

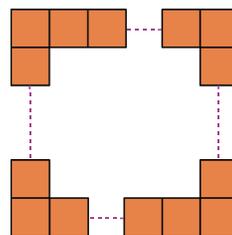
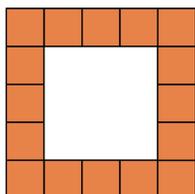
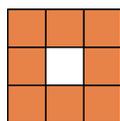
# »» Calcul littéral

N4



## Activité 1 : Écrire une expression littérale

Avec des petits carrés identiques, disposés comme le montrent les figures ci-dessous, on constitue un nouveau carré.



- Réalise une figure avec quatre petits carrés sur un côté. Indique le nombre total de carrés coloriés.  
Recommence avec une figure de six petits carrés de côté.  
S'il y a 100 petits carrés sur le côté, combien y-a-t-il de carrés coloriés au total ?

- On appelle  $n$  le nombre de petits carrés d'un côté. On veut obtenir une formule en fonction de  $n$  qui donne le nombre total de carrés coloriés dans le nouveau carré.

- Chloé dit : « *Je pense que la formule est  $4n$  !* ». Sofiane lui répond alors : « *Mais non ! Tu en as trop !* ». Justifie la réponse de Sofiane et établis une première formule.

- Sur les cahiers de trois élèves, on observe les schémas suivants :

Schéma de Jean

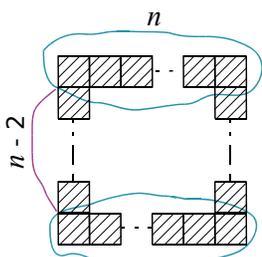


Schéma de Fatima

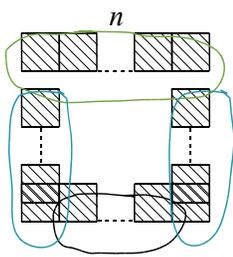
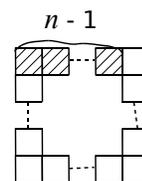


Schéma de Bakari



En suivant les découpages de Jean et de Fatima, établis deux nouvelles formules.

À l'aide de son schéma, Bakari remarque que le nombre de carrés coloriés est un multiple de 4.

Justifie sa remarque et déduis-en une quatrième formule.

- En utilisant chacune de ces quatre formules, calcule le nombre total de carrés coloriés lorsqu'il y en a 15 sur un côté. Les résultats trouvés étaient-ils prévisibles ?
- Développe et réduis chacune des trois dernières formules en utilisant la propriété de distributivité. Qu'as-tu démontré ?
  - L'unité d'aire est la surface d'un des petits carrés coloriés utilisés pour constituer le nouveau carré.
    - En considérant des aires, établis une cinquième formule donnant le nombre total de carrés coloriés en fonction de  $n$ .
    - Utilise cette nouvelle formule pour calculer le nombre total de carrés pour  $n = 4$  ;  $n = 6$  ;  $n = 15$  et  $n = 100$ . Les résultats obtenus sont-ils cohérents ? Pourquoi ?
  - En utilisant les résultats des questions précédentes, démontre que  $(n - 2)^2 = n^2 - 4n + 4$ .

## Activité 2 : Supprimer des parenthèses

### 1. Un signe « + » devant des parenthèses

- a. Complète :  $4x + (3 - 7x) = 4x + ((+ \dots) + (- \dots))$ .  
Écris alors cette expression sans parenthèse puis rédige une règle pour ajouter une somme algébrique. Que peut-on dire de parenthèses précédées d'un signe + ?
- b. Écris l'expression suivante sans parenthèse :  $G = 5 + (-6x + 1)$ .

### 2. Un signe « - » devant des parenthèses

- a. Quel est l'opposé de 5 ? Et celui de -6,5 ? Que vaut la somme de deux nombres opposés ? Que peut-on dire de deux nombres dont la somme est égale à 0 ?

b. Complète :

$-3 + \dots = 0$ donc l'opposé de $-3$ est ... ;	$-3x^2 + \dots = 0$ donc l'opposé de $-3x^2$ est ... ;
$\dots + 5 = 0$ donc l'opposé de 5 est ... ;	$3 + x + \dots = 0$ donc l'opposé de $3 + x$ est ... ;
$-x + \dots = 0$ donc l'opposé de $-x$ est ... ;	$-2x + 1 + \dots = 0$ donc l'opposé de $-2x + 1$ est ... ;
$\dots + 2x = 0$ donc l'opposé de $2x$ est ... ;	$2 - x^2 + \dots = 0$ donc l'opposé de $2 - x^2$ est ... .

c. **Rappel** :  $a - b = a +$  opposé de  $b$ .

Complète :  $F = 2x - (3 + x) = 2x + (\dots)$ .  
Dédus-en l'expression de F sans parenthèse.

- d. De la même façon, écris sans parenthèse  $G = 4 - (2 - x^2)$  et  $H = 2x + 3 - (-2x + 1)$ .  
Rédige une règle pour soustraire une somme algébrique.

## Activité 3 : Conjecturer, démontrer

On considère le programme de calculs suivant :

Étape 1 : Choisir un nombre ;  
Étape 2 : Lui ajouter 2 ;  
Étape 3 : Multiplier cette somme par le nombre de départ ;  
Étape 4 : Retrancher au résultat le carré du nombre de départ et annoncer le résultat obtenu.

1. Effectue le programme en choisissant 5 comme nombre de départ puis -8 et enfin 3,45. Quelle remarque peux-tu faire ?

2. Dans un tableur, reproduis le tableau ci-contre. Complète la première ligne avec les nombres entiers de 1 à 10 puis programme les cellules pour qu'elles affichent les résultats pour chaque étape du programme de calculs. Que remarques-tu ?

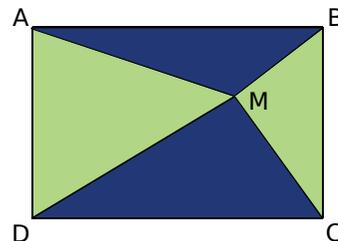
	A	B	C
1	Étape 1		
2	Étape 2		
3	Étape 3		
4	Étape 4		

3. Remplace les nombres de la première ligne par des nombres entiers négatifs puis par des nombres décimaux relatifs. Que remarques-tu ?

4. On appelle  $x$  le nombre de départ. Écris les étapes en fonction de  $x$  et retrouve alors ce que tu as remarqué aux questions 2. et 3.

## Activité 4 : En géométrie

On considère un rectangle ABCD et un point M placé à l'intérieur de ce rectangle comme le montre la figure ci-contre. On s'intéresse aux aires des triangles bleus.



**1.** On suppose que  $AB = 10$  cm et  $AD = 6$  cm.

- Calcule l'aire du rectangle ABCD.
- Construis une figure et calcule l'aire de la figure bleue, en effectuant les mesures et les calculs nécessaires.  
Recommence en modifiant la position du point M. Que remarques-tu ?

**2. Avec Tracenpoche**

- Construis un rectangle ABCD, place un point M et trace les triangles MAB et MCD.
- Dans la fenêtre *Analyse*, tape les expressions ci-contre et appuie sur la touche F9.
- Déplace le point M à l'intérieur du rectangle. Que remarques-tu ?
- Modifie les dimensions du rectangle ABCD. Déplace à nouveau le point M. La remarque faite à la question **c.** reste-t-elle valable ?
- Quelles conjectures peux-tu faire ?

### Analyse

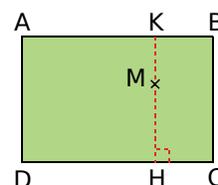
```

aire (ABCD) =
aire (MAB) =
aire (MCD) =
calc (aire (MAB) + aire (MCD)) =
    
```

**3. La démonstration**

On pose :  $AD = l$ ,  $AB = L$  et  $MH = x$ .

- Exprime MK en fonction de  $x$  et de  $l$ .
- Exprime les aires des triangles MDC et MAB en fonction de  $x$ , de  $l$  et de  $L$ .
- Démontre les conjectures que tu as faites à la question **2. e.**.  
Cette propriété est-elle vraie uniquement pour un point M à l'intérieur du rectangle ? Justifie ta réponse.



## Activité 5 : Développer $(a + b)(c + d)$

**1.** On considère le produit  $P = 86 \times 53$ . Justifie les égalités suivantes :  
 $P = 86 \times 50 + 86 \times 3$  puis  $P = 80 \times 50 + 6 \times 50 + 80 \times 3 + 6 \times 3$ .  
 Déduis-en l'égalité :  $(80 + 6) \times (50 + 3) = 80 \times 50 + 6 \times 50 + 80 \times 3 + 6 \times 3$  puis calcule P sans poser de multiplication (et sans calculatrice !).

**2.** Complète :  $(a + b)(c + d) = \dots \times (c + d) + \dots \times (c + d) = \dots + \dots + \dots + \dots$ .  
 Quelle propriété as-tu utilisée ? Combien de fois ? En quoi a été transformé le produit initial ?

- Complète :  $(3x - 2)(5x + 4) = (\dots + \dots) \times (\dots + \dots)$ .
- Déduis-en le développement de ce produit.
- Procède de même avec le produit  $(2 - y)(2y - 5)$ .

**4.** Pour développer le produit  $(2a + 3)(3a - 4)$ , on peut poser la multiplication comme indiqué ci-contre.  
 Effectue-la sans oublier le décalage.

$$\begin{array}{r}
 2a \quad + 3 \\
 \times \quad 3a \quad - 4 \\
 \hline
 \end{array}$$



## I - Simplification d'une expression littérale

→ ex 1 à 3

### Conventions

Pour simplifier l'écriture d'une expression littérale, on peut supprimer le symbole  $\times$  devant une lettre ou une parenthèse.

Pour tout nombre  $a$ , on peut écrire :  $a \times a = a^2$  (qui se lit «  $a$  au carré ») ;

$a \times a \times a = a^3$  (qui se lit «  $a$  au cube »).

**Remarque :** On ne peut pas supprimer le signe  $\times$  entre deux nombres.

**Exemple :** Simplifie l'expression suivante :  $A = -5 \times x + 7 \times (-4) \times (3 \times x - 2)$ .

$A = -5 \times x + 7 \times (-4) \times (3 \times x - 2)$  → On repère tous les signes  $\times$ .

$A = -5x + 7 \times (-4)(3x - 2)$  → On supprime les signes  $\times$  placés devant une lettre ou une parenthèse.

$A = -5x - 28(3x - 2)$  → On calcule si possible.

### Propriété

L'opposé d'une somme algébrique est égal à la somme des opposés de chacun de ses termes.

**Exemple 1 :** Quel est l'opposé de la somme algébrique  $a + b - 2ab$  ?

L'opposé de  $a + b - 2ab$  est  $-(a + b - 2ab) = -a + (-b) + 2ab = -a - b + 2ab$ .

**Remarque :** Cette propriété permet de supprimer des parenthèses précédées d'un signe «  $-$  » dans une expression.

**Exemple 2 :** Supprime les parenthèses dans l'expression  $B = 3x - (-2x^2 - 5xy + 4)$ .

$B = 3x - (-2x^2 - 5xy + 4)$  → On additionne les **opposés**.

$B = 3x + (+2x^2) + (+5xy) + (-4)$

$B = 3x + 2x^2 + 5xy - 4$  → On simplifie l'expression.

## II - Développement

### A - La distributivité simple

→ ex 4 et 5

#### Propriété

Pour tous nombres relatifs  $k$ ,  $a$  et  $b$  :

$$\begin{aligned} k \times (a + b) &= k \times a + k \times b \\ k \times (a - b) &= k \times a - k \times b \end{aligned}$$

**Exemple :** Développe l'expression suivante :  $C = -3,5(x - 2)$ .

$C = -3,5 \times (x - 2)$  → On remplace le signe  $\times$  dans l'expression.

$C = (-3,5) \times x + (-3,5) \times (-2)$  → On distribue le facteur  $-3,5$  aux termes  $x$  et  $-2$ .

$C = -3,5x + 7$  → On calcule et on simplifie l'expression.

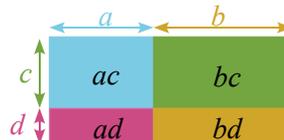
## B - La double distributivité

→ ex 6

### Propriété

Pour tous nombres relatifs  $a, b, c$  et  $d$  :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$



**Exemple :** Développe et simplifie l'expression suivante :  $D = (3x + 1)(y - 4)$ .

$$D = (3x + 1)(y + (-4)).$$

→ On transforme la soustraction.

$$D = 3x \times y + 3x \times (-4) + 1 \times y + 1 \times (-4)$$

→ On applique la double distributivité.

$$D = 3xy - 12x + y - 4$$

→ On calcule les produits et on simplifie.

## III - Factorisation et réduction

### A - Factorisation

→ ex 7 et 8

#### Propriété

Pour tous nombres relatifs  $k, a$  et  $b$  :

$$k \times a + k \times b = k \times (a + b)$$

$$k \times a - k \times b = k \times (a - b)$$

**Exemple :** Factorise les expressions suivantes :  $E = 14a - 7b$  puis  $F = -x^2 + 3x$ .

Cas où le facteur commun est un nombre :

$$E = 7 \times 2a - 7 \times b$$

→ On met en évidence le facteur commun : 7

$$E = 7 \times (2a - b)$$

→ On met en facteur le nombre 7 puis on regroupe les facteurs restants.

Cas où le facteur commun est une lettre :

$$F = (-x) \times x + 3 \times x$$

→ On remplace les signes  $\times$  sous-entendus dans l'expression et on repère le facteur commun :  $x$ .

$$F = x(-x + 3)$$

→ On met en facteur  $x$  puis on regroupe les facteurs restants.

### B - Réduction d'une somme algébrique

→ ex 9

#### Définition

**Réduire** une somme algébrique, c'est l'écrire avec le moins de termes possibles.

**Exemple 1 :** Réduis l'expression :  $G = 5x^2 + (3x - 4) - (2x^2 - 3) + 2x$ .

$$G = 5x^2 + 3x - 4 - 2x^2 + 3 + 2x$$

→ On supprime les parenthèses.

$$G = 5x^2 - 2x^2 + 3x + 2x - 4 + 3$$

→ On regroupe les termes.

$$G = (5 - 2)x^2 + (3 + 2)x - 1$$

→ On factorise les termes en  $x$  et en  $x^2$ .

$$G = 3x^2 + 5x - 1$$

→ On simplifie.



**Exemple 2 :** Développe et réduis l'expression :  $H = 7x(x - 6) + (3x - 2)(4x + 5)$ .

$H = 7x(x - 6) + (3x - 2)(4x + 5)$	→	On développe.
$H = 7x \times x - 7x \times 6 + (3x \times 4x + 3x \times 5 - 2 \times 4x - 2 \times 5)$		
$H = 7x^2 - 42x + 12x^2 + 15x - 8x - 10$	→	On supprime les parenthèses.
$H = 7x^2 + 12x^2 - 42x + 15x - 8x - 10$	→	On regroupe les termes en $x$ et en $x^2$ .
$H = (7 + 12)x^2 + (-42 + 15 - 8)x - 10$		
$H = 19x^2 - 35x - 10$	→	On simplifie en ordonnant.

## IV - Calculs pour une valeur (substitution)

→ ex **10** et **11**

### Règle

Une expression littérale peut avoir plusieurs formes d'écriture, entre autres :

- une forme réduite ;
- une forme factorisée ;
- une forme développée ;
- une forme initiale...

Pour calculer la valeur numérique d'une expression, on substitue à l'inconnue sa valeur numérique.

### Remarques :

- Mais avant la substitution, il est judicieux de choisir la forme la plus simple pour effectuer les calculs.
- Pour calculer la valeur numérique d'une expression littérale, il faut parfois faire apparaître quelques signes  $\times$  sous-entendus.

**Exemple :** On propose de calculer  $J = (x + 3)(3x - 1) + 5(x + 3)$  pour  $x = 2$ .

La forme réduite de  $J$  est :  $3x^2 + 13x + 12$ .

La forme factorisée de  $J$  est :  $(x + 3)(3x + 4)$ .

À l'aide de la forme initiale :

$$\begin{aligned}
 J &= (x + 3)(3x - 1) + 5(x + 3) \\
 J &= (2 + 3)(3 \times 2 - 1) + 5 \times (2 + 3) && \left. \begin{array}{l} \text{4 opérations} \\ \text{3 opérations} \end{array} \right\} \\
 J &= 5 \times 5 + 5 \times 5 \\
 J &= 50
 \end{aligned}$$

La forme réduite :

$$\begin{aligned}
 J &= 3x^2 + 13x + 12 \\
 J &= 3 \times 2^2 + 13 \times 2 + 12 && \left. \begin{array}{l} \text{2 opérations} \\ \text{3 opérations} \end{array} \right\} \\
 J &= 3 \times 4 + 26 + 12 \\
 J &= 50
 \end{aligned}$$

La forme factorisée :

$$\begin{aligned}
 J &= (x + 3)(3x + 4) \\
 J &= (2 + 3)(3 \times 2 + 4) && \left. \begin{array}{l} \text{3 opérations} \\ \text{1 opération} \end{array} \right\} \\
 J &= 5 \times 10 \\
 J &= 50
 \end{aligned}$$

On constate que le calcul de  $J$  pour  $x = 2$  est **plus simple** avec la forme factorisée.



À toi de jouer!

- 1** Simplifie en supprimant le signe  $\times$  lorsque cela est possible.

$$B = -3 \times x \times (-5 \times x) + 2 \times x \times (-7y)$$

$$C = 2t^2 \times t + 5t \times (-4t)$$

$$D = (2 \times 4 \times a + 5) \times (3 - 7 \times a)$$

- 2** Remplace dans chacune des expressions tous les signes  $\times$  sous-entendus.

$$E = 3x^2 + 5x - 10$$

$$F = 4y(21 - 3y)$$

$$G = (2z - 1)(5 - z)$$

- 3** Supprime les parenthèses dans les expressions suivantes.

$$B = x^2 - (4xy - 5y - 4x)$$

$$C = (2a + 5b - 4) - (a^2 - b^2 + 1)$$

$$D = -(-2x - 5) + (5 - 2x)$$

- 4** Complète les développements.

$$B = x(3 + 2x) = x \times \dots + \dots \times 2x = \dots + \dots$$

$$C = 3a(4b - \dots) = \dots - 15a^2$$

$$D = 5x(3y - \dots) = \dots xy - 20x$$

- 5** Développe les expressions suivantes.

$$E = 3(a - 6b + 9) \quad ; \quad F = -2t(5t - 4)$$

$$G = x^2(7x - 8)$$

- 6** Développe les expressions suivantes.

$$B = (x + 7)(4y - 5) \quad ; \quad C = (x + 3)^2$$

$$D = (a + b)(x - y) \quad ; \quad E = \left(\frac{x}{2} + 5\right)\left(2z + \frac{3}{2}\right).$$

- 7** Fais apparaître le facteur commun.

$$C = 3x^2 + 5xy$$

$$D = 25ab - 10a^2 + 30a$$

$$E = 4x(5 + 3x) + 7(5 + 3x)$$

- 8** Factorise les expressions suivantes.

$$F = 6x - 5x^2$$

$$G = 7uv + 21u^2$$

$$H = 2(3x - 2) - 9x(3x - 2)$$

- 9** Réduis les expressions suivantes.

$$E = 3a - (6 + 7a^2) + 4a - 5$$

$$F = 4x(3x - 6) - (2x - 1)(3 + 5x)$$

- 10** On considère l'expression B écrite sous trois formes différentes :

La forme initiale :  $B = (x - 5)^2 + 8x - 40$

La forme réduite :  $B = x^2 - 2x - 15$

La forme factorisée :  $B = (x - 5)(x + 3)$

**a.** Calcule l'expression B en utilisant les trois formes proposées d'abord pour  $x = 5$ , puis pour  $x = 0$  et enfin pour  $x = -3$ .

**b.** Parmi les trois écritures de l'expression B, quelle est celle qui permet d'arriver au résultat en faisant le moins d'opérations pour  $x = 5$  ? Pour  $x = 0$  ? Et pour  $x = -3$  ?

- 11** On considère l'expression

$$C = 5x + x(1 - 2x) + x^2.$$

**a.** Développe et réduis l'expression C.

**b.** Factorise l'expression C trouvée au **a.**

**c.** Donne la forme permettant de trouver le résultat en faisant le moins d'opérations d'abord pour  $x = 0$  puis pour  $x = 6$  et enfin pour  $x = -4$ .

Tous ces exercices sont corrigés à la fin du manuel.  
Corrections animées sur <http://manuel.sesamath.net>



## Supprimer les parenthèses

**1** Supprime les parenthèses puis réduis les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} A = 5 + (2x + 3) & D = (4x + 2) + (-6x - 2) \\ B = 5x - (3 - 4x) & E = -(-3x - 1) + (x - 3) \\ C = (x - 4) - 6 & F = 8x - (5x + 2) + (3 - 4x) \end{array}$$

**2** Supprime les parenthèses puis réduis les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} A = (x + 3) + (4x - 5) & D = (3y + 7) + (-5y + 3) \\ B = 6 - 2t - (4t - 8) & E = 5z - 6 - (7 - 2z) + 3z \\ C = -(8a + 3) - 4a & F = (3 - 4x) - (-2x + 8) \end{array}$$

**3** Relie les expressions qui sont égales puis trouve l'intruse :

$(4x + 3) - (x + 5)$	•	•	$3x + 3$
$7x - (3 + 4x)$	•	•	$-3x - 5$
$(3 + 4x) - 7x$	•	•	$6$
$6x - 3 - (3x - 6)$	•	•	$3x - 2$
$-(4x + 5) - (-x)$	•	•	$-3x + 3$
$5x + 3 - (-3 + 5x)$	•	•	$3x - 3$

**4** Supprime les parenthèses puis réduis les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l} A = 3x + \frac{1}{4} - (3 - 2x) \\ B = -\left(\frac{1}{3}x + 2\right) + (5x - 3) \\ C = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{5}{6} + \frac{2}{6}x\right) \\ D = \frac{1}{2} + 2x - \left(x - \frac{3}{2}\right) \end{array}$$

## Factoriser

**5** Quelles sont les expressions factorisées ?

$$\begin{array}{l|l} \text{a. } 4x^2 + 8x + 4 & \text{d. } 3x + 6 \\ \text{b. } 3(x - 5) & \text{e. } 4x(x + 2) \\ \text{c. } x + (3x + 2) & \text{f. } 3x - (x - 4) \end{array}$$

**6** Factorise les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} A = 16x + 4 & D = -6x - 18 \\ B = 9 - 72x & E = 9x + 6 \\ C = 12 - 8x & F = 42 - 14x \end{array}$$

**7** Factorise les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} A = 54 - 18a & E = 3x^2 + x \\ B = -49 + 21x & F = 8t^2 + 2t \\ C = -36z + 63 & G = -x + 3x^2 \\ D = 5b + 25 & H = 3y^2 + 9y^2 \end{array}$$

**8** Factorise les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} A = 4x^2 + 4x + 4 & C = 9y^2 - 3y + 27 \\ B = -5x^2 + 10x + 15 & D = 3y^3 + y^2 \end{array}$$

## Réduire

**9** Réduis, si possible, les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l|l|l} \text{a. } x + x & \text{d. } 3x + 2 & \text{g. } 0 \times x & \text{j. } 5x \times 6x \\ \text{b. } x \times x & \text{e. } 2x \times x & \text{h. } 1 + 2x & \text{k. } 4 \times x \times 5 \\ \text{c. } 2x + x & \text{f. } x^2 + x & \text{i. } 0 + x & \text{l. } x \times x + x \end{array}$$

**10** Factorise par  $x$  puis réduis les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} \text{a. } 5x + 3x & \text{c. } -4x + 15x \\ \text{b. } 3x - 8x & \text{d. } -9x - 6x \end{array}$$

**11** Réduis et ordonne, si possible, chacune des expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} \text{a. } 12x - y + 2 & \text{d. } 8 - x + x^2 + 5x \\ \text{b. } 7y + 12 - 13y & \text{e. } 3t - 12t + t^2 - 7 \\ \text{c. } 10 - 8d + 3 & \text{f. } a^2 + b - a + 3b \end{array}$$

**12** Réduis les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} \text{a. } \frac{3x}{2} + \frac{x}{4} & \text{c. } 3 + \frac{x-1}{5} \\ \text{b. } \frac{5x}{6} + \frac{x-4}{3} & \text{d. } -5x - \frac{3x-2}{4} + 3 \end{array}$$

## Développer

**13** Développe les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} A = 3(x + 6) & D = -8(-5 - 3y) \\ B = 5(6 - y) & E = 6(4x - 9) \\ C = -7(2z - 3) & F = -12(-5 + 3z) \end{array}$$

**14** Développe les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} A = (-3 + y) \times 9 & D = -8(9 - 7x) \\ B = -6(2x - 7) & E = -8z(4 - 3z) \\ C = (3t + 2) \times 8 & F = 3y(-4 + 6y) \end{array}$$

**15** Développe les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} A = x(x + 4) & C = -2y(5 - y) \\ B = 7y(2 - 9y) & D = (9 - 3t) \times 4t \end{array}$$

**16** Développe et réduis les expressions :

$$\begin{array}{l|l} A = 11 + 2(x - 6) & D = -15 - 9(-5 + 3b) \\ B = -3(2y - 4) - 2y & E = -5(6 - 3z) - 9 + z \\ C = 7 - 4(8 - 2a) + a & F = 12x - 4(6 - 3x) \end{array}$$

**17** Développe et réduis les expressions :

$$\begin{array}{l} A = 3x - 5 + 5(2x - 2) \\ B = 4y - 6(3 - 2y) + 4(y - 1) \\ C = 5t^2 + 3(2t - 3) - 2t(t - 5) \end{array}$$

**18** Développe et réduis les expressions :

$$\begin{array}{l} A = 11 + 2(x - 6) + 4(-3x - 6) \\ B = -2(x - 5) - 3(7 - 4x) \\ C = 8 + 2y - 5(2y - 6) + 4 \\ D = -7y - 4(3y - 6) + 3 + 2(3y - 7) \\ E = -5z + 5z(z - 3) - 7(6 - 8z) \end{array}$$

**19** Développe et réduis les expressions :

$$\begin{array}{l|l} A = 3\left(\frac{1}{4} + x\right) - \frac{1}{4} & C = \frac{3}{4}(x - 5) + \frac{1}{2} \\ B = \frac{2}{3}x + 5\left(x - \frac{1}{6}\right) & D = 2 + 3\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{3}\right) \end{array}$$

## Double distributivité

**20** Développe et réduis les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} A = (x + 4)(x + 3) & C = (3z + 4)(5 - 6z) \\ B = (y + 3)(2y + 8) & D = (-7t + 8)(3 - 5t) \end{array}$$

**21** Développe et réduis les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} A = (7 - 3x)(9x - 3) & C = (4a + 6)(-3 - 5a) \\ B = (-2 - 3y)(4 - 8y) & D = (5z - 7)(8z + 2) \end{array}$$

**22** Développe et réduis les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} A = (a + 1)^2 & C = (3y - 4)^2 \\ B = (5x + 2)^2 & D = (4 - x)^2 \end{array}$$

**23** Développe et réduis les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} A = 3(x + 1)(x - 5) & C = -(y + 5)(3y - 6) \\ B = 2(-3 - t)(t - 7) & D = x(2x - 5)(2 - x) \end{array}$$

### 24 Extrait du Brevet

On considère les expressions :

$$A = (x + 2)(x - 3) + (x - 3) \text{ et } B = (2x - 3)^2.$$

- Développer et réduire les deux expressions.
- Calculer A pour  $x = 3$ .
- Calculer B pour  $x = 1,5$ .

**25** On considère le rectangle ci-dessous. Exprime en fonction de  $x$  :



- son périmètre sous la forme d'une expression réduite ;
- son aire sous la forme d'une expression factorisée ;
- son aire sous la forme d'une expression développée et réduite.

**26** Parmi les expressions suivantes, retrouve celles qui sont égales et justifie ta réponse :

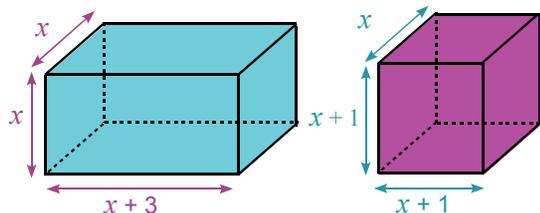
$$A = 16 - 4x^2$$

$$B = (4 - 2x)^2$$

$$C = (4 - 2x)(4 + 2x)$$

$$D = 4x^2 - 16x + 16$$

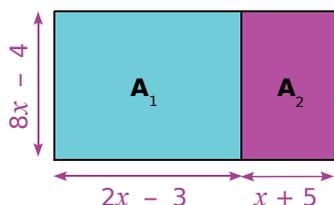
**27** On considère les deux parallélépipèdes rectangles suivants :



**a.** Calcule les deux volumes pour  $x = 1$ . Que remarques-tu ?

**b.** Exprime, en fonction de  $x$ , les deux volumes. Que remarques-tu ? Comment expliquer alors le résultat de la question **a.** ?

**28** On considère la figure suivante ( $x$  désigne un nombre supérieur ou égal à 2) :



**a.** Exprime en fonction de  $x$  les aires  $A_1$  et  $A_2$ .

**b.** Dédus-en une expression de l'aire totale  $A$  de la figure.

**c.** Calcule  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A$  pour  $x = 6$ .

## Substitution

**29** Recopie les expressions suivantes en rajoutant les signes  $\times$  sous-entendus puis calcule-les pour  $x = 2$  :

$$A = 2x$$

$$B = 4x + 5$$

$$C = 4(x - 3)(x + 8)$$

$$D = 3x - 2(5x - 15)$$

$$E = 9x^2$$

$$F = 7 - 2x$$

$$G = 2(3x - 2)$$

$$H = x(x + 2) - 4x$$

$$I = 4x^2 - 2x(4 - x)$$

$$J = -3x^2 + 5x - 4$$

**30** Recopie et complète le tableau suivant :

	$x = 4$	$x = 0$	$x = -2$
$3(2x - 7) - 5x$			
$(x - 4)(x - 2)$			
$(2 - x)^2$			

**31** Calcule les expressions suivantes :

$$A = 3t^2 + 6t - 8 \quad \text{pour } t = 3 ;$$

$$B = 5x^2 - 3x + 7 \quad \text{pour } x = -2 ;$$

$$C = -3y^2 - 5y - 8 \quad \text{pour } y = -3.$$

## Synthèse

**32** Développe et réduis les expressions suivantes :

$$A = 3(2x - 6) - (3 - 5x)$$

$$B = (5 - 2y) - (-3y + 7)$$

$$C = 4(6 + z) + (z - 3)(2 - z)$$

$$D = (2t - 5)(3t + 2) - (t^2 + 6)$$

**33** Développe et réduis les expressions suivantes :

$$A = 3(-2x + 5) + (-2x + 5)(x - 3)$$

$$B = (2a - 5)(3 - 4a) - 2(5 - a)$$

$$C = -(3 - 4z)(z - 2)$$

$$D = -5r(2 - 3r) + (-r - 2)(2r + 5)$$

## Programme de calculs

**34** Exprime en fonction de  $x$  les expressions suivantes ( $x$  étant non nul) :

**a.** l'opposé de  $x$  ;

**b.** l'inverse de  $x$  ;

**c.** l'opposé du carré de  $x$  ;

**d.** le carré de l'opposé de  $x$  ;

**e.** l'opposé de l'inverse de  $x$  ;

**f.** le carré de l'inverse de  $x$ .

**35** Si on note  $z$  l'âge en années d'Alexis aujourd'hui, comment note-t-on :

- l'âge qu'il aura dans deux ans ?
- le double de son âge ?
- le triple de l'âge qu'il avait il y a quatre ans ?
- la moitié de l'âge qu'il aura dans cinq ans ?
- son année de naissance ?

**36** Relie chaque phrase de la première colonne avec l'expression qui lui correspond où  $y$  est le prix d'achat de l'article en euros :

L'article est revendu cinq fois plus cher.	• $y + 5$
L'article est revendu 5 € de plus.	• $2y$
Le prix est augmenté de 100 %.	• $3y$
Le prix est augmenté de 200 %.	• $5y$

**37** Soient les deux programmes de calculs suivants :

**Programme 1 :**

- Choisis un nombre ;
- Ajoute 6 à ce nombre ;
- Multiplie le résultat par  $-2$  ;
- Ajoute le quadruple du nombre choisi au départ.

**Programme 2 :**

- Choisis un nombre ;
- Soustrais 3 à ce nombre ;
- Multiplie le résultat par 4 ;
- Soustrais le double du nombre choisi au départ.

**a.** Teste ces deux programmes de calculs pour  $x = 2$  ; pour  $x = -3$  et enfin pour  $x = 4$ .

**b.** Que remarques-tu ?

**c.** Si l'on note  $x$  le nombre choisi au départ, écris une expression A qui traduit le programme 1.

**d.** De la même manière, écris une expression B pour le programme 2.

**e.** Comment peux-tu expliquer la remarque faite à la question **b.** ?

## Problèmes

**38** Isabelle achète  $t$  kilogrammes d'oignons à 3,20 € le kilo et elle achète le double en masse de tomates à 2,30 € le kilo. Exprime, en fonction de  $t$ , le montant de ses achats en euros.

**39** Adeline achète 5 CD et 3 DVD. On notera  $x$  le prix en euros d'un CD. Un DVD coûte 10 euros de plus qu'un CD.

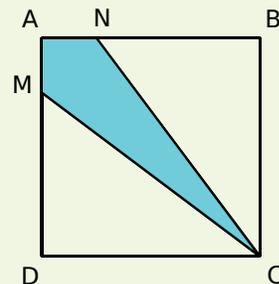
**a.** Écris, en fonction de  $x$ , la dépense d'Adeline en euros. Développe et réduis l'expression trouvée.

**b.** En utilisant l'expression obtenue au **a.**, calcule, en euros, la dépense d'Adeline si un CD coûte 15 €.

**40** *Extrait du Brevet*

La figure ci-dessous représente un carré de 6 cm de côté. M est un point de [AD] et N est un point de [AB] tels que :

$AM = AN = x$  ( $x$  est un nombre strictement positif).



**a.** Calculer, en fonction de  $x$ , les aires des triangles MDC et NBC.

**b.** Calculer, en fonction de  $x$ , l'aire du quadrilatère AMCN.

**c.** Calculer ces trois aires pour  $x = 2$  cm.

**41** Une salle de concert peut contenir 600 places. Il y a  $x$  places assises et les autres sont debout. Les places debout coûtent 15 € et les places assises 25 €.

**a.** Que représentent les expressions suivantes :  $600 - x$  ;  $25x$  et  $15(600 - x)$  ?

**b.** Exprime, en fonction de  $x$ , la recette totale en euros si toutes les places sont prises.

**c.** Calcule cette recette si  $x = 200$ .



## 42 Distributivité à gogo

a. On veut développer l'expression  $A = 2(5x + 2)(3x + 1)$ . Pour cela, développe d'abord l'expression  $2(5x + 2)$  puis termine le développement de  $A$ .

b. Développe le produit  $(x + 2)(3x + 2)$  et déduis-en le développement de :

$$B = (x + 2)(3x + 2)(x + 4).$$

c. En t'inspirant des questions précédentes, développe les expressions suivantes :

$$C = 4(5x - 1)(3x + 3) ;$$

$$D = (1 - x)(1 + x)(2x + 1).$$

## 43 Idée fausse

a. On considère les expressions  $A = (2x + 3)^2$  et  $B = (2x)^2 + 3^2$ . Calcule ces expressions pour  $x = 0$  et pour  $x = 10$ . Qu'en déduis-tu ?

b. Peut-on dire que pour tout nombre  $a$  et tout nombre  $b$  non nuls, les expressions  $(a + b)^2$  et  $a^2 + b^2$  sont égales ? Justifie. Développe alors l'expression  $(a + b)^2$ .

c. On considère les deux expressions  $C = (2x + 3)(2x - 3)$  et  $D = (2x)^2 - 3^2$ . Calcule ces expressions pour  $x = 0$  puis pour  $x = 10$ . Qu'en déduis-tu ? Démontre-le.

d. Développe alors l'expression :  $(a + b)(a - b)$ .

## 44 Calcul mystère

a. Calcule les expressions  $2001 \times 1999 - 2000^2$  et  $47 \times 45 - 46^2$ . Que remarques-tu ?

b. Développe et réduis l'expression suivante :

$$(x + 1)(x - 1) - x^2$$

c. Les résultats obtenus à la question a. étaient-ils prévisibles ? Justifie.

d. Écris d'autres expressions du même style et donne leurs résultats sans poser d'opération.

## 45 Petites démonstrations

a. Que dire de la somme de deux nombres pairs ? De deux nombres impairs ? Pourquoi ?

b. La somme de deux nombres consécutifs est-elle paire ou impaire ? Justifie.

c. Que dire du produit de deux nombres pairs ? De deux nombres impairs ? De deux nombres consécutifs ? Pourquoi ?

46 On désigne par  $k$  un nombre entier. Marc, Vincent, Akim et Jules se partagent un sac de billes. Marc prend  $k$  billes. Vincent en reçoit 4 de moins que Marc. Akim a deux fois plus de billes que Marc et 8 de moins que Jules.

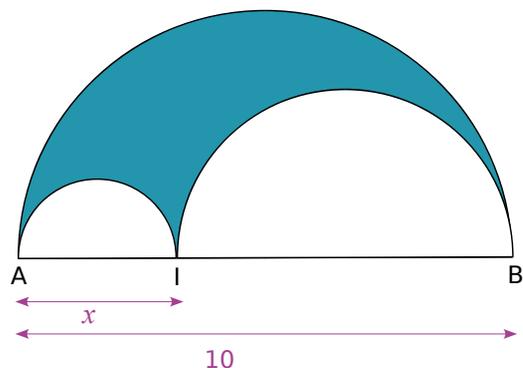
a. Calcule le nombre de billes des autres garçons si Marc en prend 7.

b. Exprime, en fonction de  $k$ , le nombre de billes des autres garçons.

c. En utilisant les expressions de la question b., déduis-en, en fonction de  $k$ , le nombre total de billes. Réduis l'expression trouvée.

d. En utilisant l'expression trouvée au c., calcule le nombre total de billes si Marc en prend 7.

## 47 Le tricerclé de Mohr



La figure ci-dessus est constituée de trois demi-cercles dont les centres appartiennent au segment  $[AB]$ .

a. Réalise cette figure pour  $x = 3$ . Dans ce cas-là, calcule la longueur de chacun des trois demi-cercles (tu donneras la valeur arrondie des résultats au dixième).

Quel est alors le périmètre de la figure bleue délimitée par les trois demi-cercles ?

b. Même question pour  $x = 8$ .

c. Que remarques-tu ?

d. Exprime, en fonction de  $x$  et de  $\pi$ , la longueur de chacun des trois demi-cercles.

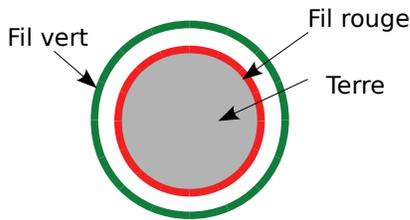
e. Déduis-en une expression du périmètre de la figure bleue en fonction de  $x$  et de  $\pi$ .

Que peux-tu dire de ce périmètre ? Justifie.

f. Utilise le résultat de la question précédente pour déterminer le périmètre de la figure bleue lorsque  $x = 1$ , puis pour  $x = 5$  et enfin pour  $x = 8,7$ .

# Exercices d'approfondissement

## 48 Tour de taille



- On veut dérouler un fil rouge autour de la Terre au niveau de l'équateur. En supposant qu'on assimile la Terre à une sphère et qu'on note  $r$  son rayon, exprime la longueur  $L_r$  du fil rouge en fonction de  $r$ .
- On veut dérouler, cette fois-ci, un fil vert à un mètre au dessus du fil rouge. Exprime la longueur  $L_v$  du fil vert en fonction de  $r$ .
- Calcule et réduis l'expression  $L_v - L_r$ . Cette expression dépend-elle du rayon ? Qu'en déduis-tu ?
- Sachant que le rayon de la Terre est d'environ 6 500 km, calcule la longueur du fil rouge puis déduis-en par une simple addition, la longueur du fil vert.

**49** Au XVII<sup>e</sup> siècle, les physiciens et les astronomes effectuaient des calculs très complexes à la main. Le mathématicien anglais Hörner a mis au point une méthode efficace pour économiser des opérations, méthode encore utilisée de nos jours en informatique.

- On considère les expressions  $A = 2x^2 + 3x - 2$  et  $B = -2 + x(3 + 2x)$ . Pour une valeur de  $x$  donnée, indique le nombre de multiplications et d'additions à effectuer pour trouver le résultat dans chacune des deux expressions. Démontre ensuite que  $A = B$ . Quel est alors l'intérêt de l'expression B par rapport à l'expression A ?
- Transforme l'expression  $C = 5x^2 - 6x - 4$  pour qu'elle contienne moins d'opérations à effectuer.
- Démontre que pour tous nombres  $a$ ,  $b$  et  $c$  :  

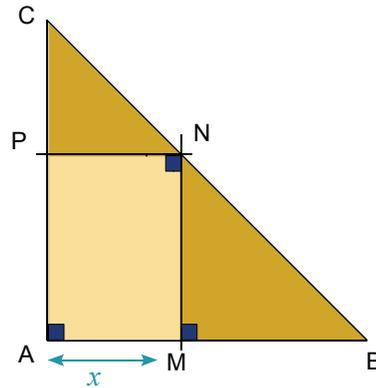
$$ax^2 + bx + c = x(ax + b) + c$$
- Transforme les expressions suivantes en utilisant plusieurs fois la même technique :  

$$D = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 1$$

$$E = 4x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 6x + 2$$
- Calcule chacune des expressions D et E de deux façons différentes pour  $x = 4$ . Quelle est la méthode la plus rapide ? Pourquoi ?

## 50 Optimisation

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A tel que  $AB = 10$  cm.



- Quelle est la nature du quadrilatère AMNP ? Justifie. Démontre que les triangles CPN et MNB sont isocèles.
- Quelles valeurs peut prendre le nombre  $x$  ?
- Exprime la longueur AP en fonction de  $x$  et déduis-en l'aire du rectangle AMNP en fonction de  $x$ .
- À l'aide d'un tableur, programme les cellules pour compléter automatiquement la feuille de calculs suivante :

	A	B	C	D	...	K	L
1	Valeur de $x$ (en cm)	0	1	2	...	9	10
2	Aire de AMNP (en cm <sup>2</sup> )				...		

- Où semble se trouver le point M quand l'aire de AMNP est maximale ? Que dire alors de cette aire par rapport à l'aire du triangle ABC ?
  - Pour quelle(s) valeur(s) de  $x$ , l'aire de AMNP est-elle égale à 10 cm<sup>2</sup> (tu donneras un encadrement à l'unité) ?
- À l'aide du tableur, affine la (les) valeur(s) de  $x$  trouvée(s) au dixième puis au centième.
- Vérifie graphiquement les résultats trouvés aux questions e. et f..

Pour cela, tu construiras un repère avec les unités suivantes :

- en abscisse : 1 cm pour une unité ;
- en ordonnée : 1 cm pour cinq unités.

Puis tu représenteras l'aire en fonction de  $x$  dans ce repère.

## 1 Des phrases et des expressions littérales

### 1<sup>re</sup> Partie : Programmes de calculs

a. Voici un programme de calculs :

- Choisir un nombre ;
- Lui ajouter 1 ;
- Multiplier le résultat par 3 ;
- Ajouter 4 au résultat.

Appliquez ce programme au nombre 2.

b. Omar a appliqué ce programme pour un certain nombre et a trouvé 28. Laura dit alors que, pour retrouver le nombre de départ, il suffit de « remonter » le programme de calculs en partant de la fin. Expliquez ce que veut dire Laura. Combien trouve-t-elle ?

c. Voici un autre programme de calculs :

- Choisir un nombre ;
- Lui ajouter 3 ;
- Multiplier le résultat par 2 ;
- Ajouter le nombre du départ ;
- Enlever 6 au résultat.

Appliquez ce programme au nombre 5.

d. La méthode de Laura fonctionne-t-elle encore ? Pourquoi ?

e. Marc a trouvé une méthode pour trouver directement le nombre de départ, connaissant le résultat de la fin du programme. Expliquez cette méthode.

f. Construisez quatre programmes différents (dont au moins deux comme le programme de la question c.) qui transforment un nombre en un nombre quatre fois plus grand.

### 2<sup>e</sup> Partie : En français dans le texte

Avant l'invention de l'algèbre, les mathématiciens utilisaient le langage courant pour écrire certaines propriétés, on pouvait énoncer la règle suivante :

« Soit un nombre entier. Si on ajoute le nombre qui le précède et le nombre qui le suit, on obtient le double du nombre ».

g. En appelant  $n$  le nombre, écrivez une égalité qui traduit cette phrase.

h. Procédez de la même façon pour le texte suivant : « La différence des carrés de deux nombres entiers consécutifs est égale au double du plus petit augmenté de 1. ».

i. Développez et réduisez :  $(x - 1)(x + 1)$   
Chaque membre du groupe écrit en français un texte décrivant l'égalité obtenue.

j. Comparez vos textes. Écrivez ensemble celui qui vous paraît le plus clair.

## 2 Le Mistigri des expressions littérales

### 1<sup>re</sup> Partie : Préparation du jeu

a. On commence par préparer un jeu de vingt et une cartes. Sur chaque carte est écrit une expression ci-dessous :

$3x(2x - 5)$	$5(x - 3)$	$(x - 1)(x + 2)$
$(x - 3)(x - 2)$	$5(x - 5)$	$7x + 14$
$3x - (2x - 1)$	$x - (x + 1)$	$4(3x^2 - 2x + 1)$
$x^2 + x - 2$	$x^2 - 5x + 6$	$7(x + 2)$
$x + 1$	$6x^2 - 15x$	$x^2 - 1$
$(x + 1)(x - 1)$	$12x^2 - 8x + 4$	$5x - 15$
$5x - 25$	$x^2 + 1$	$-1$

b. Préparez ensemble une feuille contenant côte à côte les expressions qui sont égales. Une expression n'est égale à aucune autre : c'est le Mistigri. La feuille servira de référence en cas de désaccord pendant la partie mais elle devra rester cachée. Les joueurs n'ont pas le droit de l'utiliser.

### 2<sup>e</sup> Partie : On joue

c. Un joueur distribue toutes les cartes en commençant par son voisin de gauche.

d. Chaque joueur regarde dans son jeu s'il possède une paire, autrement dit deux cartes comportant des expressions égales. Tout au long de la partie, si un joueur a une paire, il l'écarte de son jeu en la posant face visible sur la table. Les autres joueurs vérifient que la paire est correcte.

e. Le donneur prend une carte au hasard au joueur qui est à sa gauche, puis regarde s'il possède une nouvelle paire qu'il écarte alors de son jeu. Puis le joueur à la droite du donneur prend une carte au hasard au donneur et ainsi de suite.

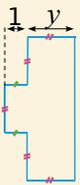
f. Le gagnant est le joueur qui se débarrasse le premier de toutes ses cartes. Le perdant est celui qui a le mistigri en main lorsque toutes les paires ont été formées.

Remarque : il est fortement conseillé aux joueurs de s'aider d'un brouillon.

### 3<sup>e</sup> Partie : Fabrication d'un nouveau jeu

g. À vous maintenant de créer un jeu de Mistigri sur le même principe que précédemment mais avec d'autres expressions.

h. Jouez avec votre jeu mais cette fois-ci sans utiliser de feuille contenant les « paires ». À la fin de votre partie, échangez votre jeu avec un autre groupe avant de rejouer.

		R1	R2	R3	R4
1	Pour $x = -2$ , $3x + 5$ vaut...	- 1	11	- 11	6
2	Lorsqu'on substitue - 3 à $x$ dans $x^2 - 5x$ , on obtient...	$-3^2 - 5 - 3$	$(-3)^2 - 5 \times (-3)$	$x^2 - 5 \times (-3)$	$-3^2 - 5 \times -3$
3	L'expression $n - 5n$ est égale à...	$-5n^2$	$n(1 - 5)$	on ne peut pas la réduire	$-4n$
4	L'expression $4x(x - 2)$ est...	une différence	une forme factorisée de $4x^2 - 8x$	la forme réduite de $4x^2 - 8x$	égale à $4x \times x - 2$
5	$15a^2 - 5a$ est égale à...	$5(3a^2 - a)$	$15(a^2 - 5a)$	$5a(3a - 1)$	$5a(3a - 5)$
6	La forme réduite de $15 - 4x - 5 + 2x$ est...	$10 - 6x$	$-2x + 10$	$8x$	$-2x - 20$
7	La forme réduite de $3(x - 2) - (-3x + 8)$ est...	2	$6x + 2$	$6x - 14$	$6x^2 - 14$
8	La forme réduite de $(-b + 5) - 2(4 - 3b)$ est...	$5b - 3$	$-7b$	$-7b - 3$	$-4b - 3$
9	La forme développée de $(5x - 2)(2x - 3)$ est...	$10x^2 - 12x - 6$	$10x - 15x - 4x - 6$	$10x^2 - 19x + 6$	$10x^2 - 11x + 6$
10	Le produit du double d'un nombre $t$ et de son triple peut s'écrire...	$t^2 \times t^3$	$5t$	$2t \times 3t$	$6t$
11	« Choisir un nombre $x$ , faire la somme de son quotient par 3 et de 2 et multiplier le tout par 5 ».	$x + \frac{3}{2} \times 5$	$\frac{x}{3} + 2 \times 5$	$\frac{5(x+2)}{3}$	$5\left(\frac{x}{3} + 2\right)$
12	Cette figure constituée de rectangles est la base d'un prisme droit de hauteur $y$ . 	Son aire, en fonction de $y$ , est $3y^2 + y$	Son périmètre, en fonction de $y$ , est $8y$	Son aire, en fonction de $y$ , est $3y(y + 1) - 2y$	Le volume, en fonction de $y$ , du prisme droit est $3y^3 + y^2$

## Récréation mathématique

### Mentalement !

Calcule  $1\ 234\ 567\ 895 \times 1\ 234\ 567\ 892 - 1\ 234\ 567\ 890 \times 1\ 234\ 567\ 896...$  sans calculatrice !

### Magique ?

Un magicien demande à une personne du public de choisir un nombre entier, de l'augmenter de un, d'élever le résultat au carré, puis de retirer au nombre obtenu le produit du nombre de départ par son suivant augmenté de un. Le magicien se concentre et annonce le résultat : « 1 ! ». Mais est-ce vraiment magique ?



### Petite démonstration...

Si on soustrait à un nombre la somme de ses chiffres, alors on obtient un multiple de 9 ! Vérifie-le sur des exemples numériques. Démontre-le dans les cas de nombres à deux chiffres puis trois...

### Inflation dans un carré !

On augmente de 5 cm la longueur du côté d'un carré. Les augmentations de son périmètre et de son aire dépendent-elles de la longueur initiale du côté du carré ?