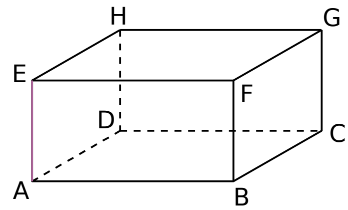
Aires latérales et Volumes

M2

Activités de découverte

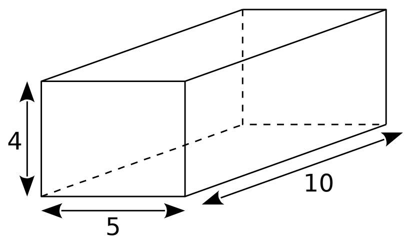
Activité 1 : Remplir un prisme...

1. ABCDEFGH est un pavé droit tel que AB = 10 cm, BC = 7 cm et AE = 5 cm. Calcule le volume de ce pavé.

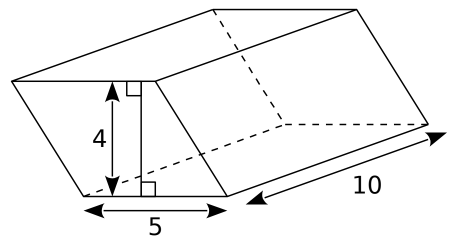


2. Lorsqu'on regarde ce pavé droit comme un prisme ayant pour hauteur le segment [AE], cite les bases du prisme et calcule l'aire de l'une d'entre elles.
Dans ce cas, que représente le produit de l'aire d'une des bases par la hauteur ?

3. Les deux prismes droits suivants ont le même volume. Explique pourquoi. Propose alors une formule qui donne le volume d'un prisme droit ayant pour base un parallélogramme en utilisant l'expression « aire de la base ».

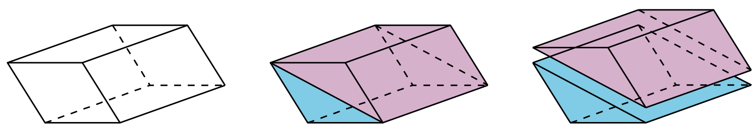


Pavé droit

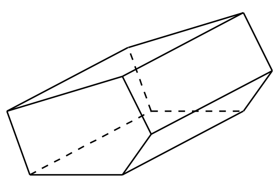


Prisme droit
ayant pour base un parallélogramme

4. Observe l'illustration ci-contre réalisée à partir d'un prisme droit ayant pour base un parallélogramme.



Explique alors pourquoi la formule vue au **3.** est encore valable pour un prisme à base triangulaire.

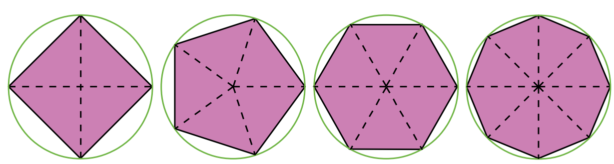


5. En t'inspirant de la question **4.**, « découpe » ce prisme droit à base pentagonale en prismes à base triangulaire.
La formule vue au **3.** est-elle encore valable ? Pourquoi ?

6. Sachant que l'aire du pentagone est de 15 cm² et que la hauteur de ce prisme est de 3 cm, quel est son volume ?

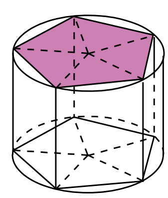
Activité 2 : Vers le volume du cylindre

1. Si on augmente le nombre de côtés de ces polygones réguliers, de quelle forme vont-ils se rapprocher ?



2. Si le rayon du cercle est de 3 cm, vers quel nombre vont se rapprocher les aires de ces polygones ?

3. En t'aidant de la figure ci-contre, propose alors une formule qui donne le volume d'un cylindre de révolution en fonction de sa hauteur et du rayon d'une base.



4. Que remarques-tu ?

Méthodes et notions essentielles

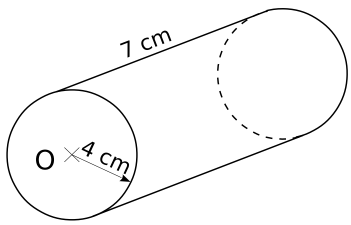
Méthode 1 : Calculer l'aire latérale

À connaître

Pour **calculer l'aire latérale d'un prisme droit ou d'un cylindre de révolution**, on multiplie le périmètre d'une base par la hauteur du solide :

$$\mathcal{A}_{\text{latérale}} = \mathcal{P}_{\text{base}} \times h.$$

Exemple : Détermine l'aire latérale du cylindre de révolution suivant.



On calcule le périmètre d'une base qui est un disque de rayon 4 cm :

$\mathcal{P}_{\text{base}} = 2 \times \pi \times 4$ cm $= 8\pi$ cm.

On multiplie le périmètre d'une base par la hauteur :

$\mathcal{A}_{\text{latérale}} = \mathcal{P}_{\text{base}} \times h = 8\pi$ cm $\times$ 7 cm $= 56\pi$ cm².

L'aire latérale de ce cylindre de révolution est 56π cm².

Une valeur approchée au centième près de l'aire latérale de ce cylindre de révolution est 175,93 cm².

Exercices « À toi de jouer »

1 Calcule l'aire latérale d'un prisme droit de hauteur 9 cm ayant pour base un pentagone régulier de côté 3 cm.

2 Calcule l'aire latérale d'un cylindre de révolution de hauteur 12 cm ayant pour base un disque de diamètre 6 cm.

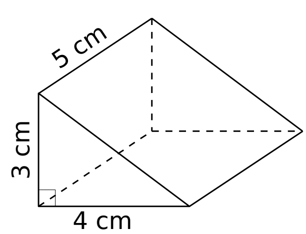
Méthode 2 : Calculer le volume

À connaître

Pour **calculer le volume d'un prisme droit ou d'un cylindre de révolution**, on multiplie l'aire d'une base par la hauteur du solide :

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{\text{base}} \times h .$$

Exemple : Détermine le volume du prisme droit suivant.



On calcule l'aire d'une base qui est un triangle rectangle :

$$\mathcal{A}_{\text{base}} = \frac{4 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}}{2} = \frac{12 \text{ cm}^2}{2} = 6 \text{ cm}^2.$$

On multiplie l'aire d'une base par la hauteur :

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{\text{base}} \times h = 6 \text{ cm}^2 \times 5 \text{ cm} = 30 \text{ cm}^3.$$

Le volume de ce prisme droit est 30 cm³.

Exercices « À toi de jouer »

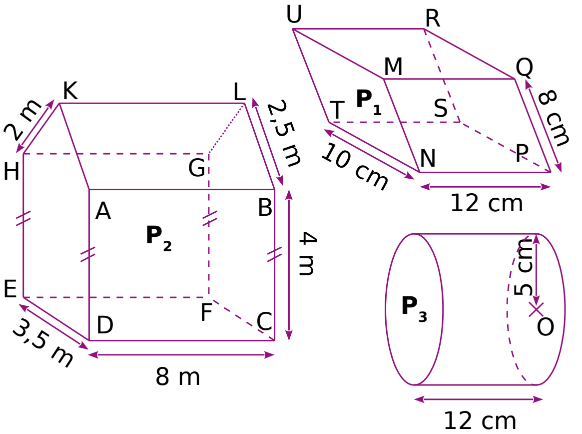
3 Calcule le volume d'un prisme droit de hauteur 8 cm ayant pour base un rectangle de longueur 5 cm et de largeur 3 cm.

4 Calcule le volume d'un cylindre de révolution de hauteur 4,5 cm ayant pour base un disque de diamètre 10 cm.

Exercices d'entraînement

Sauf mention contraire, les prismes sont des prismes droits et les cylindres, des cylindres de révolution.

1 Reconnaître la base



P_1 et P_2 sont des prismes et P_3 est un cylindre. Pour chacun de ces trois solides, nomme une base et calcule son périmètre.

2

Calcule le périmètre des bases puis l'aire latérale des solides suivants.

Solide	Base	Hauteur
Prisme 1	Carré de côté 6 cm	12 cm
Prisme 2	Rectangle de 8 m sur 2,5 m	1,5 m
Cylindre	Rayon de base 3 cm	2,5 dm

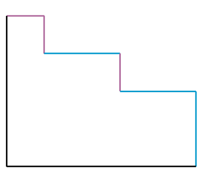
3 Ne pas se fier à la taille et à la forme

a. P_1 est un prisme de hauteur 8 cm ayant pour base un pentagone dont tous les côtés mesurent 14,4 cm. P_2 est un prisme de hauteur 6 cm ayant pour base un triangle équilatéral de côté 32 cm. Compare les aires latérales de ces deux prismes.

b. C_1 est un cylindre de rayon de base 18 cm et de hauteur 10 cm, C_2 est un cylindre de rayon de base 6 cm et de hauteur 30 cm et C_3 est un cylindre de rayon de base 12 cm et de hauteur 15 cm. Calcule et compare leurs aires latérales.

4 Plan d'une surface

Sur le schéma ci-contre, les segments roses mesurent 0,5 cm, les bleus mesurent 1 cm et tous les angles sont droits.



Représente la surface latérale d'un prisme droit qui a ce polygone pour base et une hauteur de 9 cm, puis calcule son aire.

5

Calcule, pour chaque question, la dimension demandée.

a. L'aire latérale d'un cylindre de rayon de base 5 cm et de hauteur 20 cm.

b. L'aire latérale d'un prisme qui a pour base un carré de côté 8 cm et pour hauteur 20 cm.

c. Le rayon de la base d'un cylindre de hauteur 18 cm et d'aire latérale 1 570 cm².

d. La largeur d'un rectangle dont la longueur est 15 cm et qui forme l'une des bases d'un prisme de hauteur 45 cm et d'aire latérale 18 dm².

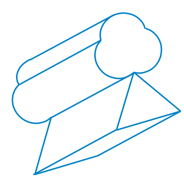
6 Pour le peintre

Un tuyau de transport du pétrole (pipeline) a la forme d'un cylindre de diamètre intérieur 60 cm et de diamètre extérieur 65 cm.
La longueur du pipeline qui va de la raffinerie au port est de 850 m. Une entreprise de peinture demande 15,85 € par m² pour la pose et la fourniture d'un revêtement spécial anti-corrosion à l'intérieur et à l'extérieur de ce pipeline.

Calcule le montant, au centime d'euro près, des travaux qu'effectuera cette entreprise.

7 Formes complexes

a. Le dessin ci-contre représente un objet à décorer. Les parties arrondies sont des demi-cylindres de rayon de base 2 cm. Le socle est un prisme ayant pour base un triangle équilatéral de côté 5 cm. L'épaisseur de cet objet est 8 cm. Calcule son aire latérale.



b. Même question pour l'étoile ci-contre dont les branches mesurent 3 cm de côté et dont l'épaisseur est de 4 cm.

8 Aire latérale et proportionnalité

Trois cylindres ont pour hauteur 20 cm et pour rayon de la base respectivement 2 cm, 5 cm et 8 cm.

a. Construis un tableau faisant apparaître le rayon et l'aire latérale de chaque cylindre.
Obtiens-tu un tableau de proportionnalité ?

b. Deux cylindres ont pour hauteur 20 cm et pour rayon de base 80 cm et 22 cm. Utilise la question précédente pour calculer mentalement l'aire latérale de ces cylindres.

9 *Les unités de volume*

a. Convertis les volumes suivants en cm^3 :

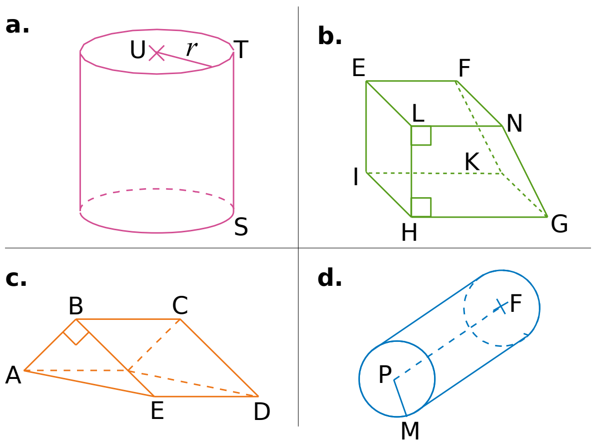
2 345 mm^3 ; 3,7 dm^3 ; 0,087 m^3 ; 3 L ; 15 cL.

b. Convertis les volumes suivants en cL :

125 mL ; 0,75 L ; 25 cm^3 ; 48,25 dL ; 2 dm^3.

10 *Bien observer*

On a représenté ci-dessous des prismes droits et des cylindres de révolution. Donne la nature des bases et nomme une hauteur dans chaque cas.

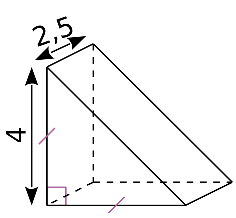


11 *Appliquer les formules*

a. Un prisme droit de hauteur 10 cm a pour base un polygone d'aire 7,4 cm². Calcule son volume.

b. Un cylindre de révolution de hauteur 11 mm a pour base un disque d'aire 0,9 cm². Calcule son volume en mm^3.

12 Le dessin ci-dessous représente un prisme droit dont la base est un triangle rectangle isocèle. (L'unité est le centimètre.)



a. Quelle est la hauteur de ce prisme ?

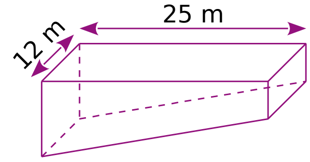
b. Calcule l'aire d'une base.

c. Calcule le volume du prisme.

13 Un seau a la forme d'un cylindre de révolution. Le fond du seau est un disque de diamètre 30 cm. Sa hauteur mesure 4,5 dm. Quelle est, en litres, la contenance de ce seau ?

14 *Piscine*

Une piscine a la forme du prisme droit ci-contre. Sa profondeur va de 0,80 m à 2,20 m.

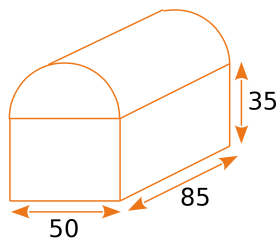


a. Quel volume d'eau contient-elle ?

b. Sachant que le robinet d'eau qui permet de la remplir a un débit de 15 L par minute, combien de temps faut-il pour la remplir ?

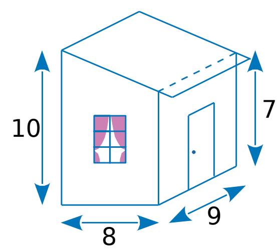
15 *Un coffre ancien*

Un coffre ancien est composé d'un pavé droit surmonté d'un demi-cylindre. (L'unité est le centimètre.)
Calcule le volume de ce coffre arrondi au cm^3.



16 *Choix d'un poêle*

On veut chauffer la maison représentée ci-contre à l'aide d'un poêle à bois. (L'unité est le mètre.)



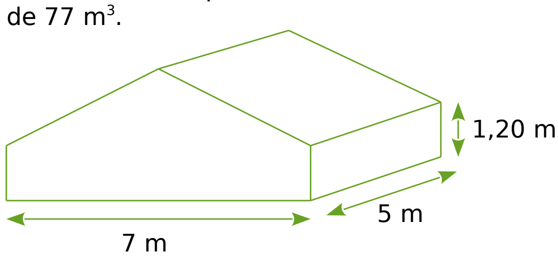
Les caractéristiques de ce poêle à bois sont :

- puissance : 10 000 W ;
- volume de chauffe : 420 m^3 ;
- dimensions en cm : l = 71, h = 126 et P = 44.

La capacité du poêle choisi est-elle suffisante ?

17 *Hauteur d'une pièce*

Le volume de la pièce mansardée ci-dessous est de 77 m^3.

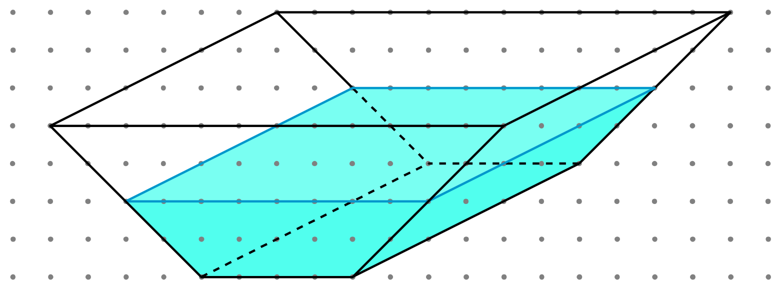


Quelle est sa hauteur au point le plus haut ?

18 Un récipient cylindrique de diamètre 5 cm et de hauteur 10 cm est rempli d'eau aux $\frac{5}{6}$ de sa hauteur.
Peut-on y plonger un cube d'arête 31 mm sans que l'eau ne déborde ? Explique ta réponse.

19 Un tombereau a la forme d'un prisme droit dont la base est un trapèze isocèle de petite base 40 cm et de grande base 120 cm. On l'a représenté en perspective cavalière sur papier pointé.

Sachant que ce tombereau est profond de 100 cm et haut de 40 cm, détermine le volume de la partie bleue correspondant au tombereau rempli à mi-hauteur.

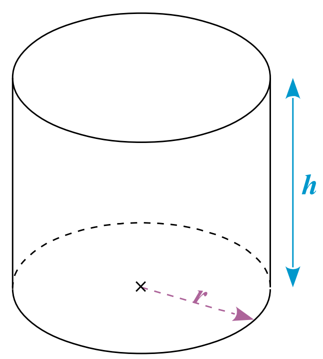


20 *Cylindre et proportionnalité*

On a représenté sur la figure ci-dessous un cylindre de hauteur h dont le rayon de la base est r.

On rappelle que le volume d'un cylindre est donné par la formule :

$$\mathcal{V}_{\text{cylindre}} = \text{aire d'une base} \times \text{hauteur}.$$



a. Calcule le volume exact en cm³ d'un cylindre de hauteur 15 cm dont le rayon de la base est 10 cm. Donne une valeur approchée du résultat en litres au dixième.

b. À l'aide d'un tableur, reproduis la feuille de calcul suivante.

	A	B
1	Hauteur (en cm)	15
2	Rayon de la base (en cm)	10
3	Volume du cylindre (en cm³)	
4	Volume du cylindre (en L)	

c. Programme les cellules B3 et B4 qui te permettront de calculer le volume du cylindre en cm³ et en litres, connaissant sa hauteur et le rayon de la base.

1er cas : Dans les questions **d.** à **f.**, on s'intéresse à un cylindre de hauteur 15 cm.

d. Recopie puis complète le tableau suivant à l'aide de la feuille de calcul.

Rayon de la base (en cm)	2	6	10	12	15	16	20
Volume du cylindre (en L)							

e. En observant le tableau de la question **d.**, que dire du volume du cylindre si le rayon de la base est doublé ?

f. À partir du tableau de la question **d.**, réalise un graphique représentant respectivement le volume d'un cylindre en fonction du rayon de la base.
Le volume d'un cylindre dont la hauteur est donnée est-il proportionnel au rayon de la base ?

2e cas : Dans les questions **g.** à **i.**, on s'intéresse à un cylindre dont le rayon de la base est 10 cm.

g. Recopie puis complète le tableau suivant à l'aide de la feuille de calcul.

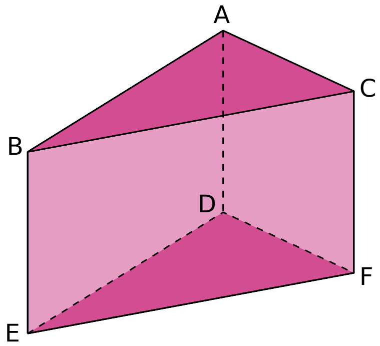
Hauteur (en cm)	10	12	15	20	25	40	50
Volume du cylindre (en L)							

h. En observant le tableau de la question **g.**, que dire du volume du cylindre si sa hauteur est doublée ?

i. À partir du tableau de la question **g.**, réalise un graphique représentant le volume d'un cylindre en fonction de sa hauteur.
Le volume d'un cylindre dont le rayon de la base est donné est-il proportionnel à sa hauteur ?

Exercices d'approfondissement

21 *Prisme à base triangulaire*



ABCDEF est un prisme droit dont la base est un triangle rectangle en A tel que AB = 4 cm, AC = 3 cm et BC = 5 cm.

La hauteur de ce prisme varie. On note x la hauteur de ABCDEF, en cm.

a. Pour une hauteur de 7 cm, calcule le volume de ce prisme droit.

b. Donne une expression du volume du prisme pour une hauteur de x cm.

c. Calcule ce volume pour $x = 4$ et $x = 8$. Que remarques-tu ?

d. Est-il possible d'obtenir un prisme de volume 60 cm^3 ? Si oui, quelle est alors sa hauteur ?

e. Même question pour des volumes de 21 cm^3 et 40 cm^3.

f. Trace un rectangle à main levée pour représenter la surface latérale de ce prisme et indique ses dimensions.

g. Peux-tu distinguer la longueur et la largeur de ce rectangle ?

h. Construis cette aire latérale en vraie grandeur lorsque la hauteur du prisme est de 7,5 cm.

i. Exprime son aire latérale en fonction de x.

j. Calcule cette aire latérale pour $x = 4$ et $x = 8$. Que remarques-tu ?

k. Est-il possible d'obtenir un prisme d'aire latérale 30 cm^2 ? Si oui, quelle est alors sa hauteur ?

Travailler en groupe

Solides de même volume

1re Partie :

Tom calcule le volume d'un cylindre. Après avoir effectué quelques calculs de tête, il tape sur sa calculatrice : $\pi \times 72$.

a. Rappelez la formule du volume d'un cylindre.

b. Sachant que le rayon et la hauteur sont des nombres entiers de centimètres, dessinez à main levée un patron de chacun des cylindres possibles.

c. Recopiez et complétez le tableau suivant avec une ligne par cylindre.

Cylindre	Rayon	Hauteur	Aire latérale	Volume
...	...	...	...	...

d. Organisez le groupe pour construire le plus rapidement possible un patron d'un cylindre de révolution de volume 4 800π mm^3 et d'aire latérale 1 200π mm^2.

2^{e} Partie :

Tom étudie maintenant un prisme droit de hauteur π cm ayant pour base un parallélogramme de côtés 7 cm et 5 cm.

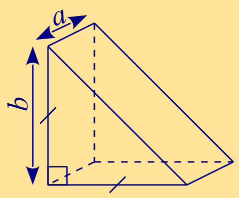
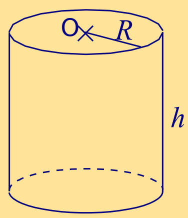
e. Dessinez un patron d'un tel prisme et calculez son aire latérale.

f. En vous aidant de la question **c.**, trouvez un cylindre de révolution ayant la même aire latérale et dessinez-en un patron.

g. Un prisme droit dont la base est un triangle équilatéral de côté 4 cm a la même aire latérale. Calculez sa hauteur.

h. Organisez le groupe pour dessiner en perspective cavalière le plus possible de solides d'aire latérale 36π cm^2 et classez-les en fonction de la forme de leur base.

Se tester avec le QCM !

		R1	R2	R3	R4
1	Quelles sont les affirmations vraies ?	Deux prismes de même volume ont la même aire latérale	Doubler la hauteur d'un prisme fait doubler son aire latérale	Doubler la hauteur d'un prisme fait doubler son volume	Doubler le rayon de base d'un cylindre fait doubler son volume
2	 Ce solide est un prisme droit de volume $\mathcal{V}$ (en cm^3)	La base est un triangle rectangle isocèle	La base est un rectangle	$\mathcal{V} = ab^2$	$\mathcal{V} = \frac{ab^2}{2}$
3		Si $a = b = 3$ cm alors $\mathcal{V} = 27$ cm^3	Si $a = b = 3$ cm alors $\mathcal{V} = 13{,}5$ cm^3	Si $a = b = 3$ cm alors $\mathcal{V} = 27\pi$ cm^3	Si $a = b = 3$ cm alors $\mathcal{V} = 13{,}5\pi$ cm^3
4	 Ce solide est un cylindre de volume $\mathcal{V}$ (en cm^3) et d'aire latérale $\mathcal{A}$ (en cm^2)	L'aire de la base est $2\pi R$	Le volume du cylindre est $2\pi R^2 h$	L'aire latérale du cylindre est $2\pi Rh$	L'aire de la base est πR^2
5		Si $R = 2$ cm et $h = 4$ cm alors $\mathcal{V} = 16\pi$ cm^3	Si $R = 2$ cm et $h = 4$ cm alors $\mathcal{A} = 16\pi$ cm^2	Si $R = 4$ cm et $h = 2$ cm alors $\mathcal{A} = 16\pi$ cm^2	Si $R = 4$ cm et $h = 2$ cm alors $\mathcal{V} = 16\pi$ cm^3
6		Si $R = 3$ cm et $\mathcal{V} = 9\pi$ cm^3 alors $h = 1$ cm	Si $R = 1$ cm et $\mathcal{A} = 4\pi$ cm^2 alors $h = 1$ cm	Si $\mathcal{A} = \mathcal{V}$ alors $R = 2$ cm	Si $\mathcal{A} = \mathcal{V}$ alors $R = 1$ cm
7	L'aire latérale d'un cube d'arête c est...	$4c^2$	c^3	$4c^3$	$2c^2$

Pour aller plus loin

Comme des spationautes

La station orbitale Mep est constituée de quatre pièces rectangulaires dont les dimensions sont données ci-dessous. Sa hauteur est de 2,31 m.

Aide l'équipe à prévoir l'oxygène nécessaire en calculant le volume de la station.

Attention ! Il n'y a pas de calculatrice dans la station.