Cours et méthodes

1 Utiliser les racines carrées

Définition

Le nombre **positif** qui, élevé au carré, donne le nombre a s'appelle la **racine carrée** de a. On le note $\sqrt{a}$.

» **Exemple :** Il y a deux nombres qui, élevés au carré, donnent 25 : ce sont 5 et -5 car $5^2 = 25$ et $(-5)^2 = 25$. $\sqrt{25}$ est le nombre positif, c'est-à-dire 5.

Règles

Pour tout nombre **positif** a, on a $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.

» **Exemple :** $\sqrt{1}=1$; $\left(\sqrt{3{,}6}\right)^2=3{,}6$; $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ et $\sqrt{1{,}3\times1{,}3}=1{,}3$

Définition

Un **carré parfait** est le carré d'un nombre entier.

» **Exemple :** Voici la liste des 15 premiers carrés parfaits :
$1^2=1$; $2^2=4$; $3^2=9$; $4^2=16$; $5^2=25$; $6^2=36$; $7^2=49$; $8^2=64$; $9^2=81$; $10^2=100$; $11^2=121$; $12^2=144$; $13^2= 169$; $14^2=196$; $15^2=225$.

2 Calculer des longueurs avec le théorème de Pythagore

Théorème de Pythagore

Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Entraîne-toi à Calculer la longueur de l'hypoténuse

Énoncé

NIV est un triangle rectangle en V tel que VI=4 cm et VN=5 cm. Détermine la longueur de l'hypoténuse [NI] et donnes-en une valeur arrondie au mm.

Correction

Le triangle NIV est rectangle en V.
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$NI^2 = NV^2 + VI^2$

soit $NI^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41$

NI est une distance, donc NI>0 et on a :

$NI = \sqrt{41}$

$NI \approx 6{,}4$ cm

Entraîne-toi à Calculer la longueur d'un des côtés de l'angle droit

Énoncé

RAS est un triangle rectangle en A tel que RS = 9,7 cm et RA = 7,2 cm. Calcule AS.

Correction

Le triangle RAS est rectangle en A.
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$RS^2 = RA^2 + AS^2$

$9{,}7^2 = 7{,}2^2 + AS^2$

$94{,}09 = 51{,}84 + AS^2$

$AS^2 = 94{,}09 - 51{,}84$

$AS^2 = 42{,}25$

$AS = \sqrt{42{,}25}$ cm.

AS = 6,5 cm (**valeur exacte**).

3 Démontrer qu'un triangle est rectangle... ou pas

Réciproque et autre formulation du théorème de Pythagore

Soit un triangle ABC dans lequel [AB] est **le plus grand côté**.
Si $AB^2 = AC^2 + BC^2$ alors ce triangle est rectangle en C.
Si $AB^2 \neq AC^2 + BC^2$ alors ce triangle n'est pas rectangle.

Entraîne-toi à Vérifier qu'un triangle est ou n'est pas rectangle

Énoncé

NUL est un triangle tel que NU = 42 cm ; LU = 46 cm et LN = 62 cm.
Démontre que NUL n'est pas un triangle rectangle.

Correction

Dans le triangle NUL, le plus long côté est [LN]

D'une part, $LN^2 = 62^2$
$LN^2 = 3844$

D'autre part, $LU^2 + NU^2 = 46^2 + 42^2$
$LU^2 + NU^2 = 2116 + 1764$
$LU^2 + NU^2 = 3880$

Donc $LN^2 \neq LU^2 + NU^2$.
L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée donc le triangle NUL n'est pas rectangle.

Énoncé

NEZ est un triangle tel que NE = 75 cm ; EZ = 45 cm et NZ = 60 cm.
Démontre que ce triangle est rectangle.

Correction

Dans le triangle NEZ, le plus long côté est [NE].

D'une part, $NE^2 = 75^2$
$NE^2 = 5625$

D'autre part, $EZ^2 + NZ^2 = 45^2 + 60^2$
$EZ^2 + NZ^2 = 2025 + 3600$
$EZ^2 + NZ^2 = 5625$

Donc $NE^2 = EZ^2 + NZ^2$.
L'égalité de Pythagore est vérifiée donc le triangle NEZ est rectangle en Z.

4 Écrire une relation trigonométrique

À connaître

Dans un **triangle rectangle**,
- **le cosinus d'un angle aigu** est le quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse ;
- **le sinus d'un angle aigu** est le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur de l'hypoténuse ;
- **la tangente d'un angle aigu** est le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur du côté adjacent à cet angle.

Propriétés

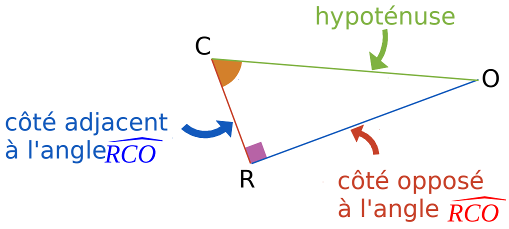
- Le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont toujours compris entre 0 et 1.
- La tangente d'un angle aigu est un nombre supérieur à 0.
- Le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu sont des nombres sans unité.

↘ Entraîne-toi à Écrire une relation trigonométrique

Énoncé

Le triangle COR est rectangle en R. Écris les formules donnant le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle $\widehat{RCO}$.

Correction



Le triangle COR est rectangle en R donc

$\cos(\widehat{RCO}) = \dfrac{\text{côté adjacent à } \widehat{RCO}}{\text{hypoténuse}}$

$\cos(\widehat{RCO}) = \dfrac{CR}{CO}$

$\sin(\widehat{RCO}) = \dfrac{\text{côté opposé à } \widehat{RCO}}{\text{hypoténuse}}$

$\sin(\widehat{RCO}) = \dfrac{RO}{CO}$.

$\tan(\widehat{RCO}) = \dfrac{\text{côté opposé à } \widehat{RCO}}{\text{côté adjacent à } \widehat{RCO}}$

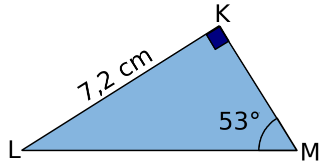
$\tan(\widehat{RCO}) = \dfrac{RO}{RC}$.

5 Calculer des longueurs avec la trigonométrie

↘ Entraîne-toi à Calculer une longueur

Énoncé

On considère KLM un triangle rectangle en K tel que KL = 7,2 cm et $\widehat{LMK}$ = 53°.
Calcule la longueur du côté [LM] arrondie au millimètre.



Correction

Dans le triangle KLM rectangle en K,
[LK] est le côté opposé à l'angle $\widehat{LMK}$;
[LM] est l'hypoténuse.
On peut utiliser le sinus de l'angle $\widehat{LMK}$.

$\sin(\widehat{LMK}) = \dfrac{\text{côté opposé à } \widehat{LMK}}{\text{hypoténuse}}$

$\sin(\widehat{LMK}) = \dfrac{KL}{LM}$ soit $\sin 53° = \dfrac{7,2}{LM}$

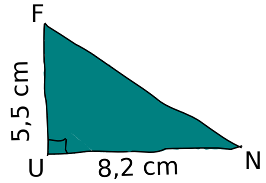
LM = 7,2 ÷ sin 53°
LM ≈ 9,0 cm.

6 Calculer la mesure d'un angle

↘ Entraîne-toi à Calculer la mesure d'un angle

Énoncé

Soit FUN un triangle rectangle en U tel que UN = 8,2 cm et UF = 5,5 cm.
Calcule la mesure de l'angle $\widehat{UNF}$ arrondie au degré.



Correction

Dans le triangle FUN rectangle en U, [FU] est le côté opposé à l'angle $\widehat{UNF}$;
[UN] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{UNF}$.
On peut utiliser la tangente de l'angle $\widehat{UNF}$.

$\tan\left(\widehat{UNF}\right) = \dfrac{\text{côté opposé à } \widehat{UNF}}{\text{côté adjacent à } \widehat{UNF}}$

$\tan\left(\widehat{UNF}\right) = \dfrac{UF}{UN}$

$\tan\left(\widehat{UNF}\right) = \dfrac{5,5}{8,2}$ donc $\widehat{UNF} = \tan^{-1}\left(\dfrac{5,5}{8,2}\right)$

$\widehat{UNF} \approx 34°$.