhaite répondre à un appel d'offre pour construire une salle de spectacle. Il propose une salle sphérique et voudrait une approximation de la taille maximale possible d'un écran de cinéma dans ce type de salle. Voici le schéma qu'il fournit à Mathéo son assistant.



- $[AB]$ est un segment tel que $AB = 10\,\text{m}$;
- O est le milieu de $[AB]$, I un point mobile sur $[OA]$;
- $IJKL$ est un rectangle tel que $OJ = OI$ et que K et L soient sur le cercle de diamètre $[AB]$.

On pose $x = OI$ et on appelle $f(x)$ l'aire du rectangle $IJKL$.

1 Une première estimation

1) Expliquer pourquoi x varie dans $[0;5]$.

2) Déterminer, en fonction de x, la longueur IL.

3) En déduire l'aire du rectangle $IJKL$ en fonction de x.

4) En utilisant la table de votre calculatrice, compléter le tableau suivant :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$											

5) En utilisant le tableau, pour quelle valeur de x l'aire semble-t-elle être maximale ?

2 Affinage graphique

1) Faire afficher sur votre calculatrice la courbe représentative de cette fonction.
Hélas, la représentation n'est peut-être pas complète !

2) Régler les paramètres de la fenêtre graphique afin de voir toutes les variations de la fonction sur la calculatrice.
Pour cela, il faut choisir :
- `Xmin` *et* `Xmax` *en se rappelant que x varie dans $[0;5]$;*
- `Ymin` *et* `Ymax` *en utilisant les valeurs trouvées dans le tableau.*

3) Lorsque la courbe est correctement affichée par la calculatrice, utiliser le mode `Trace` pour déplacer un point en forme de croix sur la courbe.

4) Grâce au déplacement de ce point, donner une valeur approchée au dixième de l'aire maximale ainsi que la valeur de x pour laquelle cette aire semble être maximale.
Les coordonnées de ce point sont affichées au bord de l'écran.

3 Affinage numérique

Pour être plus précis, il vaut mieux utiliser la table en fixant la valeur initiale de x ainsi que son pas d'avancement.

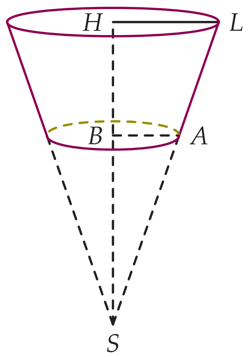
1) En utilisant la table, dresser un nouveau tableau qui doit permettre de donner une valeur approchée au centimètre près de la valeur de x pour laquelle l'aire semble être maximale.

2) Donner cette valeur ainsi que celle de l'aire correspondante.

TP 2 Histoire de seaux

Ce TP fait suite à l'activité d'approche 2 tout en étant indépendant.

1 Volume total du seau



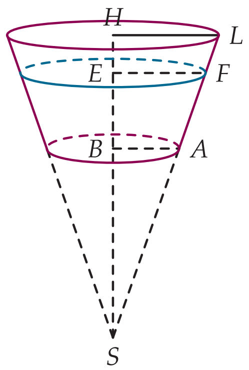
Ci-contre, on a représenté le tronc de cône qui modélise le seau ainsi qu'une coupe « verticale » du seau.
B est le centre du disque de base et H celui du disque supérieur.
On a complété la figure afin de faire apparaître le cône complet.
On rappelle que :

- $BA = 1\,\text{dm}$ (car le diamètre inférieur est $2\,\text{dm}$) ;
- $HL = 1{,}5\,\text{dm}$;
- $HB = 2{,}8\,\text{dm}$.

On pose (en dm) : $r = BA = 1$; $R = HL = 1,5$ et $h = HB = 2,8$.

1) Calculer HS.
2) En déduire le volume du cône complet de sommet S, de base le cercle de centre H et de rayon R.
3) Calculer BS.
4) En déduire le volume du cône ôté (de sommet S, de base le cercle de centre B et de rayon r).
5) En déduire le volume du tronc de cône qui modélise le seau. C'est la capacité totale du seau.

2 Volume d'eau dans le seau



Ci-contre, on a représenté le modèle du seau contenant de l'eau. On retrouve les éléments précédents auxquels s'ajoute le point E qui est le centre du disque supérieur de l'eau présente dans le seau. Ce disque a pour rayon EF.
On note $x = BE$ (en dm).

1) Exprimer SE en fonction de x.
2) Exprimer EF en fonction de x.
3) En déduire le volume du cône de sommet S, de base le cercle de centre E et de rayon EF.
4) Exprimer le volume d'eau dans le seau à l'aide de x.
5) Utiliser la calculatrice pour compléter le tableau. (Arrondir les valeurs à 10^{-1} près.)

Hauteur en dm	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Volume d'eau en litres						

6) Utiliser l'expression de $V(x)$ afin de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de la hauteur d'eau pour laquelle le volume d'eau est de :
a) 1 L **b)** 2 L **c)** 5 L
7) En comparant les résultats obtenus à la question **6**, les graduations d'une jauge pour mesurer le volume d'eau présent dans le seau sont-elles régulières ?

Travaux pratiques

TP 3 Introduction à Algobox

INFO

1 Algorithme

Pour commencer, voici un algorithme.

1) Ouvrir le logiciel Algobox et programmer l'algorithme ci-contre.

2) Expliciter chaque ligne de ce programme. (Ne pas hésiter à utiliser le mode pas à pas).

3) Comment faire calculer pow(5.7) ?

4) Déterminer ce que fait ce programme.

5) Ajouter « Tracer point (x,c)". » à l'algorithme. À quoi sert cette nouvelle ligne ?

```
Algorithme : Antécédent
Liste des variables utilisées
   a : nombre
   b : nombre
   c : nombre
   x : nombre
Entrées
   Demander b
Traitements
   Donner à a la valeur de pow(x.2)
   Donner à c la valeur de a-b+4
Affichage
   Afficher c
Fin de l'algorithme
```

2 Programme de calcul

Le programme de calcul ci-dessous peut s'appliquer à n'importe quel nombre.
Le programmer sur Algobox.

1) doubler le nombre de départ ;
2) ajouter 5 ;
3) multiplier par 3 ;
4) ajouter le nombre de départ.

Récréation, énigmes

Ils ont dit, ils ont fait ...

Associer chaque proposition au mathématicien qui l'a découverte ou dite et la situer dans le temps.

- LEIBNIZ Gottfried
- DESCARTES René
- EULER Leonhard
- BERNOULLI Jean
- GREGORY James
- ORESME Nicolas
- 1673
- 1667
- 1748
- XVII^{e} s
- XIV^{e} s

1) Introduction du terme de fonction

2) Notation des fonctions

3) Définitions

a) Relation qui permet de faire correspondre à une longueur donnée, une autre longueur déduite de la première par un nombre fini d'opérations algébriques.

b) Une fonction est définie comme une quantité obtenue à partir d'autres quantités par une succession d'opérations algébriques ou par n'importe quelle opération imaginable.

c) On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée, de quelque manière que ce soit, de cette grandeur variable et de constantes.

d) Une fonction est une expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes.

e) Chaque chose mesurable, à l'exception des nombres, est imaginée comme une quantité continue.

SOLUTIONS

Chapitre F1
Généralités sur les fonctions

Auto-évaluation

1 1) 17 2) -4

2 1) 5,5 2) $23/4$

3 $\dfrac{5}{3}$

4 1) A 2) $(3;0)$ 3) B et E 4) E et H

S'entraîner

1 5

2 5

3 0

4 1) 4 2) 2 ou 10

5 0,5

6 3

7 1) 0 2) 4 3) $\approx 1,5$ 4) 4

8 $(3;5)$

9 $k(-1) = 2$

10 non

11 -8

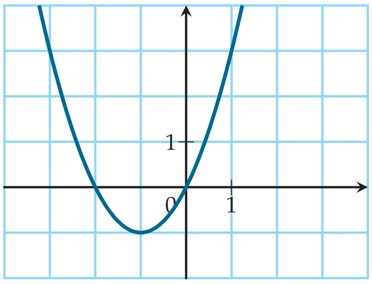
14

1) 2
2) Les entiers de 20 à 29.
3) $x = 31$ et $p(3) = 0$
4) quotient de la division euclidienne de x par 10.

17

x	-2	-1	0	2	3
$f(x)$	-4	0	-2	0	16

26



37 1) 26 2) 6 3) 0 4) $15+7\sqrt{5}$

38

1) $-0,5$
2) $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$
3) -1

46

1) 1,5
2) 3
3) $\approx -1,3$ et $\approx 1,3$
4) 0

Auto-évaluation QCM

58 a
59 c
60 a
61 b
62 c
63 b
64 b
65 b
66 a
67 c
68 b c
69 b
70 c d
71 a