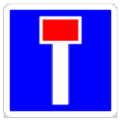
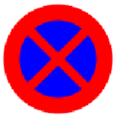
Je résous des problèmes

En éducation à la santé

1 Pour chacun de ces panneaux de signalisation, indique s'il a des axes de symétrie et/ou un centre de symétrie.

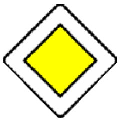
a. 

b. 

c. 

d. 

e. 

f. 

g. 

h. 

i. 

j. 

Résoudre un problème

2 Sans figure

Mélinda a réalisé une superbe figure et son image par une symétrie centrale.

Malheureusement, elle a perdu sa feuille mais elle avait pris la précaution de faire le tableau suivant sur son cahier.

Point	E	T	R	S	A	C
Symétrique	V	J	I	S	Z	D

Frédérique lui fait remarquer qu'avec un tel tableau, on n'a pas besoin de la figure pour obtenir des indications.

a. Quel est le centre de la symétrie ?

b. On sait que ET = 3,4 cm et ZD = 5,1 cm.

Donne les longueurs AC et VJ. Justifie.

c. RSA est un triangle équilatéral de 3 cm de côté.

Quel autre triangle équilatéral est-on certain d'avoir sur la figure ? Justifie.

d. On sait que VJ = JI. Quelle est la nature du triangle ETR ? Pourquoi ?

3 Qui est qui ?

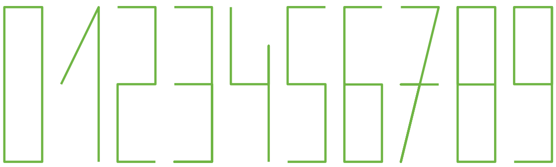
A, B, C, D, E, F, G, H, I et J sont 10 points tels que 5 d'entre eux sont les symétriques des 5 autres dans la symétrie de centre O.

Grâce aux informations ci-dessous, reconstitue les couples de points symétriques.

- O est le milieu de [AC] ;
- AJ = CG ; EJ = HG et IJ = DG ;
- I, O et D sont alignés tel que OI = OD ;
- E et H sont diamétralement opposés sur un cercle de centre O.

4 Nombres et centre de symétrie

Christian a écrit les chiffres comme ci-dessous :



a. Il dit : « Si je fais le double du produit de 17 par 29, j'obtiens le plus grand nombre de trois chiffres différents qui possède un centre de symétrie. ».

A-t-il raison ?

b. Trouve le plus petit nombre de trois chiffres différents dont l'écriture possède un centre de symétrie.

Trace une figure et place le centre de symétrie.

5 Casse-tête

Soit un angle $\widehat{BAD}$ mesurant 120° tel que AB = 4 cm et AD = 5 cm.

Soit C un point tel qu'un quadrilatère non croisé formé par les points A, B, C et D admette un centre de symétrie.

a. Trace une figure à main levée.

b. Combien y a-t-il de positions possibles pour le point C ?

Pour chaque cas, indique la position du centre de symétrie.

c. Trace autant de figures qu'il y a de centres de symétrie et indique pour chaque cas le nom et la nature du quadrilatère ainsi construit.

Je résous des problèmes

6 Rectangle et symétrie

a. Construis un rectangle ABCD tel que AB = 4 cm et AD = 3 cm.

b. Place le point E tel que les points B, C et E soient alignés dans cet ordre et que CE = 3 cm.

c. Place le point F tel que les points D, C et F soient alignés dans cet ordre et que CF = 4 cm.

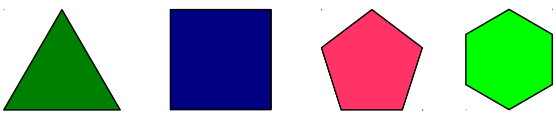
d. Démontre que les triangles BCD et ECF sont symétriques par rapport à C.

e. Déduis-en que DB = FE.

f. Que peux-tu dire des droites (DB) et (FE) ? Justifie ta réponse.

7 Polygones : axes et centre de symétrie

Voici les quatre premiers polygones réguliers à 3, 4, 5 et 6 côtés.



a. Pour chacun d'eux, indique s'il a un centre de symétrie.

b. D'après toi, qu'en serait-il pour un polygone régulier

- à 27 côtés ?
- à 28 côtés ?

Quelle pourrait être la règle ?

c. Pour chacun d'eux, indique combien il a d'axes de symétrie.

d. D'après toi, combien d'axes de symétrie aurait un polygone régulier

- à 27 côtés ?
- à 28 côtés ?

Quelle pourrait être la règle ?

8 Construis un parallélogramme dont

- le périmètre est 16 cm ;
- la longueur d'un côté est le triple de celle d'un côté consécutif.

9 Trace deux cercles concentriques de centre O.

En te servant uniquement d'une règle non graduée, trace un parallélogramme de centre O dont deux sommets appartiennent à l'un des cercles et les deux autres à l'autre cercle.

10 Avec des cercles

a. Construis un cercle (c_1) de centre O et de rayon 3,5 cm

b. Place deux points N et P sur (c_1) tels que [NP] soit un diamètre de (c_1).

c. Construis un cercle (c_2) de centre O et de rayon 5 cm.

d. Place deux autres points Q et R sur (c_2), non alignés avec N et P tels que [QR] soit un diamètre de (c_2).

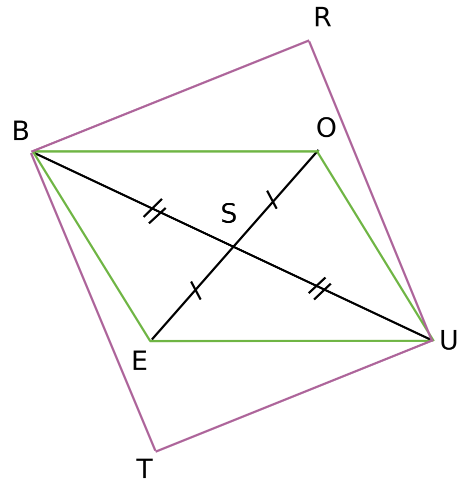
e. Démontre que le quadrilatère NQPR est un parallélogramme.

f. Donne les longueurs NP et QR.

Justifie ta réponse.

11 L'un dans l'autre

Les quadrilatères BOUE et BRUT sont des parallélogrammes.



a. Que représente le point S ?

b. Démontre que le quadrilatère TERO est un parallélogramme.

12 Bissectrices

a. Construis un parallélogramme ABCD tel que $\widehat{ADC}$ = 110°, DA = 5 cm et DC = 9 cm.

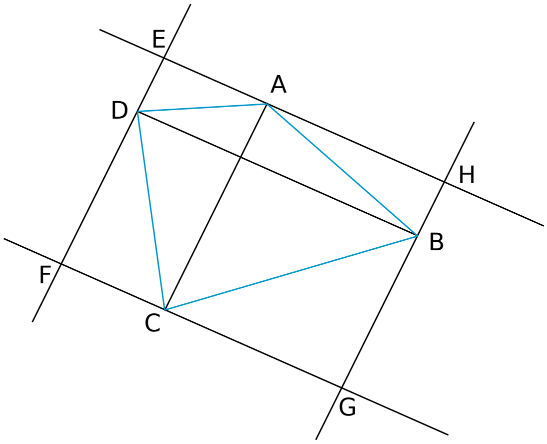
b. Construis la bissectrice de l'angle $\widehat{ADC}$ qui coupe le segment [AB] en K.

c. Construis la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ qui coupe le segment [DC] en L.

d. Démontre que les angles $\widehat{KDC}$ et $\widehat{ABL}$ sont de même mesure.

e. Démontre que le quadrilatère LBKD est un parallélogramme.

13 D'un quadrilatère à l'autre



Sur la figure ci-dessus, on a dessiné un quadrilatère ABCD puis on a tracé les parallèles aux diagonales passant par les sommets A, B, C et D du quadrilatère.

Les droites ainsi obtenues se coupent en E, F, G et H.

a. Démontre que le quadrilatère EFGH est un parallélogramme.

b. On suppose maintenant que ABCD est un rectangle.

Construis une nouvelle figure et démontre que EFGH est un losange.

c. On suppose enfin que ABCD est un losange.

Construis une nouvelle figure et démontre que EFGH est un rectangle.

14 Les poupées russes

a. Soit ABCD un parallélogramme. Les droites (AC) et (BD) se coupent en O. Fais une figure.

b. Démontre que O est le milieu de [AC].

c. Soit E le milieu de [DO] et F le milieu de [BO]. Explique pourquoi O est le milieu de [EF].

d. Démontre que AECF est un parallélogramme.

15 Comme au cirque

a. ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD].

La perpendiculaire à (AC) passant par D coupe (AB) en I et la perpendiculaire à (AC) passant par B coupe (DC) en J.

Construis la figure.

b. Démontre que le quadrilatère IBJD est un parallélogramme.

16 Figures juxtaposées

a. Construis un triangle équilatéral ABC de 5 cm de côté.

b. À l'extérieur du triangle et de telle sorte que les figures ne se recouvrent pas,

- place les points D et E tels que ABDE soit un rectangle avec AD = 7 cm ;
- place les points F et G tels que ACFG soit un losange avec $\widehat{ACF}$ = 150°.

c. En justifiant, donne la mesure de l'angle $\widehat{CAG}$ puis celle de l'angle $\widehat{BAG}$.

Que peut-on en déduire pour les points G, A et E ? Justifie.

17 Bissectrices de deux angles consécutifs

a. Construis un parallélogramme ABCD puis les bissectrices (d_1) et (d_2) respectivement des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAD}$.

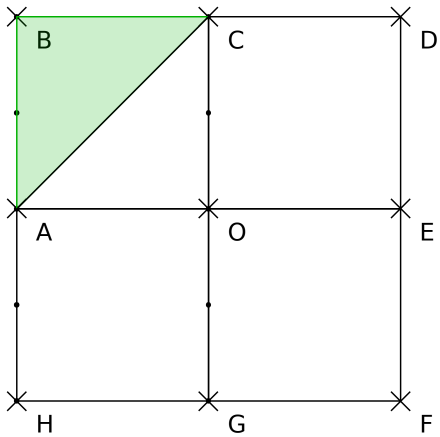
Ces droites se coupent en un point U.

b. Détermine $\widehat{BAU} + \widehat{ABU}$ sans mesurer d'angle.

Quelle est la nature du triangle ABU ?

c. Que peut-on en déduire pour les droites (d_1) et (d_2) ?

18 ABCO, CDEO, EFGO et GHAO sont des carrés. BDFH est un carré de centre O.



Quelle est l'image du triangle ABC dans les cas suivants ?

(On donnera ces résultats sans les justifier.)

a. Par la rotation de centre O, d'angle 90°, qui amène G en E.

b. Par la translation qui transforme B en O.

c. Par la symétrie d'axe (AE).

d. Par la symétrie centrale de centre O.

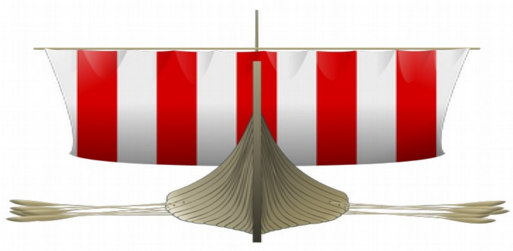
Je résous des problèmes

19 ABC est un triangle ;

• Le point D est le symétrique de A par rapport à B ;

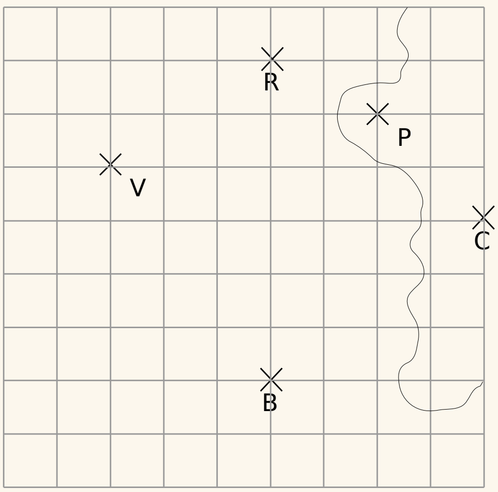
• Le point E est l'image de B par la translation qui transforme A en C.

Montre que le triangle ABC est le translaté du triangle BDE par une translation qu'il faudra préciser.



20 **Brevet (Rennes, 1996)**

Sur cette figure, la ligne courbe représente la côte ; P est un phare ; C un clocher ; B une balise ; R un rocher ; V un voilier.



a. Le voilier V se déplace selon les transformations suivantes :

• V effectue une translation qui transforme R en P et parvient en V_1.

• Il se déplace de V_1 à V_2 par une rotation de centre C et d'angle 90° dans le sens indirect.

• Enfin, sa dernière position V_3 est l'image de V_2 par la symétrie de centre B.

b. Place les points V_1, V_2, V_3 sur le quadrillage.

c. Sachant qu'un carreau du quadrillage représente 1 carré de 1 mille marin de côté, exprime, à l'aide de π, la mesure exacte du trajet parcouru par le voilier entre V et V_3.
On donnera la réponse en milles marins.

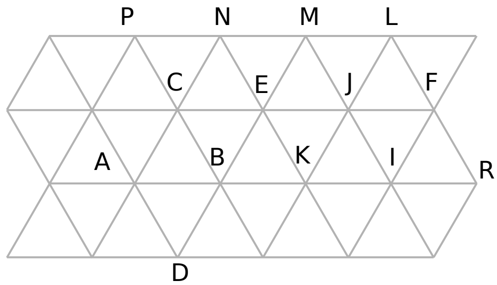
21 ABCD est un parallélogramme.

• Le point I est l'image de B par la translation qui transforme A en C ;

• Le point J est l'image de A par la translation qui transforme B en D.

Montrer que I, J, C et D sont alignés.

22 Sur la figure ci-dessous sont représentés des triangles équilatéraux.



a. Construire le point Q, symétrique de A par rapport à la droite (BE).

b. Construire le point P, image du point J par la rotation de centre I et d'angle 120° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

c. Quelle transformation permet de passer du triangle ABC au triangle IRF ?

Préciser ses éléments caractéristiques.

d. Quelle transformation permet de passer du triangle ABD au triangle RIF ?

Préciser ses éléments caractéristiques.

23 Construire un triangle ABC connaissant la longueur de 2 côtés (AB=4 cm et AC=6 cm) et de la hauteur issue de A (AH=3cm).

Combien de triangles pouvez-vous construire ? Sont-ils égaux ?

24 On considère le triangle MNP rectangle en M. On trace la hauteur de ce triangle issue de M. Elle coupe [NP] en H.

a. I et J sont les milieux respectifs de [MN] et [MP].

b. Montrer que les triangles MIH et MJH sont des triangles isocèles respectivement en I et en J.

c. Montrer que la droite (IJ) est la médiatrice du segment [MH].

d. En utilisant une symétrie axiale (à préciser), montrer que les droites (HI) et (HJ) sont perpendiculaires.

25 ABCD est un parallélogramme de centre O. La perpendiculaire à (AC) menée par B coupe (AC) en B' et la perpendiculaire à (AC) passant par D coupe (AC) en D'.

Le but du problème est de démontrer de deux manières différentes que DD'BB' est un parallélogramme.

1re partie : avec une symétrie

On considère la symétrie de centre O notée s.

a. Démontre que (DD') et (BB') sont parallèles.

b. Quel est l'image de B par s ?

c. Déduis de ces deux questions que (DD') est l'image de (BB') par s.

d. Pourquoi O est-il le milieu de [B'D'] ?

e. Démontre que DD'BB' est un parallélogramme.

2e partie : avec des triangles égaux

a. Démontre que $\widehat{OBB'} = \widehat{ODD'}$.

b. Démontre que ODD' et OBB' sont deux triangles égaux.

c. Déduis que O milieu de [D'B'].

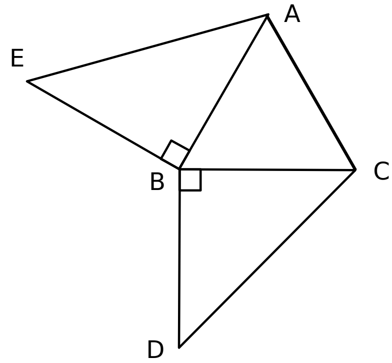
d. Démontre que DD'BB' est un parallélogramme.

26 ABC est un triangle équilatéral, CBD et ABE sont deux triangles rectangles isocèles en B disposés comme l'indique la figure ci-après.

I est le milieu de [AC] et J celui de [ED].

On note H le point d'intersection de [AD] et [EC].

On se propose de démontrer de deux manières différentes que EC = AD et que les droites (EC) et (AD) sont perpendiculaires.



1re partie : avec les rotations

On note r la rotation de centre B, d'angle 90° dans le sens direct.

a. Quelles sont les images de A et D par r ?

b. Déduis-en l'image du segment [AD] par r.

c. Démontre alors que CE=AD et que les droites (EC) et (AD) sont perpendiculaires.

2e partie : avec les symétries

a. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{ABI}$.

Pour la suite de l'exercice, on admet que les points I, B et J sont alignés et que (IJ) est la médiatrice de [DE] et [AC].

b. En utilisant une symétrie axiale (dont on précisera l'axe), démontre que EC=AD.

c. On trace le cercle (c) de centre B passant par A.

Les points E, D, C appartiennent-ils à (c) ?

d. Démontre que $\widehat{CED} = \widehat{EDA} = 45°$.

e. Déduis-en que les droites (EC) et (AD) sont perpendiculaires.

En utilisant le numérique

27 Points d'intersection de deux cercles

a. Avec un logiciel de géométrie dynamique,

- construis un cercle de centre I et de rayon 3 cm et place un point O quelconque ;
- construis le symétrique du cercle par rapport au point O.

b. Combien de points d'intersection le cercle et son symétrique peuvent-ils avoir ?

Selon la position du point O, envisage tous les cas possibles. Pour chacun des cas, fais un schéma sur ton cahier.

28 Un défi en géométrie dynamique !

a. Avec un logiciel de géométrie dynamique, construis :

- trois points A, B et C ;
- le segment [BC]
- Le point O, milieu du segment [BC].

b. Comment construire le symétrique de A par rapport à O en ne construisant que des droites et des droites parallèles ?

c. Quelle propriété de la symétrie centrale as-tu utilisée ?

Je résous des problèmes

29 Milieu de trois segments

a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construis trois segments [AB], [CD] et [EF] ayant le même milieu O.

b. Construis trois parallélogrammes dont les sommets sont parmi les points A, B, C, D, E et F.

c. Nomme ces trois parallélogrammes.

30 Carré en géométrie dynamique

a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique,

- trace un segment [AB] ;
- construis les points C et D tels que ABCD soit un carré. (Attention, ABCD doit « rester carré » lorsque tu déplaces A, B, C ou D !)

b. Décris ton protocole de construction en indiquant les propriétés du carré que tu utilises à chaque étapes.

c. Y a-t-il plusieurs façons de procéder ?

31 Avec la symétrie centrale

a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construis un rectangle PLUS.

b. Construis les points E et A, symétriques respectifs des points U et P par rapport à L.

c. Déplace les points U et P. Quelle semble être la nature du quadrilatère PEAU ?

d. Démontre la conjecture que tu as faite à la question précédente.

32 Points cocycliques...

a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construis un rectangle ABCD de centre O.

b. Construis le cercle de centre O passant par A.

- Que remarques-tu ?
- Démontre ce résultat.

c. On dit que des points sont cocycliques lorsqu'ils sont situés sur un même cercle.

En règle générale, les sommets d'un parallélogramme sont-ils cocycliques ?

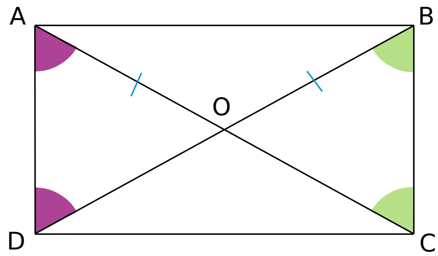
d. Éric affirme : « Si quatre points sont cocycliques, alors ils sont les sommets d'un rectangle. ».

À l'aide d'un contre-exemple que tu construiras grâce au logiciel de géométrie dynamique, montre qu'il a tort.

Modifie sa phrase pour la rendre vraie.

33 Avec les angles

Sur la figure ci-dessous : $\widehat{OAD} = \widehat{ODA}$, OA = OB et $\widehat{OBC} = \widehat{BCO}$.



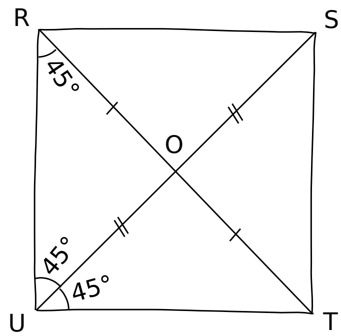
a. Quelle est la nature des triangles AOD, BOA et COB ? Justifie.

b. Que peux-tu en déduire pour les longueurs OA, OB, OC et OD ?

c. Démontre alors que le quadrilatère ABCD est un rectangle.

d. Les angles $\widehat{OAD}$ et $\widehat{OBC}$ ont-ils la même mesure ? Explique pourquoi.

34 En utilisant le codage de la figure



a. Démontre que le quadrilatère RSTU est un parallélogramme.

b. Peut-on être plus précis sur la nature du quadrilatère RSTU ? Justifie.

35 Avec un logiciel de géométrie dynamique.

a. Trace un quadrilatère quelconque.

b. Construis les symétriques de ce quadrilatère par rapport à chacun des milieux de ses côtés.

c. Par quelle transformation passe-t-on directement de l'un de ces symétriques à un autre symétrique ?

d. En poursuivant des constructions identiques au **b.** à partir des quadrilatères obtenus réalise-t-on un pavage du plan ?

e. Et si on prend un pentagone au départ ?

36 Plutôt deux fois qu'une

1re Partie : à la main

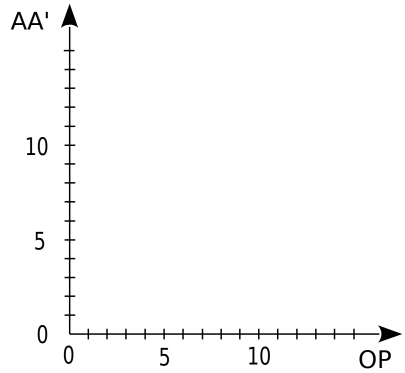
a. Sur une feuille non quadrillée, chaque élève du groupe doit effectuer le programme de construction suivant :

- Tracer un triangle ABC.
- Placer deux points O et P.
- Tracer le triangle $A_1B_1C_1$, symétrique du triangle ABC par rapport à O.
- Tracer le triangle A'B'C', symétrique du triangle $A_1B_1C_1$ par rapport à P.
- Tracer en rouge le segment [OP] et en vert le segment [AA'].
- Inscrire la longueur du segment [OP] et la longueur du segment [AA'] sur la figure.

b. Sur votre cahier, reproduisez le tableau ci-dessous et complétez-le en reportant les longueurs trouvées par les camarades de votre groupe.

	Élève 1	Élève 2	Élève 3	Élève 4
OP				
AA'				

c. Sur votre cahier, reproduisez le graphique ci-contre en prenant comme unité le centimètre et complétez-le à l'aide du tableau de la question **b.**



2e Partie : avec un logiciel de géométrie dynamique

a. Effectuez le programme de construction de la question **a.**.

b. Affichez les longueurs des segments [AA'] et [OP].

c. Déplacez le point A. Que remarquez-vous ?

d. Déplacez le point O. Que remarquez-vous ?

e. Que se passe-t-il si on place le point O sur le point P ? Pourquoi ?

3e partie : en utilisant un tableur

En utilisant un tableur, tracez un graphique représentant la longueur AA' en fonction de OP. Pour cela, vous utiliserez les résultats de la question **b.** de la **1re Partie** .

Pavage du plan

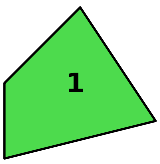
"Un **pavage** est une méthode de remplissage d'un espace à l'aide d'un motif répétitif, sans trou ni chevauchement."

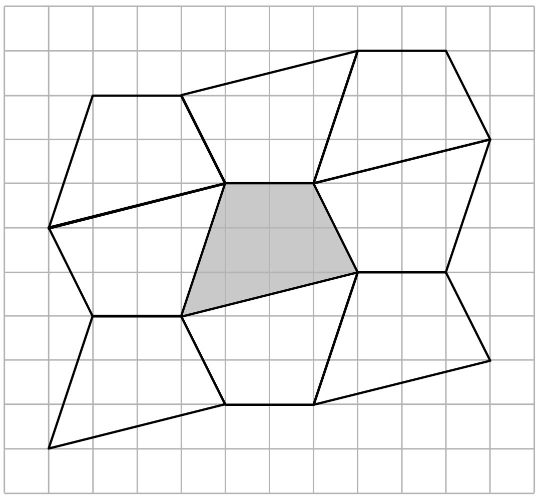
37 Pavage

a. On a réalisé le pavage ci-contre à partir du quadrilatère grisé.

Explique comment réaliser un tel pavage en utilisant uniquement des symétries centrales.

b. Trace un pavage en prenant comme figure de base le quadrilatère **1**.



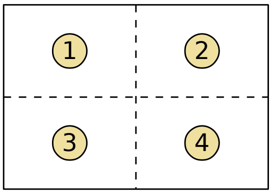


Je résous des problèmes

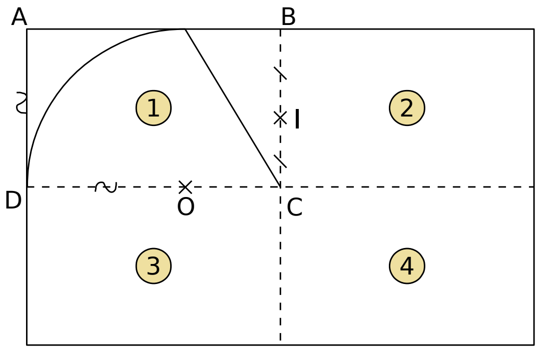
38 Pavage rectangulaire

1re partie

a. À partir d'une feuille au format A4, effectuez deux pliages pour obtenir quatre rectangles de même taille comme sur le schéma ci-dessous.



b. Sur votre feuille, construisez dans le rectangle 1, la figure ci-dessous (O est le centre de l'arc de cercle).



c. Construisez le symétrique par rapport à I de la figure tracée dans le rectangle 1. Dans quelle partie de la feuille va-t-il se situer ?

d. Construisez les symétriques par rapport à la droite (DC) des figures des parties 1 et 2.

e. Rassemblez toutes les feuilles du groupe que vous placerez les unes à côté des autres pour former un grand rectangle. C'est un pavage rectangulaire.

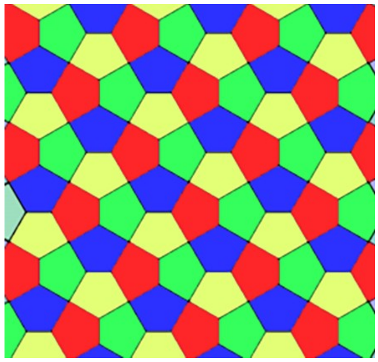
2e partie

a. À partir de nouvelles feuilles A4, tracez, dans le rectangle 1, un motif géométrique composé de droites, segments ou cercles. Tous les élèves du groupe doivent avoir exactement le même motif.

b. De la même façon qu'à la 1re partie, construisez l'image, par la symétrie de centre I, de la figure tracée dans le rectangle 1 puis l'image, par la symétrie d'axe (DC), des figures tracées dans les rectangles 1 et 2.

c. En regroupant les feuilles, on obtient ainsi un nouveau pavage rectangulaire.

39 Voici une partie d'un pavage du plan. Il est construit à partir d'une seule figure de base simple.



Pour dessiner cette figure de base, Yann propose de couper un carré selon une diagonale et de faire subir à une des moitiés une rotation de 30° autour d'un des sommets de cette diagonale.

a. Réalise la construction proposée par Yann. Te paraît-elle convenir ?

b. Dessine un motif qui permettrait d'obtenir tout le pavage par des translations.

c. Dans ce motif comment passe-t-on d'une figure de base à une autre ?

40 Des pavages périodiques

Un pavage est périodique si, à l'aide des pavés de base, il est possible de constituer un motif qui se répète à l'identique

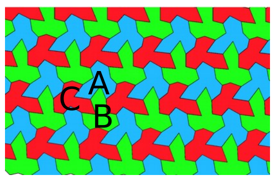
a. Construire un pavage dont le pavé de base est un hexagone régulier.

b. Construire un pavage dont le pavé de base est un octogone régulier.

c. Construis un pavage périodique à partir d'un carré et d'un triangle équilatéral de côté 3 cm.

d. Trouve un tableau d'Escher représentant un pavage périodique et identifie le pavé de base.

41 Voici une partie d'un pavage du plan.



On a isolé trois motifs colorés qui ont un sommet commun.

a. Précise par quelle transformation passe-t-on du motif A au motif B puis du motif B au motif C.

b. Déduis-en par quelle transformation on peut passer directement de A à C.