Je résous des problèmes

Information, communication, citoyenneté

1 Le numéro de sécurité sociale d'une personne comporte 13 chiffres.

On a ajouté à la fin de chaque numéro une clé de contrôle. Cette clé est un nombre de deux chiffres qui est calculé en utilisant le programme de calcul suivant : on effectue la division euclidienne du numéro de sécurité sociale par 97 puis on calcule la différence entre 97 et le reste de la division pour obtenir la clé.

a. Recherche la signification des autres nombres du numéro de sécurité sociale et indique ce que tu connais de Nathalie Durand grâce à son numéro.

b. Vérifie la clé de contrôle de Nathalie Durand.

c. Détermine la clé de M. Jean Caisse
1 67 04 81 065 027 .

En recopiant son numéro (13 chiffres + clé) sur une feuille de soins, M. Jean Caisse inverse les deux derniers chiffres du numéro à 13 chiffres.

d. Que devient alors son numéro (13 chiffres + clé) et comment l'erreur faite par M. Jean Caisse peut-elle être détectée ? Justifie.

Résoudre un problème

2 Décodage

Spiff le spationaute vient d'atterrir en catastrophe sur la planète Zorbak2. Les zorbakiens l'ont capturé et ont caché les clés de son aéronef dans un coffre. Les zorbakiens ont douze doigts, et donc, ont douze chiffres dont Spiff a trouvé une table de correspondance :

Chiffres terriens	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Chiffres Zorba-kiens	♋	✞	💧	♈	♉	♌	✈	& ⇗	♒ ♌	♓ ✞	♑ ❖	♐

En fait, Spiff a déchiffré une partie du code. Aide le à finir et explique ta méthode.

✞💧 = 14 ♈♒ = 44

✈♐ = ... = 51

3 Énigme

Trouve tous les nombres de trois chiffres divisibles à la fois par 3 et par 5 et dont le chiffre des centaines est 7.

4 Par groupes !

Lors d'un spectacle d'une compagnie de danse, tous les danseurs font un premier numéro quatre par quatre, simultanément, puis un second six par six, tous ensemble encore.

Pourront-ils tous participer à un numéro pour lequel il faut des groupes de 24 ? Justifie.

5 Chercher et trouver !

a. La somme de quatre multiples consécutifs de 7 est égale à 406.Quels sont ces quatre entiers ?

b. Démontre que la somme de deux entiers impairs consécutifs est un multiple de 4. A-t-on la même propriété pour la somme de deux entiers pairs consécutifs ?

c. Trouve les nombres entiers de trois chiffres multiples de 5, dont la somme des chiffres est 21.

6 Nouvellement arrivé dans le quartier, le mathématicien dit au facteur : « j'ai 3 filles. La somme de leurs âges (en nombres entiers) est 13, et le produit de leurs âges est égal au numéro de la maison d'en face. »

Le facteur, fin mathématicien lui-même, se retourne et regarde le numéro d'en face, réfléchit un tantinet, puis répond : « je n'ai pas assez d'éléments pour trouver la solution ».
« Vous avez raison » répondit le mathématicien. « Ma fille aînée s'appelle Hélène. »
« Dans ce cas, je connais la solution », répondit le facteur.

Et toi, vas-tu trouver aussi la solution ?

7 Dans une division euclidienne, que deviennent le quotient et le reste si on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre ?

8 Lorsque je divise 134 par ce nombre, le reste est 2 et lorsque je divise 183 par ce même nombre, le reste est 3.

Quel peut être ce nombre ?
Trouve toutes les solutions.

9 Distribution de crêpes

La grand-mère de Nicolas a fait 31 crêpes. Elle demande à Nicolas de les distribuer à parts égales à chacun de ses cinq cousins présents dans la cuisine. Lorsqu'il ne pourra plus en distribuer, il gardera le reste pour lui. Après réflexion, Nicolas s'empresse d'aller chercher ses trois autres cousins dans le jardin. Pourquoi ?

10 Divisibilité par 3

a. Recopie et complète :
$1\,453 = \ldots \times 10^3 + \ldots \times 10^2 + \ldots \times 10 + \ldots \times 1$
$= \ldots \times (999 + 1) + \ldots \times (\ldots + 1) + \ldots \times (\ldots + 1) + \ldots$

b. En utilisant la simple distributivité pour continuer le calcul du **a.** explique pourquoi 1 453 est divisible par 3 si $(1 + 4 + 5 + 3)$ l'est aussi.

11 On considère un nombre entier a

a. On suppose que a est impair.
Montre que a^2 est impair.

b. Déduis-en que si a^2 est pair alors a est pair.

12 Nombres divisibles par 7

a. 35 et 6 300 sont-ils divisibles par 7 ? Justifie.

b. En utilisant la question **a.**, démontre que 6 335 est divisible par 7.

c. Démontre que si x et y sont deux nombres entiers quelconques divisibles par 7,
alors leur somme $x + y$ est divisible par 7.

d. En écrivant le nombre 6 349 147 comme une somme de quatre multiples de 7, démontre que 6 349 147 est un multiple de 7.

e. Écris un nombre entier de 15 chiffres qui soit divisible par 7.

13 Pairs et impairs

a. Donne une écriture littérale d'un nombre pair ; d'un nombre impair.

b. On considère deux entiers positifs a et b.
Quelle est la parité de la somme $a + b$ lorsque :

- a et b sont tous les deux pairs ?
- a et b sont tous les deux impairs ?
- a est pair et b est impair ?

c. On considère deux entiers positifs a et b.
Quelle est la parité du produit $a \times b$?

c. Explique pourquoi le produit de deux entiers consécutifs est toujours pair.

14 On considère un entier naturel n .

a. Démontre que si n est impair alors 8 divise $n^2 - 1$.

b. Le nombre $1 + 3^n$ est-il toujours pair ?

c. Démontre que $2^n + 2^{n+1}$ est divisible par 3.

15 La conjecture de Goldbach

Une conjecture est un résultat que l'on pense vrai, mais qui n'a pas encore été démontré. Cette conjecture dit que tout nombre pair strictement supérieur à 2 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers. Trouve une telle somme pour 28, pour 44 et pour 68.

Je résous des problèmes

16 Le PGCD

Le PGCD de deux nombres entiers est le plus grand diviseur commun de ces deux nombres.

a. Décompose 42 et 60 en produits de facteurs premiers.

b. Écris tous les diviseurs de 42 et de 60.

c. Quel est le plus grand diviseur commun de 42 et 60 ? C'est le PGCD de 42 et 60. Appelons-le d.

d. Écris 42 et 60 sous la forme $d \times$ ...

e. Michèle dispose de 42 caramels mous et de 60 caramels durs. Elle décide de faire des petits sachets de caramels ayant tous le même contenu. Combien au maximum pourra-t-elle faire de sachets et combien contiendront-ils de caramels de chaque sorte ?

17 Parcours circulaires

Une roue de loterie est partagée en 12 cases numérotées de 0 à 11. Une puce très savante part de la case 0 et avance en sautant.

a. Sur quelles cases va-t-elle passer avant de retomber sur la case 0 si elle avance de 2 cases à la fois ? A-t-elle touché toutes les cases ?

b. Mêmes questions si elle avance de 3 cases à la fois, de 5 cases, de 8 cases.

c. Décompose 12, et 8 en produit de facteurs premiers.

d. Parmi les nombres 2, 3, 5 et 8, lesquels ont un diviseur commun avec 12 autre que 1 ?

e. Émet une conjecture pour déterminer à quelle condition, la puce touche toutes les cases.

En utilisant le numérique

18 Avec un tableur

a. Reproduis le tableau.

	A	B	C	D
1	dividende	diviseur	quotient	reste
2		17	22	6
3		34	33	32
4		115	57	114
5		41	807	16

b. Programme la cellule A2 pour qu'elle calcule le dividende de la division euclidienne.

c. Étire cette formule vers le bas pour obtenir le dividende de chacune des autres divisions.

19 Avec un tableur

a. Crée la table de multiplication de 7 en affichant les nombres entiers de 1 à 500 dans la colonne A et en faisant calculer les produits de ces nombres par 7 dans la colonne B.

b. Chacun des nombres est-il un multiple de 7 ?

• 190 • 567 • 1 638 • 3 587

c. Donne le nombre et la liste de tous les multiples de 23 compris entre 300 et 500.

20 Comprendre un programme

Que fait le programme suivant ?

```
cpt=0
lire les nombres A et B
tant que A>=B faire :
    A=A-B
    cpt=cpt+1
écrire cpt
écrire A
```

21 Primalité d'un nombre

Écrire un programme

- qui lit un nombre A (inférieur à 100)
- qui répond oui s'il est premier .

22 Crible d'Ératosthène

a. Recherche ce qu'est le crible d'Ératosthène.

b. Écris un programme qui :

- affiche un tableau de 10 lignes et de 10 colonnes
- remplis par ligne le tableau par tous les nombres entiers de 1 à 100.
- cherche dans le tableau le premier nombre non rayé puis raye tous les multiples de ce nombre.
- Affiche les nombres non rayés (sauf 1!).

23 Programmation

a. Dans certains langages de programmation, le reste de la division euclidienne de p par q s'écrit p%q.
Que donnerait 13%3 ? 39%7 ? 45%5 ?
Comment dans ces langages de programmation pourrait-on tester si p divise n ?

b. On donne l'algorithme suivant :

```
lire n
diviseur ←  0
pour i de 1 à n :
   si i divise n :
      diviseur ←  diviseur+1
afficher diviseur
```

Qu'afficherait-il si on saisit 6 pour n ? si on saisit 13 ?

c. Que calcule cet algorithme ?

d. Modifie cet algorithme pour qu'il nous dise si le nombre n saisi est premier.

e. Implémente cet algorithme dans le langage de ton choix.

24 Avec un tableur

a. Ouvre une feuille de calcul dans un tableur. Saisit 15 dans la cellule A1 et crée une liste de nombres de 1 à 30 dans la colonne C à partir de C1. *On veut chercher des couples de diviseurs entiers du nombre entré en A1.*

b. En D1 on fera afficher le résultat de la division de A1 par C1 si ce résultat est entier : =SI(MOD($A$1;C1)=0;$A$1/C1;"")

c. Recopie cette formule jusqu'à D30.

d. On peut s'arrêter des que le nombre de D devient inférieur au diviseur associé à C. Pourquoi ?

e. En D1, rentre

=SI(ET(MOD($A$1;C1)=0;$A$1/C1>=C1);$A$1/C1;"")

f. Recopie cette formule jusqu'à D30.

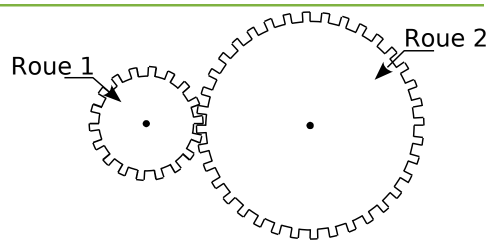
g. Choisis d'autres nombres en A1 entre 1 et 900. Comment peut-on repérer facilement si le nombre entré en A1 est premier ?

h. Combien y a-t-il de nombres premiers compris entre 850 et 900 ?

Étude des engrenages (le tour)

1re Partie

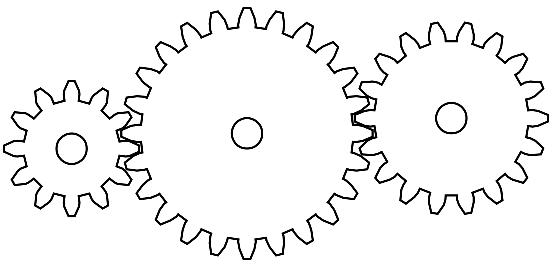
L'engrenage ci-contre composé de 2 roues. On appelle v_1 et v_2 les vitesses de rotation des roues 1 et 2, et z_1 et z_2 le nombre de dents des roues 1 et 2.



Exprime la vitesse v_2 en fonction de v_1, z_1 et z_2.

2e Partie

On s'intéresse à présent à un engrenage composé d'une roue de 12 dents, une roue de 24 dents et une roue de 18 dents.



a. Calcule en fonction de la vitesse v_1 de la 1re roue la vitesse v_2 de la 2e roue.

b. Calcule en fonction de la vitesse v_2 de la 2e roue la vitesse v_3 de la 3e roue.

c. Déduis-en la vitesse v_3 en fonction de la vitesse v_1.

d. Et si la roue du milieu avait eu 36 dents ?

3e Partie

a. La 4e vitesse d'une 2cv6 est composée d'un engrenage composé d'une roue de 19 dents qui fait tourner une roue de 25 dents, suivi d'un autre engrenage de 8 par 33 dents. Quel est le rapport final ?

b. Quand le moteur tourne à 1000 tours/minute, combien la roue d'une 2cv6 en 4e vitesse fait-elle de tours par minute ?

c. Le périmètre d'une roue de 2cv6 de taille 125R15 fait environ 1,80m.
Quelle est la vitesse théorique d'une 2cv6 en 4e à 1000 tours/minute ?

Je résous des problèmes

Aller plus loin avec les nombres

25 Développement décimal

a. Effectuer la division de 22 par 7 jusqu'à ce que les décimales se répètent.

b. Quel est le nombre minimal de chiffres nécessaire pour connaître le développement décimal de $\frac{22}{7}$?

c. Quelle est la 210e décimale de $\frac{22}{7}$?

d. Effectuer une recherche documentaire sur les premières approximations de π ?À quel moment de l'histoire de cette quête le nombre $\frac{22}{7}$ apparaît-il et qui l'a trouvé ?

26 Développement décimal (bis)

On considère le nombre $t = 0{,}1717...$ (on note ce nombre $0{,}\underline{17}$ pour dire 17 se répète infiniment dans le développement décimal).

a. Déterminer l'écriture fractionnaire de t (on pourra calculer $100 \times t - t$).

b. En remarquant que $3{,}\underline{562} = 3 + u$ où $u = 0{,}\underline{562}$, déterminer l'écriture fractionnaire de $3{,}\underline{562}$.

c. Montrer que $x = 0{,}\underline{9} = 0{,}9999... = 1$

27

a. Soient $c = 29\,444\,684$, $d = 13\,168\,063$, $e = 1\,229\,015\,134$ et $h = 549\,632\,277$. A-t-on $\frac{c}{d} = \frac{e}{h}$?

b. A-t-on $\sqrt{2} = \frac{22619537}{15994428}$?

28 Infinité de nombres premiers.

Pour le démontrer par l'absurde, on va supposer qu'il y en a un nombre fini et arriver à une contradiction. Soit $p_1, p_2, ..., p_n$ la liste de tous les nombres premiers dans l'ordre croissant.

a. Quel est le plus grand nombre premier ?

b. Soit $x = p_1 p_2 ... p_n + 1$. x est-il divisible par p_1 ? Par p_2 ? Par p_n ?

c. Montrer que x est un nombre premier.

Quel est le plus grand nombre premier ? Conclure.

29 Recherche d'une formule donnant des nombres premiers

Les nombres de la forme $n^2 - n + 41$ où n est un entier naturel sont-ils tous premiers ?

- À l'aide d'un tableur, calcule $n^2 - n + 41$ pour n allant de 1 à 20. Ces nombres semblent-ils premiers ?
- Pour $n = 50$, $n^2 - n + 41 = 2\,491$. 2 491 est-il premier ?
- Écrire un programme qui détermine si un entier n est premier.
- Écrire un programme qui détermine la plus petite valeur de n pour laquelle $n^2 - n + 41$ n'est pas premier. Quelle est cette valeur ?

30 Les nombres de Mersenne

Ils sont de la forme $M_n = 2^n - 1$ où n est un entier naturel.

- Faire afficher dans une feuille de calcul les nombres de la forme M_n pour n allant de 2 à 20. Sont-ils tous premiers ?
- – Vérifier que 1 023 est un multiple de 3 et de 31, puis que 4 095 est un multiple de 63.
- – Quelle conjecture peut-on émettre si M_n est premier ?
- – Existe-t-il dans notre liste un nombre M_n qui ne soit pas premier bien que n le soit ?
- Recherche : combien connaît-on (environ) de nombres de Mersenne qui sont premiers ?

31 Nombres parfaits

Les nombres parfaits sont les nombres qui sont égaux à la somme de leurs diviseurs (sauf eux-même). Par exemple, 6 a comme diviseurs 1, 2, et 3, et 6 = 1 + 2 + 3. Il n'y a que 3 nombres parfaits inférieurs à 1 000.

a. Il y a un nombre parfait compris entre 20 et 30. Trouver-le.

b. Montrer que 496 est un nombre parfait.

32 Nombres jumeaux

Deux nombres premiers sont jumeaux si leur différence est égale à 2. Donne 6 couples de nombres premiers jumeaux.