Cours et méthodes

1 Modéliser une situation

Définition

Une **fonction** est un procédé qui, à un nombre, associe un unique nombre.
On peut donner le procédé sous la forme d'une expression littérale.

Notation

On utilise la notation $f : x \longmapsto f(x)$ qui se lit « f est la fonction qui, à x, associe le nombre $f(x)$ ».

Entraîne-toi à Déterminer une fonction

Énoncé

a. Détermine la fonction g qui, à la longueur x d'une arête d'un cube, associe le périmètre d'une face de ce cube.
b. Détermine la fonction h qui, à la longueur x d'une arête d'un cube, associe le volume de ce cube.

Correction

a. La face d'un cube est un carré de périmètre $\mathcal{P} = 4 \times x$. D'où $g(x) = 4x$ ou $g : x \longmapsto 4x$.

b. Le volume $\mathcal{V}$ d'un cube dont la longueur des arêtes est x est $\mathcal{V} = x \times x \times x = x^3$.
D'où $h(x) = x^3$ ou $h : x \longmapsto x^3$.

Définitions

Soit f une fonction. Si $f(a) = b$ alors on dit que :
- b est **l'image** de a par f.
- a est **un antécédent** de b par f.

L'**image** d'un nombre est **unique**.
Un nombre b peut avoir **plusieurs antécédents**.

Entraîne-toi à Déterminer une image à partir d'une expression littérale

Énoncé

Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 4$.
Détermine l'image de -5 par la fonction f.

Correction

$f(x) = x^2 - 4$
$f(-5) = (-5)^2 - 4$
$f(-5) = 25 - 4$
$f(-5) = \mathbf{21}$

Définitions

On considère deux nombres $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ quelconques.
- On appelle **fonction linéaire** de coefficient $\boldsymbol{a}$ toute fonction qui, à tout nombre noté $\boldsymbol{x}$, associe le nombre $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}$ (c'est-à-dire $\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{ax}$).
- On appelle **fonction affine** toute fonction qui, à tout nombre noté $\boldsymbol{x}$, associe le nombre $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ (c'est-à-dire $\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$).

Propriétés

- Une fonction linéaire est une fonction affine particulière (cas où $b = 0$).
Les fonctions linéaires modélisent des **situations de proportionnalité**.
- Lorsque $a = 0$, la fonction est une **fonction constante** : à tout nombre x, elle associe le nombre b.
- Tout nombre admet **un unique antécédent** par une fonction linéaire ou affine non constante.

↘ Entraîne-toi à Reconnaître une fonction linéaire ou une fonction affine

■ **Énoncé**

Parmi les fonctions suivantes, détermine les fonctions affines, les fonctions linéaires et les fonctions constantes.

- $f(x) = 3x$
- $g(x) = - 7x + 2$
- $h(x) = 5x^2 - 3$
- $k(x) = x$
- $l(x) = 3x - 7$

Correction

- f est une fonction linéaire de coefficient 3.
- g est une fonction affine de coefficient $a = -7$ et $b = 2$
- h n'est pas une fonction affine car x est élevé au carré.
- k est une fonction linéaire de coefficient 1.
- l est une fonction affine de coefficient $a = 3$ et $b = -7$.

↘ Entraîne-toi à Déterminer un antécédent à partir d'une expression littérale

La recherche d'antécédents par le calcul correspond à la résolution d'une équation.
Nos connaissances ne nous permettent de le faire que pour une équation du 1er degré à une inconnue et quelques équations du second degré.

■ **Énoncé**

- Soit la fonction f linéaire telle que $f(x) = 2x$. Calcule l'antécédent de 7 par la fonction f.
- Soit la fonction g affine telle que $g(x) = 5x - 1$. Calcule l'antécédent de 14 par la fonction g.

Correction

- L'antécédent de 7 par f est solution de l'équation : $f(x) = 7$ soit $2x = 7$ donc $x = 3{,}5$. L'**antécédent** de **7** par f est donc **3,5**.
- L'antécédent de 14 par g est solution de l'équation : $g(x) = 14$ soit $5x - 1 = 14$ et $5x = 15$ donc $x = 3$. L'**antécédent** de **14** par g est donc **3**.

2) Représentations d'une fonction

A. Tableaux de valeurs

Définition

Les images respectives par la fonction f de certaines valeurs peuvent être présentées dans un tableau appelé **tableau de valeurs**.

↘ Entraîne-toi à Déterminer une image, un antécédent à partir d'un tableau de valeurs

La 2de ligne du tableau donne l'image de chaque nombre de la 1re ligne par la fonction f.

■ **Énoncé**

Voici un **tableau de valeurs** de la fonction f :

x	−4	−2	0	2	4
$f(x)$	12	0	−4	0	12

a. Détermine l'image de 0 par la fonction f.

b. Détermine un (des) antécédent(s) de 0 par la fonction f.

Correction

a. On cherche 0 sur la 1re ligne du tableau et on lit son **image** sur la 2de ligne. **L'image** de 0 par la fonction f est −4. On écrit $f(0) = -4$ (ou $f : 0 \longmapsto -4$).

b. On cherche 0 sur la 2de ligne du tableau et on lit ses **antécédents** sur la 1re ligne.
Des antécédents de 0 par la fonction f sont −2 et 2.
On écrit $f(-2) = f(2) = 0$.

B. Représentation graphique

Définition

La **représentation graphique** d'une fonction f, dans un repère, est la courbe constituée de l'ensemble des points de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$.

↘ Entraîne-toi à Déterminer une image , un antécédent à partir d'une courbe

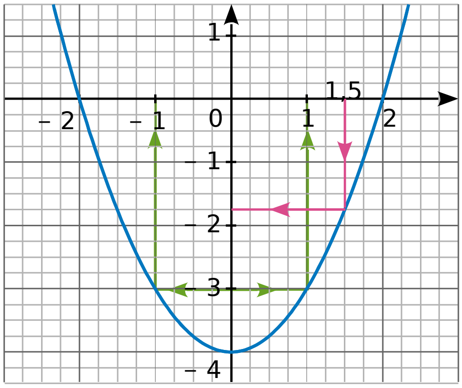
■ **Énoncé**

Le graphique représente la fonction f.

- Détermine graphiquement $f(1{,}5)$.
- Détermine graphiquement le (les) antécédent(s) de – 3 par la fonction f.

Correction

- f**(1,5)** = **– 1,75**.
- **– 3** a **deux antécédents** par la fonction f : **– 1 et 1**.



Cas particuliers

- La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère, non horizontale et non verticale, donc les coordonnées d'un seul point suffisent pour tracer la droite.
- La représentation graphique d'une fonction affine non constante est une droite non horizontale et non verticale, donc les coordonnées de deux points suffisent pour tracer la droite.
- La représentation graphique d'une fonction constante est une droite horizontale, donc les coordonnées d'un seul point suffisent pour tracer la droite.

↘ Entraîne-toi à Construire une représentation graphique

■ **Énoncé**

- Représente graphiquement la fonction linéaire f définie par $f(x) = $ **– 0,5**x.
- Représente graphiquement la fonction affine g définie par $g : x \longmapsto$ **3**x – 2.

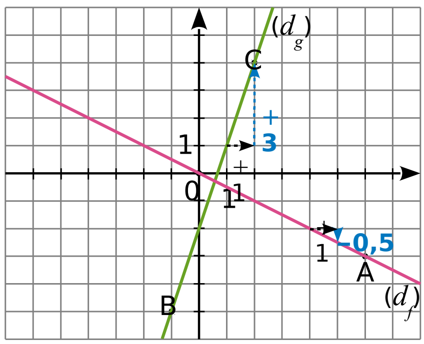
Correction

- f est une fonction linéaire donc sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère.

Pour tracer cette droite, il suffit de connaître les coordonnées d'un de ses points. $f(6)$=- 3.
(d_f) est la droite (OA) avec A(6 ; – 3).

g est une fonction affine donc sa représentation graphique est une droite.

Pour tracer cette droite, il suffit de connaître les coordonnées de deux de ses points.
g(-1)=-5 et g(2)=4.
(d_g) est la droite (BC) avec B(– 1 ; – 5) et C(2 ; 4).



3 Choisir la représentation adaptée

Entraîne-toi à Choisir la représentation adaptée

Énoncé

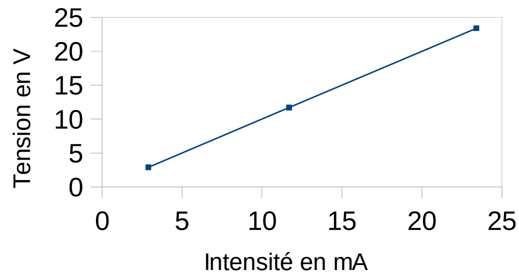
En cours de sciences physiques, Inés et Diogu ont réalisé un circuit électrique avec un générateur de courant variable. Ils veulent trouver la valeur de la résistance R (en Ω) de ce circuit.

Intensité en A	0,0029	0,0117	0,0234
Tension en V	1,5	6	12

Voici les mesures obtenues.
Interprète ce tableau de valeurs.

Correction

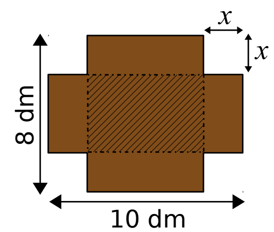
On considère ce tableau comme le tableau de valeurs d'une fonction f qui à I associe U. Un tableur-grapheur donne le graphique suivant.

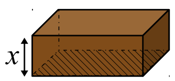


On reconnaît la représentation graphique d'une fonction linéaire. On détermine son coefficient :
1,5 ÷ 0,0029 ≈ 517.
A partir de la formule U=RI on déduit que le circuit est donc composé d'une résistance de 517 Ω.

Énoncé

Avec une plaque de carton rectangulaire de 8 dm par 10 dm, en découpant quatre carrés identiques, on obtient le patron d'une boîte (sans couvercle !).

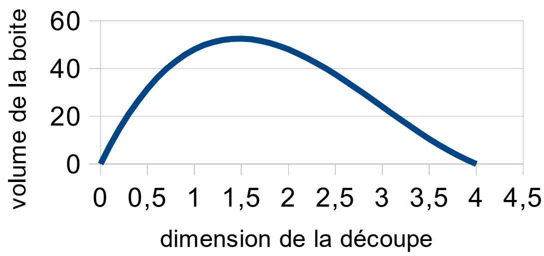




On veut trouver la longueur du côté des carrés à découper pour obtenir une boîte dont le volume sera maximal.
On note x cette longueur en cm.
Estime ce volume maximal et la longueur x au cm près.

Correction

Le volume de cette boîte est donné par la formule :
V = **Longueur** × **largeur** × **hauteur** soit
V = (**10 – 2x**) × (**8 – 2x**) × x
On appelle f la fonction qui à x associe ce volume. Un tableur-grapheur donne la représentation de la fonction f.



On estime le volume maximal aux environs de 1,5. On affine avec un tableau de valeurs.

x	1,4	1,5	1,6
V=f(x)	52,416	52,5	52,224

Le volume est maximal pour 1,5 dm (environ).