

Dans le chapitre A6, tu as appris à remplacer des lettres par leur valeur et évaluer ainsi des expressions. Dans ce chapitre, il s'agit de trouver TOUS les nombres qui rendent l'égalité vraie.

Définition

Une **(in)équation** est une (in)égalité entre deux expressions comportant des lettres appelées inconnues.

Des lettres différentes représentent des nombres *a priori* différents et une même lettre écrite à plusieurs endroits représente obligatoirement le même nombre.

» **Exemple 1** : $2x^2 - 5 = x + 10$ est une **équation** où l'inconnue est désignée par la lettre x . Cette équation a deux membres : $2x^2 - 5$ (membre de gauche) et $x + 10$ (membre de droite).

» **Exemple 2** : $3x - 2xy + 5y^2 > 5x^2y + 3$ est une **inéquation** à deux inconnues x et y .

Définitions

Résoudre une équation (ou une **inéquation**) d'inconnue x , c'est déterminer toutes les valeurs de x (si elles existent) pour lesquelles l'égalité (ou l'inégalité) est vraie. Chacune de ces valeurs est appelée **solution de l'équation** (ou de l'inéquation).

1) Résoudre une équation du premier degré

Propriétés

Une égalité reste vraie **si on ajoute ou si on soustrait un même nombre** à ses deux membres.

Une égalité reste vraie **si on multiplie ou si on divise** ses deux membres **par un même nombre non nul**.

Pour tous nombres a , b et c :

si $a = b$ alors $a + c = b + c$

si $a = b$ alors $a - c = b - c$

si $a = b$ alors $a \times c = b \times c$

si $a = b$ alors $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ (où $c \neq 0$)

» Entraîne-toi à Résoudre une équation

■ Énoncé

Résous les équations suivantes :

- $x - 5 = 3$
- $4x = 9$
- $\frac{x}{5} = 7$

Correction

• $x - 5 = 3$

$$x - 5 + 5 = 3 + 5$$

$$x = 8$$

La solution de cette équation est 8.

• $4x = 9$

$$4x \div 4 = 9 \div 4$$

$$x = \frac{9}{4}$$

La solution de cette équation est $\frac{9}{4}$.

• $\frac{x}{5} = 7$

$$\frac{x}{5} \times 5 = 7 \times 5 \text{ donc } x = 35$$

La solution de cette équation est 35.

■ Énoncé

Résous les équations suivantes.

- $3x + 8 = 9$
- $7x + 2 = 4x + 9$.

Correction

- $3x + 8 = 9$
 $3x + 8 - 8 = 9 - 8$
 $3x = 1$
 $3x \div 3 = 1 \div 3$
 $x = 1 \div 3$
La solution de cette équation est $\frac{1}{3}$.

- $7x + 2 = 4x + 9$
 $7x + 2 - 4x = 4x + 9 - 4x$
 $3x + 2 = 9$
 $3x + 2 - 2 = 9 - 2$
 $3x = 7$
 $3x \div 3 = 7 \div 3$
 $x = \frac{7}{3}$
La solution de cette équation est $\frac{7}{3}$

Définition

Une **équation-produit** est la forme factorisée d'une équation du second degré qui se résout en utilisant les techniques de résolution des équations du premier degré.

Propriété

Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

↳ Entraîne-toi à Résoudre une équation produit

■ Énoncé

Résous $(x + 3)(x - 7) = 0$.

Pour que ce produit soit nul, il faut et suffit que l'un de ses facteurs au moins soit nul.

C'est-à-dire : $x + 3 = 0$ ou $x - 7 = 0$
 $x = -3$ ou $x = 7$

Les solutions de l'équation-produit $(x + 3)(x - 7) = 0$ sont -3 et 7 .

2) Résoudre une inéquation du 1^{er} degré

Propriétés

On **ne change pas** le sens d'une inégalité si on ajoute ou si on soustrait un même nombre à ses deux membres.

On **ne change pas** le sens d'une inégalité si on multiplie ou si on divise ses deux membres par un même nombre **positif non nul**.

On **change** le sens d'une inégalité si on multiplie ou si on divise ses deux membres par un même nombre **négatif non nul**.

Pour tous nombres a , b et c :

si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$

si $a \leq b$ alors $a - c \leq b - c$

si $a \leq b$ et $c > 0$ alors

$a \times c \leq b \times c$ et $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$

si $a \leq b$ et $c < 0$ alors

$a \times c \geq b \times c$ et $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$

↳ Entraîne-toi à Résoudre une inéquation

■ Énoncé

Résous l'inéquation suivante d'inconnue x :
 $7x - 3 > 2x - 1$.

Résous l'inéquation suivante d'inconnue x :
 $-3x - 8 \leq x - 1$.

Correction

$$\begin{aligned} 7x - 3 &> 2x - 1 \\ 7x - 3 - 2x &> 2x - 1 - 2x \\ 5x - 3 &> -1 \\ 5x - 3 + 3 &> -1 + 3 \\ 5x &> 2 \\ x &> \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Les solutions sont tous les nombres strictement supérieurs à $\frac{2}{5}$.

Correction

$$\begin{aligned} -4x - 8 &\leq -1 \\ -4x &\leq 7 \\ x &\geq -\frac{7}{4} \end{aligned}$$

Les solutions sont tous les nombres supérieurs ou égaux à $-\frac{7}{4}$.

3) Résolution de problèmes

Définition

Mettre en équation un problème, c'est traduire son énoncé par une égalité mathématique avec une inconnue. Résoudre l'équation trouvée permet de répondre au problème posé.

↳ Entraîne-toi à Résoudre un problème

■ Énoncé

Trouve le nombre tel que son quintuple augmenté de 7 soit égal à 3.

Correction

Étape n°1 : Choix de l'inconnue

Soit x le nombre cherché.

Étape n°2 : Mise en équation

Le quintuple du nombre augmenté de 7 est

$$5x + 7.$$

Pour trouver le nombre recherché, il suffit de résoudre : $5x + 7 = 3$

■ Énoncé

Jean a eu 50 € de la part de ses grand-parents pour son anniversaire. Il souhaite s'acheter des BD Manga. Sur internet, un livre coûte 6,90 € avec 10 € de frais de port. Combien peut-il s'acheter de livres ?

Correction

Étape n°1 : Choix de l'inconnue

Soit x le nombre de livres que Jean pourra acheter.

Étape n°3 : Résolution de l'équation

$$5x + 7 = 3$$

$$5x + 7 - 7 = 3 - 7$$

$$5x = -4$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{-4}{5}$$

Étape n°4 : Conclusion

Le nombre cherché est donc $-\frac{4}{5}$.

Étape n°2 : Mise en équation

Un livre coûte 6,90 € donc x livres coûteront $6,90 \times x$ €. Avec 10 € de frais de port, cela fera $6,90 \times x + 10$ €.

Il suffit de résoudre : $6,90 \times x + 10 < 50$

Étape n°3 : Résolution de l'inéquation

$$6,90 \times x < 40 \quad x < 40 \div 6,90$$

Étape n°4 : Conclusion

Jean pourra s'acheter 5 livres.