Cours et méthodes

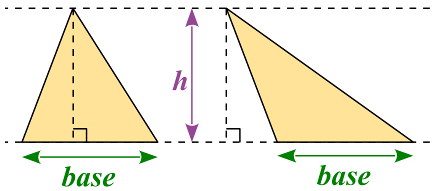
1 Déterminer une aire

Formules d'aire

Rectangle : $\mathcal{A}$ = Longueur × largeur

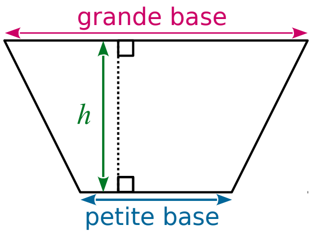
Carré : $\mathcal{A}$ = côté^2

Triangle quelconque :
$\mathcal{A}$ = base × hauteur ÷ 2

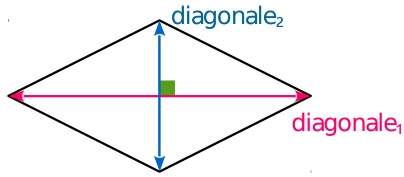


Disque : $\mathcal{A} = \pi \times$ rayon^2

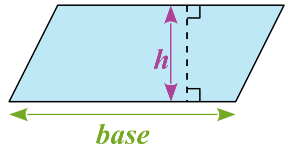
Trapèze :
$$\mathcal{A} = \frac{(\text{grande base} + \text{petite base}) \times \text{hauteur}}{2}$$



Losange : $$\mathcal{A} = \frac{\text{diagonale}_1 \times \text{diagonale}_2}{2}$$



Parallélogramme : $\mathcal{A}$ = base × hauteur



Enveloppe latérale d'un prisme droit ou d'un cylindre de révolution :
$\mathcal{A}$ = Périmètre de la base × hauteur

Sphère : $\mathcal{A} = 4 \times \pi \times$ rayon^2.

Entraîne-toi à Calculer des aires

Énoncé

Quelle est l'aire $\mathcal{A}$ d'un disque de rayon 7 m ?
Donner la valeur exacte puis un arrondi au dm² près.

Correction

La formule de l'aire du disque est : $\mathcal{A} = \pi \times r^2$.

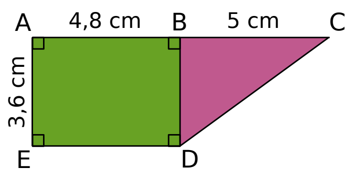
Ici, $\mathcal{A} = \pi \times (7\text{ m})^2$

$\mathcal{A} = 49 \times \pi\text{ m}^2$

$\mathcal{A} \approx 153{,}94\text{ m}^2$

Énoncé

Calcule l'aire de la figure ABCDE ci-contre.



Correction : La figure est constituée d'un rectangle ABDE et d'un triangle rectangle BCD.

- La formule de l'aire d'un rectangle est :
  $\mathcal{A}$ = Longueur × largeur
  Ici, $\mathcal{A}_{ABDE} = 4{,}8\text{ cm} \times 3{,}6\text{ cm} = 17{,}28\text{ cm}^2$
- La formule de l'aire d'un triangle rectangle est : $\mathcal{A}$ = base × hauteur ÷ 2
  Ici, $\mathcal{A}_{BCD} = 3{,}6\text{ cm} \times 5\text{ cm} \div 2 = 9\text{ cm}^2$

$\mathcal{A}_{ABCDE} = \mathcal{A}_{ABDE} + \mathcal{A}_{BCD} = 17{,}28\text{ cm}^2 + 9\text{ cm}^2$

$\mathcal{A}_{ABCDE} = 26{,}28\text{ cm}^2$

2 Déterminer un volume

Formules de volume

Cube : $\mathcal{V} = \text{côté}^3$

Pavé droit :
$\mathcal{V} = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$

Prisme Droit :
$\mathcal{V} = \text{Aire de la base} \times \text{hauteur}$

Cylindre de révolution :
$\mathcal{V} = \pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur}$

Pyramide :
$\mathcal{V} = \dfrac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$

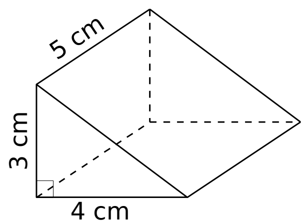
Cône de révolution :
$\mathcal{V} = \dfrac{\pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur}}{3}$

Boule :
$\mathcal{V} = \dfrac{4}{3} \times \pi \times \text{rayon}^3$

Entraîne-toi à Calculer des volumes

Énoncé

Détermine le volume du prisme droit suivant.



Correction

La formule du volume d'un prisme droit est :

$\mathcal{V} = \text{Aire de la base} \times \text{hauteur}$

Ici, la base est un triangle.
La formule de son aire est :
$\mathcal{A} = \text{base} \times \text{hauteur} \div 2$

Ici $\mathcal{A} = 4\text{ cm} \times 3\text{ cm} \div 2 = 6\text{ cm}^2$

Donc $\mathcal{V} = 6\text{ cm}^2 \times 5\text{ cm}$

$\mathcal{V} = 30\text{ cm}^3$.

Énoncé

Calcule le volume d'une pyramide de hauteur 2,50 m ayant pour base un losange de diagonales 4 m et 4,20 m.

Correction

La formule du volume d'une pyramide est :
$\mathcal{V} = \text{Aire de la base} \times \text{hauteur} \div 3$

Ici, la base est un losange.
La formule de son aire est :
$\mathcal{A} = \dfrac{\text{diagonale}_1 \times \text{diagonale}_2}{2}$

Ici $\mathcal{A} = 4\text{ cm} \times 4{,}2\text{ cm} \div 2 = 8{,}4\text{ cm}^2$

Donc $\mathcal{V} = 8{,}4\text{ cm}^2 \times 2{,}5\text{ cm} \div 3$

$\mathcal{V} = 7\text{ cm}^3$.

Énoncé

Calcule le volume d'une boule de rayon 5 cm.

Donne la valeur exacte puis un arrondi au dixième près.

Correction

La formule du volume de la boule est :

$\mathcal{V} = \dfrac{4}{3} \times \pi \times \text{rayon}^3$.

Ici $\mathcal{V} = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 5^3$

$\mathcal{V} = \dfrac{500}{3}\pi\text{ cm}^3$.

$V \approx 523{,}6\text{ cm}^3$

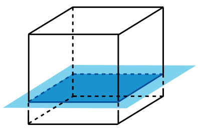
4 Utiliser un agrandissement ou une réduction

A. Sections de solides

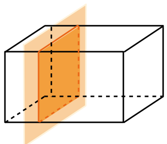
Propriétés

Dans un cube, un pavé droit, un prisme droit et un cylindre,
- une section parallèle à une face est de même nature et de mêmes dimensions que cette face ;
- une section parallèle à une arête (ou à l'axe pour le cylindre) est un rectangle, dont l'une des dimensions correspond à la longueur de cette arête (ou à l'axe).

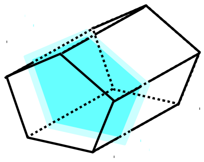
Cube



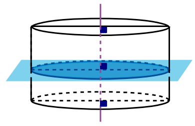
Pavé droit



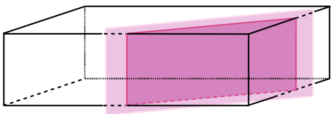
Prisme droit



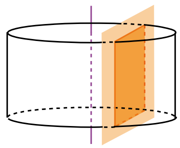
Cylindre



Pavé droit



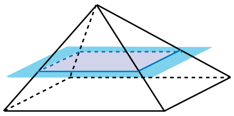
Cylindre



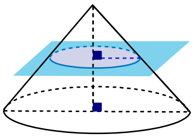
Propriétés

- Dans un cône ou une pyramide, une section parallèle à une face est de même nature que la face mais de taille réduite.
- Dans une sphère, une section parallèle à un grand cercle est un cercle de rayon réduit par rapport à celui du grand cercle.

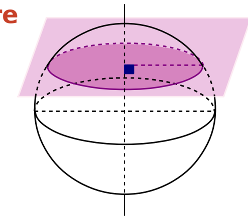
Pyramide



Cône



Sphère



B. Calculs en utilisant les sections

Propriété

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de rapport k ($k > 0$),
- les longueurs sont multipliées par k,
- les aires sont multipliées par k^2,
- les volumes sont multipliés par k^3

Entraîne-toi à Calculer l'aire ou le volume d'un objet agrandi ou réduit

Énoncé

Des ingénieurs ont construit une maquette au 1/5 000 d'un bassin de retenue.
La maquette mesure 1,60 m de long et contient 5 L d'eau. La surface du lac artificiel est 80 dm^2.
Quelle sera, en km, la longueur du futur lac artificiel ?
Quelle sera, en km^2, sa surface ? Quel sera, en m^3, le volume d'eau contenu dans le lac ?

Correction

Pour obtenir les longueurs réelles à partir des longueurs de la maquette au 1/5 000, le coefficient d'agrandissement est $k = 5\,000$.

- $L_{\text{réelle}} = k \times L_{\text{maquette}}$
  $L = 5\,000 \times 1{,}6$
  $L = 8\,000$ m
  Le lac mesure 8 km.
- $A_{\text{réelle}} = k^2 \times A_{\text{maquette}}$
  $A = (5\,000)^2 \times 80$ dm^2
  $A = 2\,000\,000\,000$ dm^2
  La surface du lac est 20 km^2.
- $V_{\text{réel}} = k^3 \times V_{\text{maquette}}$
  $V = (5\,000)^3 \times 5$ L
  Or, 1 m^3 correspond à 1 000 L
  $V = (5\,000)^3 \times 0{,}005$ m^3
  $V = 625\,000\,000$ m^3
  La contenance du lac est de 625 000 000 m^3 d'eau.

5 Mesurer avec des grandeurs composées

» **Exemple**

- les unités d'aire et de volume sont des grandeurs produits : m^2 = m × m et cm^3 = cm × cm × cm
- le débit, la vitesse, la masse volumique sont des grandeurs quotients.

Entraîne-toi à Convertir des grandeurs composées

Énoncé

La masse volumique du fer vaut 7,84 g·cm^{-3}.
Convertis-la en kg·m^{-3}.

Correction

« La masse volumique du fer vaut 7,84 g·cm^{-3} » signifie que 1 cm^3 de fer a une masse de 7,84 g.

Ainsi, $7{,}84 \text{ g·cm}^{-3} = \dfrac{7{,}84 \text{ g}}{1 \text{ cm}^3} = \dfrac{0{,}007\,84 \text{ kg}}{0{,}000\,001 \text{ m}^3}$

$\dfrac{0{,}007\,84}{0{,}000\,001} = 7\,840.$

La masse volumique du fer vaut donc 7 840 kg·m^{-3}.

Énoncé

Le 3 avril 2007, la rame TGV d'essai n°4402 établissait un nouveau record de vitesse officiel de 574,8 km·h^{-1}. Convertis cette vitesse en m·s^{-1}.

Correction

La formule donnant la vitesse est :

$\text{vitesse} = \dfrac{\text{distance}}{\text{temps}}$

soit : $574{,}8 \text{ km·h}^{-1} = \dfrac{574{,}8 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \dfrac{574\,800 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}}$

$\dfrac{574\,800}{3\,600} \approx 159{,}7$

La vitesse de cette rame de TGV était alors d'environ 159,7 m·s^{-1}.