Je résous des problèmes

Sciences, technologie et société

1 En physique

Au XVII^e siècle, les physiciens et les astronomes effectuaient des calculs très complexes à la main. Le mathématicien anglais Hörner a mis au point une méthode efficace pour économiser des opérations, méthode encore utilisée de nos jours en informatique.

a. On considère les expressions $A = 2x^2 + 3x - 2$ et $B = -2 + x(3 + 2x)$. Pour une valeur de x donnée, indique le nombre de multiplications et d'additions à effectuer pour trouver le résultat dans chacune des deux expressions. Démontre ensuite que $A = B$.

Quel est alors l'intérêt de l'expression B par rapport à l'expression A ?

b. Transforme l'expression $C = 5x^2 - 6x - 4$ pour qu'elle contienne moins d'opérations à effectuer.

c. Démontre que pour tous nombres a, b et c on a $ax^2 + bx + c = x(ax + b) + c$

d. Transforme les expressions suivantes en utilisant plusieurs fois la même technique :

$D = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 1$

$E = 4x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 6x + 2$

e. Calcule chacune des expressions D et E de deux façons différentes pour $x = 4$.
Quelle est la méthode la plus rapide ? Pourquoi ?

Programmes de calcul

2 Voici un programme de calcul :

- Choisis un nombre ;
- Ajoute 5 ;
- Multiplie par 3 le résultat obtenu ;
- Enlève 15.

a. Choisis des nombres pour tester ce programme de calcul.

b. Comment trouver le résultat le plus rapidement possible ?

3 Soient les deux programmes de calcul suivants :

Programme 1 :
- Choisis un nombre ;
- Ajoute 6 à ce nombre ;
- Multiplie le résultat par –2 ;
- Ajoute le quadruple du nombre choisi au départ.

Programme 2 :
- Choisis un nombre ;
- Soustrais 3 à ce nombre ;
- Multiplie le résultat par 4 ;
- Soustrais le double du nombre choisi au départ.

a. Teste ces deux programmes de calcul pour $x = 2$; pour $x = -3$ et enfin pour $x = 4$.

b. Que remarques-tu ?

c. Si l'on note x le nombre choisi au départ, écris une expression A qui traduit le programme 1.

d. De la même manière, écris une expression B pour le programme 2.

e. Comment peux-tu expliquer la remarque faite à la question **b.** ?

4 Le programme de calcul

On donne le programme de calcul suivant.

- Choisis un nombre ;
- Ajoute 6 ;
- Multiplie la somme obtenue par le nombre choisi au départ ;
- Ajoute 9 à ce produit ;
- Écris le résultat.

a. Écris les calculs intermédiaires et donne le résultat fourni lorsque le nombre choisi est 2. Recommence avec –5.

b. Écris ces deux résultats sous la forme de carrés de nombres entiers.

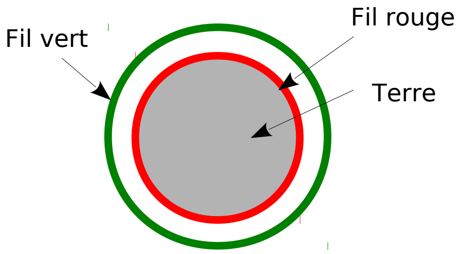
c. Développe $(x + 3)^2$.

d. Démontre que le résultat est toujours un carré, quel que soit le nombre choisi au départ.

Je résous des problèmes

Résoudre un problème géométrique

5 Tour de taille



a. On veut dérouler un fil rouge autour de la Terre au niveau de l'équateur. En supposant qu'on assimile la Terre à une sphère et qu'on note r son rayon, exprime la longueur L_r du fil rouge en fonction de r.

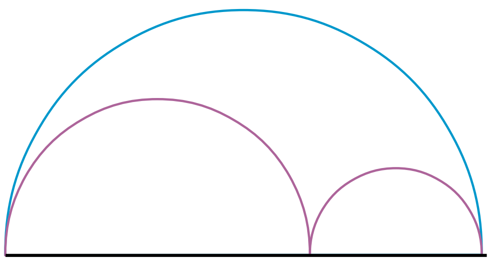
b. On veut dérouler, cette fois-ci, un fil vert à un mètre au dessus du fil rouge. Exprime la longueur L_v du fil vert en fonction de r.

c. Calcule et réduis l'expression $L_v - L_r$. Cette expression dépend-elle du rayon ? Qu'en déduis-tu ?

d. Sachant que le rayon de la Terre est d'environ 6 500 km, calcule la longueur du fil rouge puis déduis-en par une simple addition, la longueur du fil vert.

6 Demi-cercles

Sur le schéma ci-dessous, le demi-cercle bleu a pour rayon R et les deux demi-cercles violet ont pour rayons R_1 et R_2 tels que $R = R_1 + R_2$.



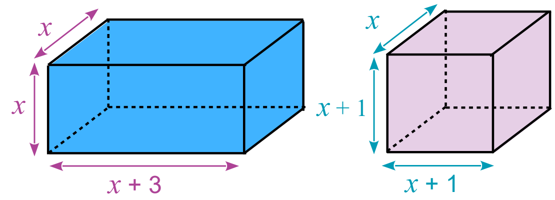
a. Exprime la longueur de l'arc bleu en fonction de R.

b. Exprime la longueur des arcs violet en fonction de R_1 et R_2.

c. Montre par un calcul littéral que ces deux longueurs sont égales.

7

On considère les deux parallélépipèdes rectangles suivants :

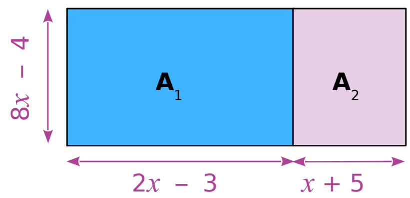


a. Calcule les deux volumes pour $x = 1$. Que remarques-tu ?

b. Exprime, en fonction de x, les deux volumes. Que remarques-tu ? Comment expliquer alors le résultat de la question **a.** ?

8

On considère la figure suivante (x désigne un nombre supérieur ou égal à 2) :

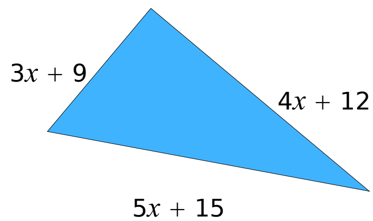


a. Exprime en fonction de x les aires $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$.

b. Déduis-en une expression de l'aire totale **A** de la figure.

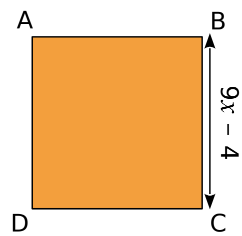
c. Calcule $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ et **A** pour $x = 6$.

9 Triangle rectangle



x est un nombre positif. Montre que le triangle ci-dessus est un triangle rectangle.

10 Carré



a. Exprime l'aire du carré ABCD en fonction de x puis développe l'expression ainsi obtenue.

b. Calcule l'aire de ce carré lorsque $x = \dfrac{2}{3}$.

Résoudre un problème numérique

11 On souhaite démontrer que la somme de deux nombres pairs est un nombre pair.

a. Teste cette affirmation sur des exemples.

b. Explique pourquoi un nombre pair peut s'écrire sous la forme $2n$ où n est un entier.

c. Exprime la somme de deux nombres pairs $2n$ et $2p$ en fonction de n et p entiers.

d. Conclus.

12 Marie dit qu'en ajoutant deux nombres impairs, on obtient toujours un nombre impair.

a. Prouve-lui qu'elle a tort à l'aide d'un contre-exemple.

b. En utilisant la variable n, écris une expression désignant un nombre pair puis une autre désignant un nombre impair.

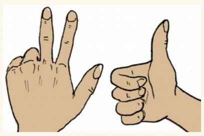
c. Utilise la question **b.** pour démontrer à Marie que la somme de deux nombres impairs n'est jamais impaire.

13 Calculatrice digitale

Pour calculer 6×8, Jérôme a vu son professeur de mathématiques opérer de la façon suivante.

Pour faire 6, avec la main droite je lève 1 doigt.

Pour faire 8, avec la main gauche je lève 3 doigts.



J'additionne les doigts levés des deux mains : $1 + 3 = 4$.

Je multiplie le nombre de doigts baissés à droite par le nombre de doigts baissés à gauche : $4 \times 2 = 8$.

Le résultat est 48.

a. Vérifie que cette astuce fonctionne pour 7×9 et pour 6×6. (L'éventuelle retenue de la multiplication s'ajoute à la somme des doigts levés.)

b. Démontre cette méthode de calcul de $a \times b$ avec les doigts pour a et b compris entre 6 et 9.

14 Remarquable !

Soit $G = a(a - b) + b(a - b)$

a. Développe et réduis l'expression G.

b. Factorise G en mettant $(a - b)$ en facteur.

c. Déduis-en une égalité remarquable.

15 Carré

n désigne un nombre entier.

On pose $A = (3n + 1)^2 + 16n^2 - 26n + 3$.

a. Développe et réduis A.

b. Montre que A est le carré d'un nombre entier.

16 Remarquable

a. Effectue les calculs suivants.

- $3^2 - 2 \times 4$
- $5^2 - 4 \times 6$
- $10^2 - 9 \times 11$
- $14^2 - 13 \times 15$

b. Recopie et complète : « Si n est un entier, il semble que $n^2 - (n - 1) \times (n + 1) = ...$.»

c. Prouve l'égalité obtenue à la question **b.**

17 Idée fausse

a. On considère les expressions $A = (2x + 3)^2$ et $B = (2x)^2 + 3^2$. Calcule ces expressions pour $x = 0$ et pour $x = 10$. Qu'en déduis-tu ?

b. Peut-on dire que pour tout nombre a et tout nombre b non nuls, les expressions $(a + b)^2$ et $a^2 + b^2$ sont égales ? Justifie. Développe alors l'expression $(a + b)^2$.

c. On considère les deux expressions $C = (2x + 3)(2x - 3)$ et $D = (2x)^2 - 3^2$. Calcule ces expressions pour $x = 0$ puis pour $x = 10$. Qu'en déduis-tu ? Démontre-le.

d. Développe alors l'expression : $(a + b)(a - b)$.

18 Calcul mystère

a. Calcule les expressions $2001 \times 1999 - 2000^2$ et $47 \times 45 - 46^2$. Que remarques-tu ?

b. Développe et réduis l'expression suivante : $(x + 1)(x - 1) - x^2$

c. Les résultats obtenus à la question **a.** étaient-ils prévisibles ? Justifie.

19 Petites démonstrations

a. Que dire de la somme de deux nombres pairs ? De deux nombres impairs ? Pourquoi ?

b. La somme de deux nombres consécutifs est-elle paire ou impaire ? Justifie.

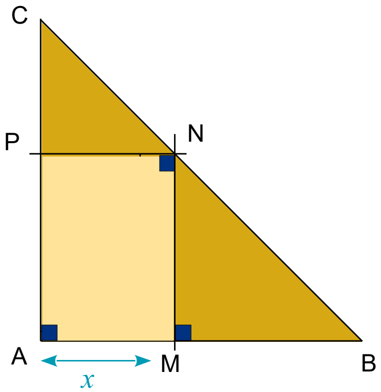
c. Que dire du produit de deux nombres pairs ? De deux nombres impairs ? De deux nombres consécutifs ? Pourquoi ?

Je résous des problèmes

En utilisant l'informatique

20 Optimisation

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A tel que AB = 10 cm.



a. Quelle est la nature du quadrilatère AMNP ? Justifie. Démontre que les triangles CPN et MNB sont isocèles.

b. Quelles valeurs peut prendre le nombre x ?

c. Exprime la longueur AP en fonction de x et déduis-en l'aire du rectangle AMNP en fonction de x.

d. À l'aide d'un tableur, programme les cellules pour compléter automatiquement la feuille de calculs suivante :

	A	B	C	D	...	K	L
1	Valeur de x (en cm)	0	1	2	...	9	10
2	Aire de AMNP (en cm²)				...		

e. Où semble se trouver le point M quand l'aire de AMNP est maximale ? Que dire alors de cette aire par rapport à l'aire du triangle ABC ?

f. Pour quelle(s) valeur(s) de x, l'aire de AMNP est-elle égale à 10 cm² (tu donneras un encadrement à l'unité) ?

À l'aide du tableur, affine la (les) valeur(s) de x trouvée(s) au dixième puis au centième, en changeant le pas.

g. Vérifie graphiquement les résultats trouvés aux questions **e.** et **f.**.

Pour cela, tu inséreras un graphique.

21 Programme de calcul

a. Écris un programme qui permet de réaliser cet enchaînement de calculs et teste-le.

- Choisis un nombre x ;
- Multiplie ce nombre par 5 ;
- Ajoute 7 ;
- Prends le double du résultat ;
- Enlève 14.

b. Mathilde dit qu'à la seule annonce du résultat, elle est capable de retrouver très vite le nombre choisi. Comment fait-elle ?

22 Programme de calcul

a. Écris un programme qui permet de réaliser cet enchaînement de calculs et teste-le.

- Choisis un nombre x ;
- Multiplie ce nombre par -1 ;
- Ajoute 10 ;
- Prends le triple du résultat ;
- Enlève 30 ;
- Divise par -3.

b. Que remarques-tu ? Explique pourquoi.

23 Programme de calcul

a. Écris un programme qui permet de calculer l'expression : $Y = 4X^2 + 4X + 1$ pour différentes valeurs de X.

b. Que remarques-tu ? Explique pourquoi.

24 Programme de calcul

a. Écris un programme qui permet de calculer les expressions ci-dessous pour différentes valeurs de X.

$A = (X - 2)^2$ et $B = (X + 2)(X - 2)$.

b. A-t-on A = B ?

25 Programme et calcul littéral

Écris un programme qui donne les coefficients a, b et c à partir de la donnée de A et B pour le calcul de $(Ax + B)^2 = ax^2 + bx + c$.