Cours et méthodes

1) Repérer une situation de proportionnalité

Définitions

- Deux grandeurs sont **proportionnelles** lorsque les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant par un même nombre non nul les valeurs de l'autre. Ce nombre est appelé **coefficient de proportionnalité.**
- Deux grandeurs proportionnelles sont deux grandeurs qui varient dans les mêmes proportions.
- Un tableau qui contient des données proportionnelles s'appelle un **tableau de proportionnalité.**

» **Remarque :** Avec des grandeurs G1et G2 proportionnelles, si on multiplie G1 par k pour obtenir G2, cela revient à diviser G2 par k (ou le multiplier par $\frac{1}{k}$) pour obtenir G1.

» **Exemple**

À la station service, la machine affiche 1,5 € au litre. Le prix à payer s'obtient en multipliant le volume distribué par le prix au litre.

C'est-à-dire : prix=1,5 × volume

Le prix est proportionnel au volume d'essence.

Entraîne-toi à Reconnaître deux grandeurs proportionnelles liées par une formule

Énoncé

a. Quelles sont les formules donnant la longueur et l'aire d'un cercle à partir de son rayon ?

b. La longueur d'un cercle est-elle proportionnelle à son rayon ?

c. L'aire d'un disque est-elle proportionnelle à son rayon ?

Correction

a. $L=2 \times \pi \times$ rayon et $A=\pi \times$ rayon^2

b. La longueur d'un cercle est obtenue en multipliant son rayon par $2 \times \pi$.
Donc la longueur d'un cercle est proportionnelle à son rayon. Le coefficient de proportionnalité est $2 \times \pi$.

c. $A=\pi \times$ rayon^2$= \pi \times$ rayon$\times$ rayon.
Pour obtenir l'aire d'un disque, on multiplie son rayon par $\pi \times$ rayon. Ce n'est pas un nombre fixe. Donc l'aire d'un disque n'est pas proportionnelle à son rayon.

Entraîne-toi à Reconnaître un tableau de proportionnalité

Énoncé

Les tableaux ci-dessous sont-ils des tableaux de proportionnalité ?

a.

5	8	14	19	24
12	19,2	33,6	45,6	57,6

b.

12	18	32	27	54
8	12	20	18	36

Correction

a. On calcule les quotients, pouvant être le coefficient de proportionnalité :

$\frac{12}{5} = \mathbf{2{,}4}$; $\frac{19{,}2}{8} = \mathbf{2{,}4}$; $\frac{33{,}6}{14} = \mathbf{2{,}4}$;
$\frac{45{,}6}{19} = \mathbf{2{,}4}$; $\frac{57{,}6}{24} = \mathbf{2{,}4}$;

Ils sont égaux donc c'est un tableau de proportionnalité de coefficient **2,4**.

b. $\frac{12}{8} = \mathbf{1{,}5}$ $\frac{18}{12} = \mathbf{1{,}5}$ $\frac{\mathbf{32}}{\mathbf{20}} = \mathbf{1{,}6}$

On a trouvé un quotient différent des deux précédents, il est donc inutile de calculer les suivants. Ce n'est pas un tableau de proportionnalité.

Propriété

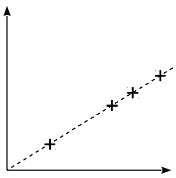
Une situation représentée par des points alignés avec l'origine du repère est équivalente à **une situation de proportionnalité**.

↘ Entraîne-toi à **Reconnaître un graphique représentant une situation proportionnalité**

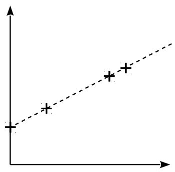
Énoncé

Le(s)quel(s) de ces trois graphiques représente(nt) une situation de proportionnalité ?

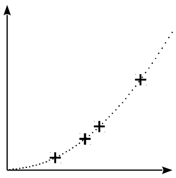
a.



b.



c.



Correction

a. Les points sont **alignés** avec l'origine du repère donc c'est une situation de proportionnalité.

b. Les points sont **alignés mais pas avec l'origine du repère** donc ce n'est pas une situation de proportionnalité.

c. Les points **ne sont pas alignés** donc ce n'est pas une situation de proportionnalité.

2) Résoudre un problème de proportionnalité

» **Exemple 1 : en utilisant les règles sur les colonnes**

La prime annuelle d'un vendeur est proportionnelle au montant des ventes qu'il a réalisées pendant l'année. Le directeur utilise le tableau suivant pour verser les primes à ses vendeurs.
Les cases colorées peuvent se remplir en utilisant les règles portant sur les colonnes.

Les ventes sont divisées par 4...

...donc les ventes doublent.

Les montants s'additionnent...

Ventes (en €)	2 000	8 000	**16 000**	18 000	20 000	38 000
Primes (en €)	**125**	500	1 000	1 125	1 250	**2 375**

...donc les primes sont divisées par 4.

La prime double...

...donc les primes s'additionnent.

» **Exemple 2 : en utilisant le coefficient de proportionnalité**

Le carburant pour un motoculteur est un mélange d'essence et d'huile où les doses d'huile et d'essence sont proportionnelles : il faut 2 doses d'huile pour 3 doses d'essence.
Pour trouver la quantité d'essence nécessaire à 4,5 L d'huile, on utilise le coefficient de proportionnalité : 3 : 2 = 1,5.

Dose d'huile (en L)	2	4,5
Dose de super (en L)	3	x

$\times$ **1,5**

On multiplie par le coefficient de proportionnalité et on obtient :

$x = 4{,}5 \times \mathbf{1{,}5} = 6{,}75$

» **Exemple 3 : en utilisant les produits en croix**

À la boulangerie de Nabila, cinq baguettes coûtent 4,5 €. Pour calculer le prix de trois baguettes, on peut utiliser les produits en croix.

Nombre de baguettes	5	3
Prix en €	4,25	?

L'égalité des produits en croix donne : $5 \times ? = 4{,}25 \times 3$.

Donc : $? = \dfrac{4{,}25 \times 3}{5} = 2{,}55$

Trois baguettes coûtent 2,55 €

3 Utiliser ou calculer un pourcentage

Définition

Un **pourcentage** traduit une situation de proportionnalité où la quantité totale est ramenée à 100.

Astuce :

Pour organiser les données, on pourra utiliser le tableau de proportionnalité suivant :

	Valeurs de l'énoncé	Pourcentage
Portion		
Quantité totale		100

Entraîne-toi à Utiliser un pourcentage

Énoncé

Julien obtient une réduction de 15 % sur un vélo valant 158 €.
Quel est le montant de la réduction obtenue par Julien?

Tri des données :

	En €	En %
réduction	**?**	*15*
total	*158*	**100**

Correction

Julien obtient une réduction de 15 % sur un vélo valant 158 €.

$158 \times \dfrac{15}{100} = 23{,}7$

Le montant de la réduction obtenue par Julien est de 23,70 €.

Entraîne-toi à Calculer un pourcentage

Énoncé

Macha fait les courses pour le petit-déjeuner de sa famille. Elle achète : 3 pains au chocolats, 4 croissants, 2 petits pains au noix, 9 pains complets, 7 pommes et 5 oranges.
Quel est le pourcentage de fruits dans ces courses ?

Tri des données :

	nombre	En %
Fruits	*7+5=**12***	**?**
Articles	*3+4+2+9+7+5=**30***	**100**

Correction

L'égalité des produits en croix donne :
$? \times 30 = 12 \times 100$
Donc $? = 12 \times 100 \div 30 = 40$
Il y a 40 % de fruits dans ces courses.

Propriété

Dans une réduction ou une augmentation de **p %**, la nouvelle quantité représente respectivement **(100 - p)%** ou **(100 + p)%** de la quantité initiale.

Entraîne-toi à **Utiliser et calculer un taux**

Énoncé 1

Le jour des soldes, une paire de chaussures à 120 € est soldée à 35 %.
Quel est son nouveau prix ?

Correction

Soit P le nouveau prix.
P = (1 – 35 %) × 120 = (1 – 0,35) × 120 = 78

Le nouveau prix des chaussures est 78 €.

Énoncé 2

Le prix de l'essence était de 1,35 € en 2011.
Il est de 1,55 € aujourd'hui.
Quel est le pourcentage d'augmentation ?

Correction

Soit p le pourcentage d'augmentation.
1,55 = (1 + p) × 1,35 donc
1 + p = 1,55 ÷ 1,35 soit $p \approx 0{,}148$.

L'essence a augmenté d'environ 15 %.

4 Utiliser ou calculer une échelle

Définition

Les dimensions sur un plan (ou sur une carte) sont proportionnelles aux dimensions réelles.

L'échelle du plan (ou de la carte) est le coefficient de proportionnalité qui permet d'obtenir les dimensions sur le plan en fonction des dimensions réelles.

Il s'exprime souvent sous forme fractionnaire : $\dfrac{\textit{dimensions sur le plan}}{\textit{dimensions réelles}}$.

(Les dimensions sont exprimées dans la même unité.)

Entraîne-toi à **Utiliser ou calculer une echelle**

Énoncé

Sur la maquette d'une maison à l'échelle 1/48,
- Quelle est la taille réelle d'une pièce longue de 12 cm sur la maquette ?
- Quelle est la taille sur la maquette d'une pièce de 7,2 m de long dans la réalité ?

Correction

On exprime toutes les dimensions en cm.
L'échelle est le coefficient de proportionnalité.

sur la maquette (en cm)	1	12	x
En réalité (en cm)	48	y	720

×48

Après calcul, on conclut :

La taille réelle d'une pièce longue de 12 cm sur la maquette est 576 cm (ou 5,76 m).
La taille sur la maquette d'une pièce de 7,2 m de long dans la réalité est 15 cm.