Cours et méthodes

1) Position relative de deux droites

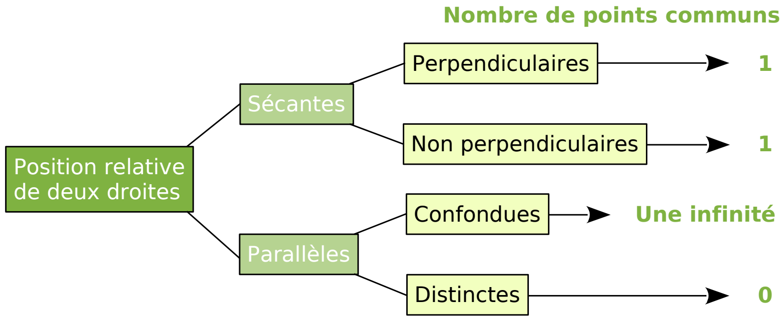
Propriété 1

Deux droites sont :
- soit sécantes ;
- soit parallèles.

Propriété 2

Deux droites sécantes sont :
- soit perpendiculaires.
- soit non perpendiculaires.

» **Remarque :** On peut résumer ceci dans un organigramme.



2) Inégalité triangulaire

Propriété

Dans un triangle, **la longueur d'un côté** est toujours **inférieure** à **la somme des longueurs des deux autres côtés**.
S'il y a égalité, les trois points sont alignés.

» **Remarque :** Pour vérifier si on peut construire un triangle, il suffit de vérifier que la plus grande longueur est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Entraîne-toi à Vérifier qu'un triangle est constructible

Énoncé

Peut-on construire le triangle COR avec CO = 5 cm ; OR = 6 cm et RC = 4 cm ?

Correction

Dans le triangle COR, [OR] est le plus grand côté.
Donc on calcule la somme des deux autres :
RC + CO = 4 + 5 = 9 .
Comme OR < RC + CO, le triangle COR est constructible.

3) Droites remarquables du triangle

A. Médiatrice

Définition

Les **médiatrices d'un triangle** sont les médiatrices des côtés de ce triangle, c'est à dire les droites perpendiculaires aux côtés passant par leur milieu.

Propriété 1

La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points **équidistants** des extrémités de ce segment. Soit (d) la médiatrice de [AB] : dire que M est sur la droite (d) est équivalent à dire que MA = MB.

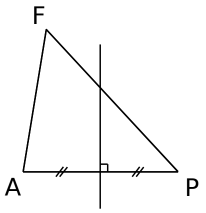
Propriété 2

Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est le **centre du cercle circonscrit à ce triangle.**

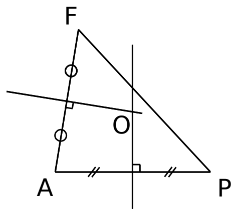
↘ Entraîne-toi à Tracer le cercle circonscrit à un triangle

■ **Enoncé:** Trace un triangle FAP et son cercle circonscrit

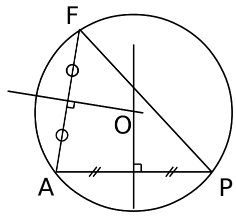
Correction:



On construit la **médiatrice** du segment [AP].



Il suffit de construire les médiatrices de deux côtés. Elles se coupent en O.



Le cercle circonscrit est le cercle de centre O et de rayon OA (ou OF ou OP).

B. Hauteur

Définition

Une **hauteur d'un triangle** est une droite perpendiculaire à un côté du triangle passant par le sommet opposé à ce côté.

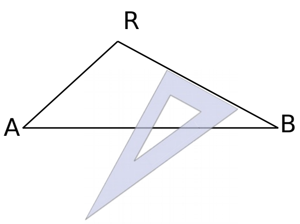
Propriété

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé **orthocentre.**

↘ Entraîne-toi à Tracer une hauteur d'un triangle

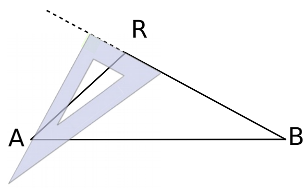
■ **Enoncé:** Trace un triangle ARB et la hauteur relative au côté [BR].

Correction:

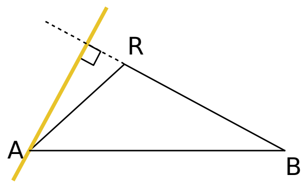


On positionne l'équerre perpendiculairement au côté [BR].

On fait glisser l'équerre jusqu'au point A.



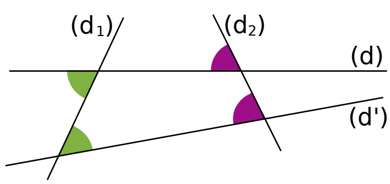
Il faut parfois prolonger le côté [BR].



La hauteur relative au côté [BR] est la droite perpendiculaire au côté [BR] et passant par A.

4) Angles et droites

Définitions



Les angles verts sont **alternes-internes**. Ils sont déterminés par les droites (d), (d') et la sécante (d_1).

Les angles violets sont **correspondants**. Ils sont déterminés par les droites (d), (d') et la sécante (d_2).

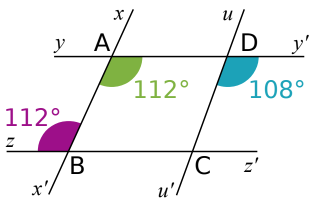
Propriétés

Si deux angles alternes-internes sont de même mesure
alors les deux droites coupées par la sécante sont parallèles.
Si deux angles correspondants sont de même mesure
alors les deux droites coupées par la sécante sont parallèles.

Entraîne-toi à Démontrer que deux droites sont parallèles

Énoncé

Les droites (yy') et (zz') sont-elles parallèles ? Les droites (xx') et (uu') sont-elles parallèles ?



Correction

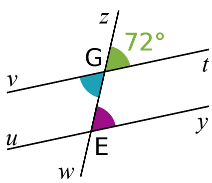
- Les angles $\widehat{x'Ay'}$ et $\widehat{xBz}$ déterminés par les droites (yy'), (zz') et la sécante (xx') sont alternes-internes.
  Les angles $\widehat{x'Ay'}$ et $\widehat{xBz}$ ont la même mesure.
  Donc les droites (yy') et (zz') sont parallèles.
- Les angles $\widehat{x'Ay'}$ et $\widehat{u'Dy'}$ déterminés par les droites (xx'), (uu') et la sécante (yy') sont correspondants.
  Si les droites (xx') et (uu') étaient parallèles alors les angles $\widehat{x'Ay'}$ et $\widehat{u'Dy'}$ seraient de la même mesure, ce qui n'est pas le cas.
  Donc les droites (xx') et (uu') ne sont pas parallèles.

Propriétés

Si deux angles alternes-internes sont déterminés par des droites parallèles
alors ils ont la même mesure.
Si deux angles correspondants sont déterminés par des droites parallèles
alors ils ont la même mesure.

Entraîne-toi à Déterminer des mesures d'angles

Énoncé : Les droites (vt) et (uy) sont parallèles. Calcule la mesure des angles $\widehat{zEy}$ et $\widehat{vGw}$.



Les angles correspondants $\widehat{zGt}$ et $\widehat{zEy}$ sont déterminés par les droites (vt) et (uy) qui sont parallèles. Ils sont donc de la même mesure. L'angle $\widehat{zEy}$ mesure donc 72°.

Les angles $\widehat{zGt}$ et $\widehat{vGw}$ sont opposés par le sommet. Ils sont donc de la même mesure. L'angle $\widehat{vGw}$ mesure donc 72°.

5) Angles d'un triangle

Propriété

Dans un triangle, **la somme des mesures des angles** est égale à 180°.

Entraîne-toi à Utiliser la somme des mesures des trois angles d'un triangle

Énoncé

Le triangle PAF est tel que $\widehat{PAF} = 67°$ et $\widehat{FPA} = 56°$.
Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{PFA}$?

Correction

$\widehat{PAF} + \widehat{FPA} = 67° + 56° = 123°$.
Or, la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°.
Donc $\widehat{PFA} = 180° - 123° = 57°$.