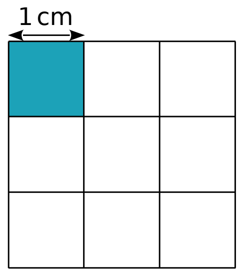
Activités de découverte

Activité 1 Un carré d'aire 2

1. Donne la mesure du côté d'un carré dont l'aire est 25 cm^2 ; 0,49 cm^2.

2. Peux-tu tracer un **carré** dont l'aire est le double de celle du carré bleu ci-contre ?



3. On appelle c le côté de ce carré en centimètres.
Quelle relation existe-t-il entre c et 2 ?

4. Peux-tu donner une écriture décimale de c ?
À l'aide de la calculatrice, donne une valeur approchée au dix-millième de $\sqrt{2}$.

5. Existe-t-il un nombre dont le carré soit négatif ? Justifie.

6. Certains nombres **entiers** ont une racine carrée **entière**. On dit que ces nombres sont des carrés parfaits. Cite tous les carrés parfaits compris entre 0 et 256.

Activité 2 Rationnel ou pas ?

a. $\sqrt{2}$ n'est ni un nombre entier ni un nombre décimal.
Nous allons nous poser la question : « Est-ce un nombre rationnel ? »

Dans cette partie, on suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel et qu'il peut donc s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers relatifs p et q :

$\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ où $\dfrac{p}{q}$ est un quotient irréductible. Démontre que $2q^2 = p^2$.

b. Dans cette question, on va étudier la divisibilité de p^2 et de $2q^2$ par 2 et par 5.
Pour cela, recopie et complète les tableaux ci-dessous.

Si le chiffre des unités de p est...	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
alors le chiffre des unités de p^2 est...										

Si le chiffre des unités de q est...	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
alors le chiffre des unités de q^2 est...										
et le chiffre des unités de $2q^2$ est...										

c. En observant les tableaux précédents, quel(s) est (sont), selon toi, le (les) chiffre(s) des unités possible(s) de p et q quand $2q^2 = p^2$?

d. La fraction $\dfrac{p}{q}$ est-elle irréductible ? Qu'en déduis-tu pour le nombre $\sqrt{2}$?

Activité 3 Les ensembles de nombres

Voici une liste de nombres.

$$\frac{-457}{23} \ ; \quad 4\sqrt{2} \ ; \quad 854 \ ; \quad 0{,}000\,08 \times 10^{7} \ ; \quad \sqrt{49}\ ;\ \pi \ ;$$
$$\frac{174}{58} \ ; \quad -\ 0{,}000\ \ 415\ \ 7 \ ; \quad -\sqrt{\frac{4}{9}}\ ;\ \frac{58}{4} \ ; \quad 10^{-3}.$$

1. Dans cette liste, quels sont les nombres entiers ? Quels sont les nombres décimaux ? Quels sont les nombres rationnels ?

2. Y a-t-il des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme décimale ?

3. Y a-t-il des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme fractionnaire ?

4. Y a-t-il des nombres que tu n'as pas su classer dans l'une des catégories du 1. ?

Activité 4 Sur la piste de Pythagore

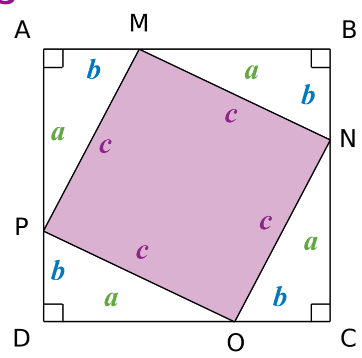
1. Ouvre un logiciel de géométrie dynamique.

2. Construis un triangle rectangle ABC.

3. Fais apparaître les mesures des côtés du triangle ABC puis AB^2, AC^2 , BC^2.

4. Déplace les points A, B et C. Quelle conjecture peux-tu énoncer ?

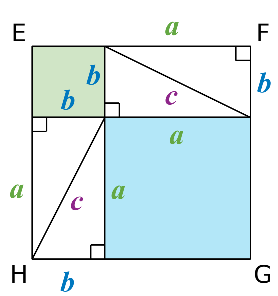
Activité 5 Démonstration du théorème de Pythagore



À partir de quatre triangles rectangles identiques, on obtient la figure ci-contre, sur laquelle A, M, B ; B, N, C ; C, O, D et D, P, A sont alignés.
a, *b* et *c* désignent les longueurs des côtés des triangles rectangles.

1. Quelle est la nature des quadrilatères ABCD et MNOP? Justifie.

2. Quelle est l'aire du quadrilatère MNOP en fonction de *c* ?



On dispose, à présent, les quatre triangles rectangles
comme sur la figure ci-dessous, afin que EFGH soit un carré.

3. Explique pourquoi les carrés ABCD et EFGH ont la même aire.

4. Que dire alors des aires des carrés bleu et vert par rapport à l'aire du carré rose ?

5. Déduis-en une relation entre *a*, *b* et *c*.

Activités de découverte

Activité 6 Et réciproquement ?

1. Recherche de nombres entiers positifs a, b et c tels que $c^2 = a^2 + b^2$

a. Avec un tableur, construis un tableau comme ci-contre, avec des valeurs allant jusqu'à 16 sur la ligne 1 et la colonne A.

b. Remplis chaque cellule avec la somme des carrés du nombre correspondant à sa ligne et du nombre correspondant à sa colonne comme le montre l'exemple ci-contre.

	A	B	C	D	E	F
1		1	2	3	4	5
2	1					
3	2					
4	3					
5	4					
6	5					

cellule C4 :
résultat de 3² + 2²

c. Sur la même feuille de tableur, construis un autre tableau permettant d'avoir les valeurs des carrés des nombres entiers de 1 à 23.

d. Trouve plusieurs triplets de nombres a, b et c tels que $c^2 = a^2 + b^2$

e. Construis maintenant, avec un logiciel de géométrie, les triangles dont les mesures sont les triplets trouvés. Quelle conjecture peux-tu faire alors ?

2. Démonstration de la réciproque du théorème de Pythagore

On considère un triangle ABC tel que $BC^2 = BA^2 + AC^2$ et un point D tel que ABD soit un triangle rectangle en A et AC = AD.

a. Montre que BD=BC. Que représente la droite (AB) pour le segment [CD] ?

b. Que peux-tu dire des points A, C, D ? Conclus.

Activité 7 Trigonométrie (dans le triangle rectangle)

1. Conjecture avec un logiciel de géométrie dynamique

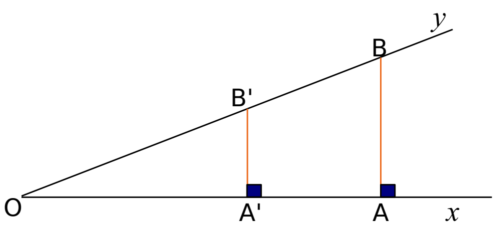
a. Construis un triangle ABC rectangle en A. Place sur le côté [AB] un point M et construis la perpendiculaire à (AB) passant par M. Nomme N le point d'intersection de cette droite avec le côté [BC].

b. Mesure l'angle $\widehat{ABC}$ et les côtés [BM] et [BN].

c. En déplaçant le point M sur [AB], que peux tu dire de $\frac{BM}{BN}$? de $\frac{MN}{BN}$? $\frac{MN}{BM}$?

d. Que faut-il faire pour modifier ces valeurs? De quoi dépendent-elles?

2. Démonstration



a. Sur la figure ci-contre, A et A' sont deux points de la demi-droite [Ox).Les perpendiculaires à [Ox) passant respectivement par A et A' coupent [Oy) en B et B'.

Pourquoi a-t-on $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB}$? Démontre que $\frac{OA'}{OB'} = \frac{OA}{OB}$. Puis que $\frac{A'B'}{OB'} = \frac{AB}{OB}$.

b. La valeur de ces quotients dépend-elle de la position de A' sur [Ox) ? Si non, de quoi dépend-elle ? Conclus. Explique pourquoi ces valeurs sont comprises entre 0 et 1.

c. Démontre maintenant que $\frac{A'B'}{OA'} = \frac{AB}{OA}$. De quoi dépend cette valeur ?

Conclus.