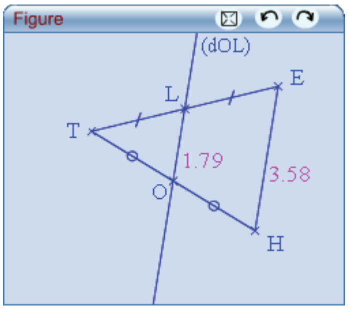
Triangles et parallèles

G2

Activité 1 : Un triangle et deux milieux



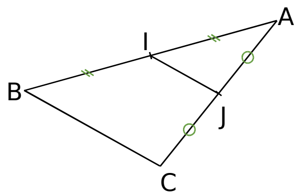
1. Conjecture avec TracenPoche

a. Construis un triangle THE.
En utilisant le bouton , place le point O milieu de [TH] et le point L milieu de [TE].
Trace la droite (OL).
À l'aide du bouton , fais apparaître les longueurs des segments [OL] et [HE].

b. Déplace les sommets du triangle et note, sur ton cahier, les longueurs OL et HE pour quatre triangles différents. Que remarques-tu ?

c. Déplace les sommets du triangle. Comment semblent être les droites (OL) et (HE) ?
Dans la fenêtre *Analyse*, saisis : « position(OL,HE) = » puis appuie sur la touche F9.
Déplace à nouveau les sommets du triangle. Qu'indique Tracenpoche ?

2. Démonstration



a. Trace un triangle ABC, place I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC].
On souhaite montrer que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles et que la longueur du segment [IJ] est égale à la moitié de celle du segment [BC].

b. Construis le point K symétrique de I par rapport à J. Montre que le quadrilatère AKCI est un parallélogramme. Que peux-tu en déduire pour les droites (KC) et (AI) ? Pour les segments [KC] et [AI] ?

c. Que peux-tu dire des segments [AI] et [IB] ? En utilisant le fait que les points A, I et B sont alignés et la question **b.**, que peux-tu dire des segments [IB] et [KC] ? Montre que le quadrilatère IKCB est un parallélogramme.

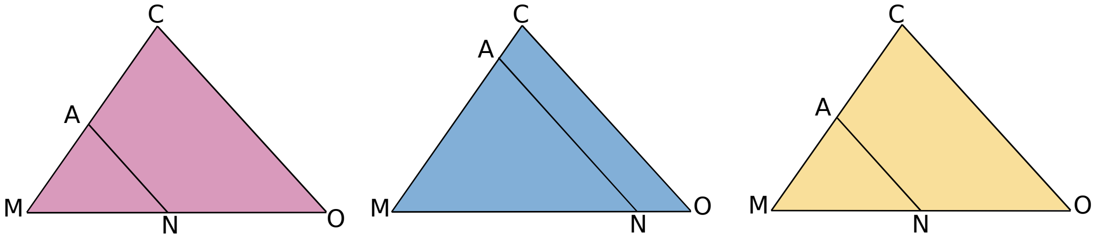
d. Déduis-en que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles. Montre que IJ = $\frac{1}{2}$ BC.

e. Écris les deux propriétés que tu viens de démontrer.

Activité 2 : Dans l'autre sens

1. Écris le théorème réciproque du théorème suivant : "Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté.".

2. Observe les figures suivantes, pour chacune d'elles (AN) et (CO) sont parallèles. Le théorème réciproque écrit à la question **1.** semble-t-il vérifié ?

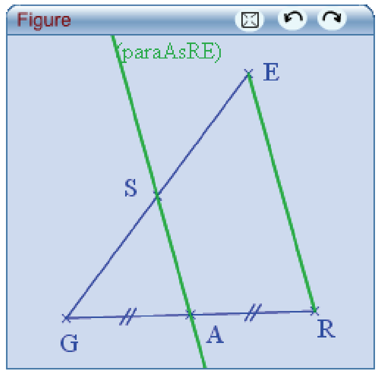


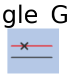
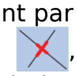
3. Peux-tu faire une figure sur laquelle A est le milieu de [MC], les droites (AN) et (CO) sont parallèles mais N n'est pas le milieu de [MO] ?

4. Quelle donnée faut-il ajouter pour que ce théorème soit vrai ?

Activité 3 : Un triangle, un milieu et des parallèles

1. Conjecture avec TracenPoche

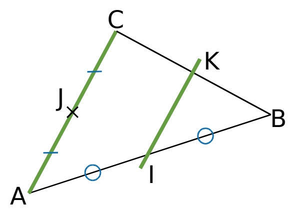


a. Construis un triangle GRE et A milieu de [GR]. En utilisant le bouton  construis la droite parallèle au segment [RE] passant par le point A.
À l'aide du bouton , nomme S le point d'intersection de cette droite avec [GE].
À l'aide du bouton , fais apparaître les longueurs des segments [GS] et [SE].

b. Déplace les sommets du triangle et observe la position du point S. Que constates-tu ?

2. Démonstration

a. Trace un triangle ABC, place le point I milieu du côté [AB] et le point J milieu du côté [AC]. La parallèle au côté [AC] passant par I coupe le côté [BC] en K.
Le but est de montrer que le point K est le milieu du côté [BC].



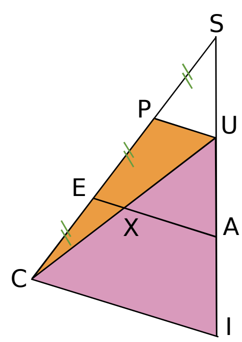
b. Montre que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles et IJ = $\frac{BC}{2}$.

c. Montre que IJCK est un parallélogramme.

d. Déduis-en que IJ = KC puis que K est le milieu de [BC].

e. Écris la propriété que tu viens de démontrer.

Activité 4 : Et avec le tiers ?



1. Reproduis la figure ci-contre, avec SC = 9 cm ; SI = 6,3 cm et telle que les droites (PU), (EA) et (CI) sont parallèles.

2. Mesure les segments [SU], [UA] et [AI]. Que remarques-tu ?

3. Démonstration

a. En te plaçant dans le triangle SEA, montre que le point U est le milieu du segment [SA].

b. On appelle X le point d'intersection des segments [EA] et [CU]. En te plaçant dans le triangle PUC, montre que X est le milieu du segment [CU].

c. En te plaçant dans le triangle UCI, montre que le point A est le milieu du segment [UI].

d. Que peux-tu alors affirmer pour les longueurs SU, UA et AI ?

4. Une autre écriture

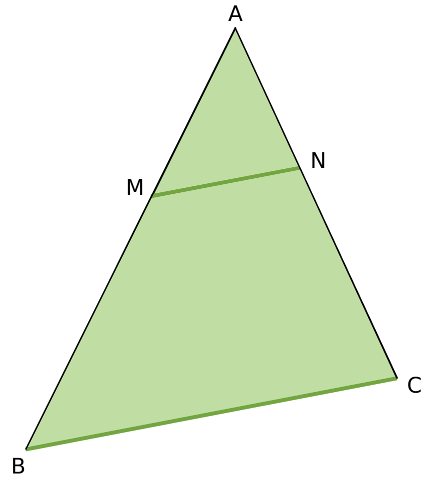
a. Quelle fraction de la longueur SC représente la longueur SP ?

b. Donne alors les valeurs exactes des rapports $\frac{SP}{SC}$ et $\frac{SU}{SI}$.

c. Que peux-tu dire des rapports $\frac{SP}{SC}$ et $\frac{SU}{SI}$?

Activité 5 : Un cas plus général

1. Sur la figure ci-contre, le point M appartient au segment [AB], N appartient au segment [AC] et les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



a. En mesurant les longueurs des segments [AM] et [AB], donne la valeur du rapport $\frac{AM}{AB}$.

b. Mesure les segments [AN] et [AC] puis donne la valeur du rapport $\frac{AN}{AC}$.

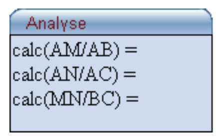
c. Mesure les segments [MN] et [BC] puis donne la valeur de $\frac{MN}{BC}$.

d. Que constates-tu ? Pouvais-tu prévoir ce résultat ?

2. Que dit Tracenpoche ?

a. Construis un triangle ABC. À l'aide du bouton , place un point M sur le segment [AB]. Construis la droite parallèle au côté [BC] passant par M. Appelle N le point d'intersection de cette parallèle et du côté [AC].

b. Dans la fenêtre *Analyse*, saisis les expressions ci-contre puis appuie sur la touche F9. Quels calculs sont effectués ? Que permettent-ils de conjecturer ?



c. Déplace les points de la figure de manière à faire varier le rapport $\frac{AM}{AB}$. Que constates-tu pour les autres rapports ?

Activité 6 : Le même dessin... à un détail près !

1. On considère un triangle POT tel que $\widehat{POT} = 47°$, $\widehat{PTO} = 33°$ et $\widehat{TPO} = 100°$.

a. Ce triangle est-il constructible ? Justifie ta réponse.

b. Construis-le et compare ton dessin avec celui de ton voisin. Sont-ils identiques ?

c. Avec ton voisin, complète le tableau suivant :

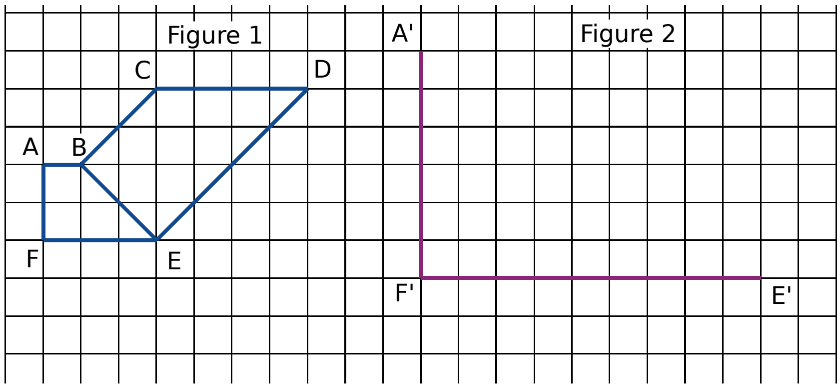
	PO	OT	TP
Longueur des côtés de ton triangle			
Longueur des côtés du triangle de ton voisin			

d. Est-ce un tableau de proportionnalité ?

2. Que dois-tu vérifier pour dire qu'une figure est un agrandissement ou une réduction d'une autre figure ?

Activité 7 : Agrandissements et réductions

1. La figure 2 est le début d'un agrandissement de la figure 1.
Reproduis la figure 2 et complète-la. Tu la nommeras A'B'C'D'E'F'.



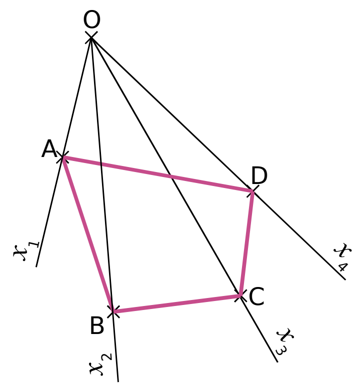
2. Étude des mesures d'angles

a. Mesure $\widehat{EDC}$ et $\widehat{E'D'C'}$. Compare-les.
Que peux-tu en déduire sur l'agrandissement ?

b. Quelles sont les mesures des angles $\widehat{CBE}$ et $\widehat{C'B'E'}$? Compare-les. Qu'en déduis-tu sur l'agrandissement ?

3. Donne les positions relatives des droites (BC) et (DE) puis des droites (B'C') et (D'E'). Qu'en déduis-tu sur l'agrandissement ?

Activité 8 : Prenons de la hauteur



1. Pour obtenir une figure semblable à celle ci-contre, place un point O puis trace quatre demi-droites d'origine O : [Ox_1) ; [Ox_2) ; [Ox_3) et [Ox_4). Place un point A sur [Ox_1) tel que OA = 2 cm. Place des points B, C et D sur les demi-droites [Ox_2) ; [Ox_3) et [Ox_4).

2. Place un point A' sur [Ox_1) tel que OA' = 7 cm.

3. Construction de la figure

a. Trace la parallèle à (AB) passant par A'. Elle coupe [Ox_2) en B'. Trace la parallèle à (BC) passant par B'. Elle coupe [Ox_3) en C'. Trace la parallèle à (DC) passant par C'. Elle coupe [Ox_4) en D'. On admettra par la suite que les droites (AD) et (A'D') sont parallèles.

b. Comment semblent être les quadrilatères ABCD et A'B'C'D' ?

4. Étude de la figure

a. Exprime sous la forme d'une fraction le rapport $\frac{OA}{OA'}$. Déduis-en les rapports $\frac{OB}{OB'}$; $\frac{AB}{A'B'}$ et $\frac{AD}{A'D'}$. Justifie.

b. Procède de la même façon pour les rapports $\frac{OC}{OC'}$ et $\frac{BC}{B'C'}$; $\frac{OD}{OD'}$ et $\frac{DC}{D'C'}$.

c. Qu'en déduis-tu pour la figure A'B'C'D' ?

I - Les différentes formes du théorème des milieux

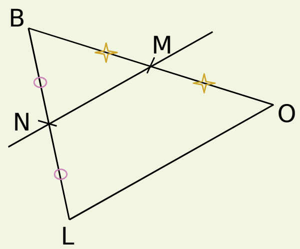
A - Montrer que des droites sont parallèles

→ ex 1

Théorème

Si, dans un **triangle**, une droite passe par les **milieux** de deux côtés du triangle alors elle est **parallèle** au troisième côté.

Exemple : Soit la figure codée ci-dessous. Démontre que la droite (MN) est parallèle à la droite (OL).

	Données	Propriété	Conclusion
	Les codages nous permettent d'affirmer que, dans le triangle BOL, M est le milieu du segment [BO] et N est le milieu du segment [BL].	Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté.	La droite (MN) est ainsi parallèle au troisième côté du triangle, donc (MN) est parallèle à (OL).

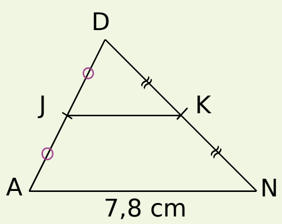
B - Calculer une longueur connaissant des milieux

→ ex 2 à 3

Théorème

Si, dans un **triangle**, un segment joint les **milieux** de deux côtés alors sa longueur est **égale à la moitié** de celle du troisième côté.

Exemple : On donne la figure codée ci-dessous. Calcule la longueur JK.

	Données	Propriété	Conclusion
	Les codages nous permettent d'affirmer que, dans le triangle DAN, J et K sont les milieux respectifs des côtés [DA] et [DN] et que AN = 7,8 cm.	Si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.	Le segment [JK] a donc pour longueur la moitié de celle du troisième côté [AN] : $JK = \frac{AN}{2} = \frac{7,8}{2} = 3,9$. Donc JK = 3,9 cm.

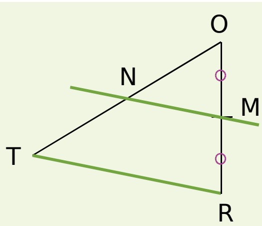
C - Montrer qu'un point est le milieu d'un segment

→ ex 4

Théorème

Si, dans un **triangle**, une droite passe par le **milieu** d'un côté et est **parallèle** à un deuxième côté alors elle passe par le **milieu** du troisième côté.

Exemple : Soit TOR un triangle tel que M soit le milieu du côté [RO]. La parallèle à (TR) passant par M coupe le côté [OT] en N. Démontre que N est le milieu du côté [OT].

	Données	Propriété	Conclusion
 les droites en vert sont parallèles entre elles	Dans le triangle TOR, on sait que M est le milieu du côté [RO] et que la droite (MN) est parallèle à la droite (TR).	Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors elle passe par le milieu du troisième côté.	La droite (MN) coupe le troisième côté [OT] du triangle en son milieu, donc N est le milieu du côté [OT].

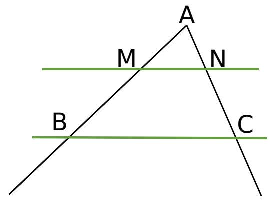
II - Proportionnalité des longueurs dans le triangle

A - Énoncé

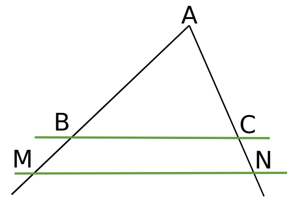
Théorème

Si, dans un triangle ABC, M est un point de la demi-droite [AB), N un point de la demi-droite [AC) et les droites **(MN) et (BC) sont parallèles**

alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.



ou



Remarques :

- On appelle parfois cette propriété la (petite) propriété de Thalès.
- Lorsque ce théorème s'applique, le tableau suivant est un tableau de proportionnalité.

Longueurs des côtés du triangle ABC	AB	AC	BC
Longueurs des côtés du triangle AMN	AM	AN	MN

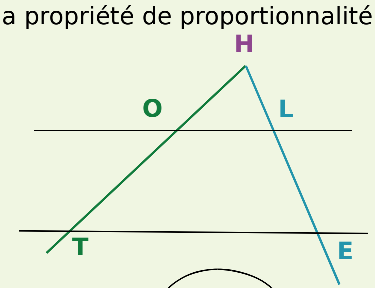
B - Calcul d'une longueur avec des rapports égaux

ex 5

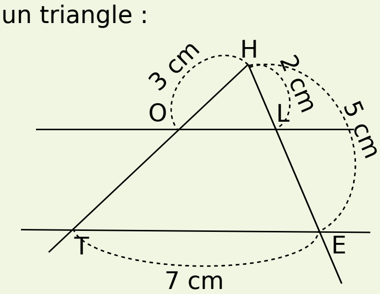
Exemple 1 : Sur la figure suivante, les droites (OL) et (TE) sont parallèles. O et L appartiennent respectivement aux demi-droites [HT) et [HL). On donne HE = 5 cm, HL = 2 cm, TE = 7 cm et HO = 3 cm. Calcule les longueurs HT et OL.

Dans le triangle HTE : **O** ∈ [HT], **L** ∈ [HE] et (OL) // (TE).

D'après la propriété de proportionnalité des longueurs dans un triangle :



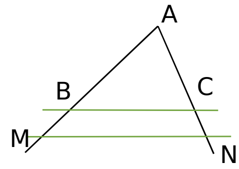
$$\frac{HO}{HT} = \frac{HL}{HE} = \frac{OL}{TE}$$



soit $\frac{3}{HT} = \frac{2}{5} = \frac{OL}{7}$

- D'une part, 2 × **HT** = 3 × 5 soit **HT** $= 3 \times \frac{5}{2} = 7{,}5$ donc **HT** = 7,5 cm.
- D'autre part, 5 × **OL** = 2 × 7 soit **OL** $= 2 \times \frac{7}{5} = 2{,}8$ donc **OL** = 2,8 cm.

Exemple 2 : Sur la figure suivante, les droites (BC) et (MN) sont parallèles. M et N appartiennent respectivement aux demi-droites [AB) et [AC). On donne AB = 2 cm, AC = 3 cm, BC = 4 cm et AM = 5 cm.
Calcule les longueurs AN et MN.



Dans le triangle AMN : B ∈ [AM], C ∈ [AN] et (BC) // (MN).

D'après la propriété de proportionnalité des longueurs dans un triangle, le tableau suivant est un tableau de proportionnalité. On le remplit avec les valeurs connues (données dans l'énoncé) et on détermine les longueurs demandées en remarquant que AM = 2,5 × AB.

Donc on passe des longueurs des côtés du triangle ABC aux longueurs des côtés du triangle AMN en multipliant par 2,5.

Longueurs des côtés du triangle ABC	AC = 3 cm	AB = 2 cm	BC = 4 cm	× 2,5
Longueurs des côtés du triangle AMN	**AN = 2,5 × 3 cm**	AM = 5 cm	**MN = 2,5 × 4 cm**	

Ainsi, on obtient : **AN = 7,5 cm** et **MN = 10 cm**.

III - Agrandissement, réduction dans le plan

A - Définitions

→ ex 6

Définitions

Quand deux figures F et F' ont la **même forme** et que les **longueurs des côtés de F' sont proportionnelles aux longueurs des côtés de F**, on dit que :

- F' est un agrandissement de F si le coefficient de proportionnalité est supérieur à 1 ;
- F' est une réduction de F si le coefficient de proportionnalité est inférieur à 1.

Ce coefficient est appelé **rapport d'agrandissement ou de réduction**.

Remarque : Si F est un agrandissement de F' de rapport k (non nul) alors F' est une réduction de F de rapport $\frac{1}{k}$.

Exemple : Ce casse-tête est un cube constitué de plusieurs petits cubes de différentes couleurs.
Chaque petit cube est-il une réduction du casse-tête ?
Si oui, précise le rapport de cette réduction.

Chaque petit cube et le casse-tête ont la même forme : un cube. Comme chaque petit cube est plus petit que le casse-tête, alors chaque petit cube est bien une réduction du casse-tête.

Le côté du casse-tête contient trois petits cubes donc le rapport de réduction est $\frac{1}{3}$.

Remarque : Le casse-tête est un agrandissement de chaque petit cube de rapport 3.

B - Propriété

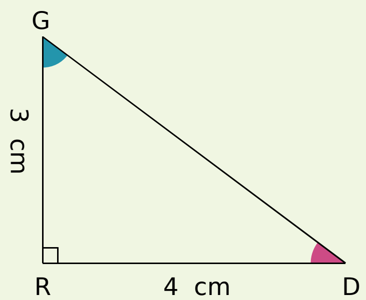
→ ex 7 et 8

Propriété

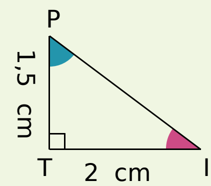
Dans un agrandissement ou une réduction les **mesures des angles**, la **perpendicularité** et le **parallélisme** sont conservés.

Exemple 1 : Calcul des longueurs dans une réduction

Le triangle GRD est rectangle en R tel que GR = 3 cm et RD = 4 cm. Le triangle PTI est une réduction de rapport 0,5 du triangle GRD, tel que l'angle $\widehat{PTI}$ soit la réduction de l'angle $\widehat{GRD}$.
Quelle est la nature du triangle PTI ? Calcule TP et TI.

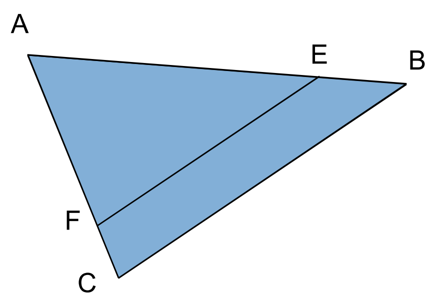


Comme PTI est une réduction de GRD de rapport 0,5 alors les mesures des angles sont conservées donc $\widehat{PTI} = \widehat{GRD} = 90°$.
Le triangle PTI est donc rectangle en T.
De plus, ses dimensions sont 0,5 fois celles du triangle GRD.
On en déduit alors que :
TP = 0,5 × RG = 0,5 × 3 = 1,5 soit TP = 1,5 cm et
TI = 0,5 × RD = 0,5 × 4 = 2 soit TI = 2 cm.



Exemple 2 : Déterminer si une figure est un agrandissement ou une réduction

Dans la figure ci-dessous, on donne les mesures suivantes :
AB = 6 cm, AC = 4 cm, BC = 5 cm, AF = 2,8 cm, AE = 4,2 cm et EF = 3,5 cm.
Le triangle AEF est-il une réduction du triangle ABC ?



Les figures AEF et ABC ont la même forme, on calcule donc les rapports :

$\frac{AE}{AB} = \frac{4,2}{6} = 0,7$

$\frac{AF}{AC} = \frac{2,8}{4} = 0,7$

$\frac{EF}{BC} = \frac{3,5}{5} = 0,7$

Les trois rapports sont égaux donc le triangle AEF est une réduction du triangle ABC.

Remarque : Les côtés du triangle AEF étant proportionnels aux côtés du triangle ABC, on peut les mettre dans un tableau de proportionnalité. On retrouve ainsi la proportionnalité des longueurs dans le triangle de la **partie II**.

Exercices corrigés par animation

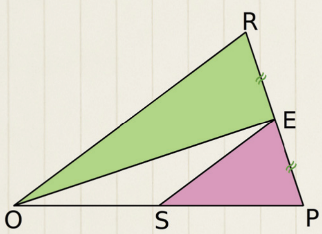
http://manuel.sesamath.net

1 ABCD est un parallélogramme de centre O. On appelle M le milieu de [AB] et N le milieu de [DC].
Démontre que (OM) est parallèle à (BC).

2 Soit ABC un triangle. E est le symétrique de A par rapport à B et F est le symétrique de A par rapport à C.
Démontre que $BC = \frac{EF}{2}$.

3 Deux cercles de rayons respectifs 3 cm et 4 cm et de centres respectifs O et O' distants de 5 cm, se coupent en deux points A et B. On trace le diamètre [AC] de l'un et le diamètre [AD] de l'autre.
Calcule la longueur CD.

4 Sur la figure ci-dessous, les droites (ES) et (RO) sont parallèles.
Démontre que S est le milieu de [OP].



5 Dans le triangle DST, E est un point de [DS] et F un point de [DT] tel que DS = 6,3 cm ; EF = 2,9 cm ; ST = 8,7 cm et DF = 1,8 cm. De plus, (EF) et (ST) sont parallèles.
Calcule DE et DT.

6 Le triangle BEC est une réduction de rapport 0,75 du triangle TOP de côtés 3,6 cm ; 5,2 cm et 7,2 cm.
Donne les longueurs du triangle BEC puis construis-le.

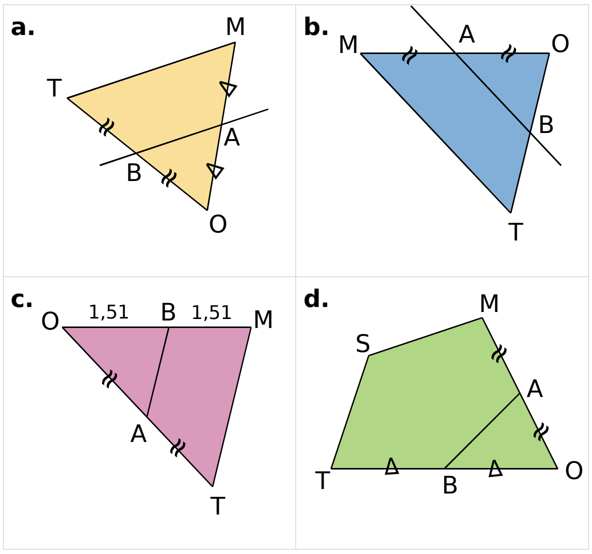
7 Donne les dimensions d'un agrandissement de rapport 2,5 du triangle PAS tel que :
$\widehat{APS} = 100°$, $\widehat{SAP} = 50°$ et PA = 3 cm.

8 Soit un rectangle BLEU de longueur 5 cm et de largeur 4 cm. Soit ROSE une réduction de BLEU de rapport $\frac{3}{5}$.
Quelle est la nature du quadrilatère ROSE ? Justifie ta réponse puis construis ROSE.

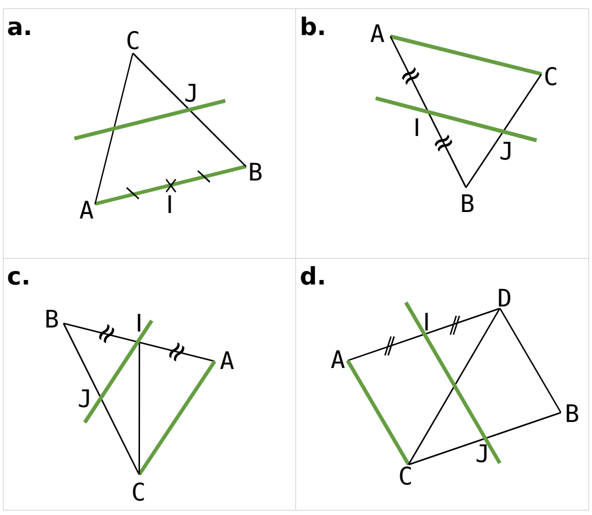
Tous ces exercices sont corrigés à la fin du manuel.
Corrections animées sur http://manuel.sesamath.net

Théorèmes des milieux

1 Dans quelle(s) figure(s) peux-tu démontrer que les droites (AB) et (MT) sont parallèles ? Justifie tes réponses.



2 Dans quelle(s) figure(s) peux-tu démontrer que le point J est le milieu de [BC] ? Justifie tes réponses.
Les droites vertes sont parallèles.



3 Construis le triangle TOC tel que TO = 5,8 cm ; TC = 4,3 cm et $\widehat{CTO} = 55°$.
Place les points A et B milieux respectifs des côtés [OT] et [OC].

Calcule la longueur AB en justifiant clairement la démarche utilisée.

4 Dans chaque cas, en t'aidant d'un dessin à main levée, recopie et complète les démonstrations suivantes :

a. Dans le triangle HLP, on sait que E est le milieu de [HL] et S est le milieu de [HP].
Or si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté.
Donc ... .

b. Dans le triangle AMI, on sait que T est le milieu de [AM] et ...
Or si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté alors elle coupe le troisième côté en son milieu.
Donc U est le milieu de [AI].

c. Dans le triangle POT, on sait que I est le milieu de [PO] et N est le milieu de [PT].
Or si ...

Donc IN = $\dfrac{OT}{2}$.

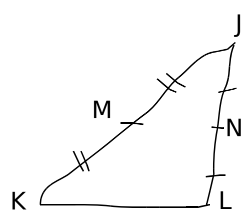
5 Anita doit montrer que le point R est le milieu du segment [CD]. Voici ce qu'elle a écrit :

« Dans le triangle ECD, on sait que P est le milieu de [CE], que R est un point de [CD] et que (PR) et (ED) sont parallèles.
Or si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté. Donc R est le milieu de [CD]. ».

Que penses-tu du raisonnement d'Anita ? Corrige-le si tu estimes que cela est nécessaire.

6 Observe le dessin de Paul. Dans le triangle KJL, il veut montrer que les droites (KL) et (MN) sont parallèles.

À l'aide du codage du dessin, rédige une démonstration.



7 RST est un triangle tel que RS = 8 cm, RT = 6 cm et TS = 7 cm. P est le milieu de [RT] et F est le milieu de [TS].

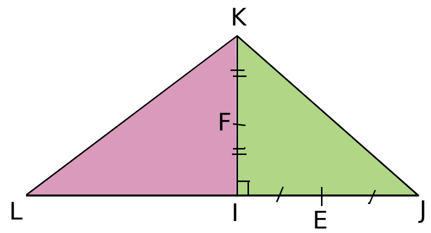
a. Fais un dessin à main levée et code-le.

b. Montre que (RS) et (PF) sont parallèles.

c. Calcule PF en justifiant la démarche utilisée.

Exercices d'entraînement

8 Le professeur a donné un exercice à faire à la maison avec le dessin suivant mais Rafiq n'a pas eu le temps de tout noter et a juste écrit à côté de son dessin : (FE) ? FE ?



a. Saurais-tu retrouver les questions posées par le professeur ?

b. À toi maintenant de résoudre cet exercice.

9 AOR est un triangle rectangle en O tel que AO = 5 cm et OR = 3,5 cm. Soit L le milieu de [AO] et S le milieu de [AR].

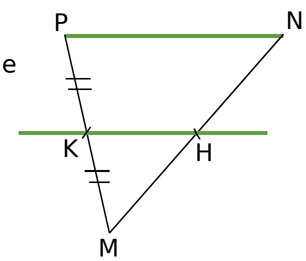
a. Fais un dessin en vraie grandeur et code-le.

b. Montre que (LS) est parallèle à (OR).

c. Déduis-en que (LS) est perpendiculaire à (AO).

10 Les droites vertes sont parallèles.

Démontre que H est le milieu de [MN].



11 ABC est un triangle tel que AC = 6 cm ; AB = 4 cm et BC = 3,5 cm. ACD est le triangle tel que AD = 5 cm ; CD = 4 cm et B et D ne sont pas du même côté de la droite (AC). E est le milieu de [AB] et F est le milieu de [AC]. La parallèle à (CD) passant par F coupe (AD) en G.

a. Fais un dessin en vraie grandeur et code-le.

b. Montre que (EF) est parallèle à (BC).

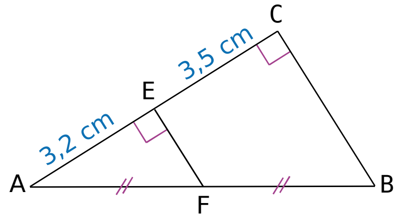
c. Montre que G est le milieu de [AD].

d. Montre que (EG) et (BD) sont parallèles.

e. Calcule les longueurs EF et FG. Justifie.

f. Calcule le périmètre de AEFG.

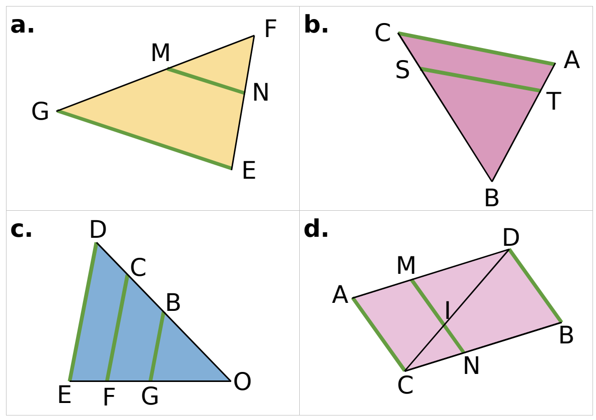
12 Jonathan a construit la figure suivante :



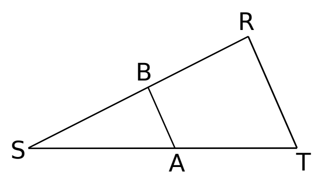
Explique pourquoi sa figure est fausse.

Proportionnalité dans le triangle

13 Écris toutes les égalités des rapports de longueurs dans chacun des cas suivants. Les droites vertes sont parallèles.



14 Sur la figure ci-dessous, les droites (AB) et (TR) sont parallèles. On donne SA = 4 cm ; ST = 15 cm ; AB = 2,4 cm et SR = 7,5 cm.



a. Reporte les données sur un croquis.

b. Pour calculer SB et RT, recopie et complète :

Dans le triangle ... , on sait que A ∈ [ST], B ∈ [...] et (AB) // (...) donc d'après la proportionnalité des longueurs dans un triangle :

$\frac{SA}{...} = \frac{...}{SR} = \frac{...}{...}$ soit $\frac{4}{...} = \frac{...}{7,5} = \frac{...}{...}$.

Termine la démonstration pour calculer SB et RT.

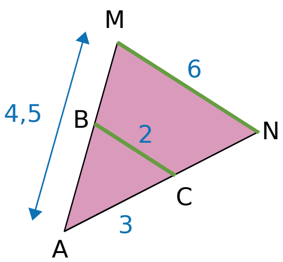
15 Construis le triangle OAB tel que OA = 6 cm ; OB = 9 cm et AB = 4,5 cm. Place sur [OA] le point E tel que OE = 5 cm.
La parallèle à la droite (AB) passant par E coupe (OB) en F.

a. Trace en couleur les droites parallèles. Écris les égalités des rapports de longueurs.

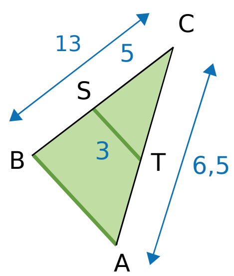
b. Calcule EF et OF.

16 Dans chacun des cas suivants, les droites vertes sont parallèles.

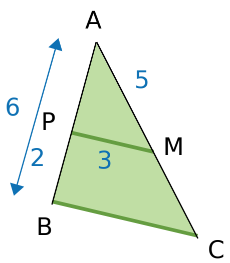
a. Calcule AN et AB.



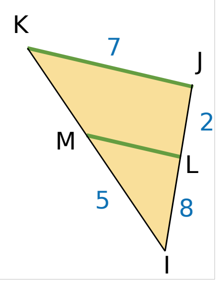
b. Calcule CT et AB.



c. Calcule AC et BC.



d. Calcule IK, MK et LM.



17 Soit un parallélogramme SAIN tel que SA = 2,8 cm ; SN = 4 cm et $\widehat{ASN} = 40°$. Le point M appartient à [NS] tel que NM = 7 cm. La droite (MA) coupe la droite (NI) en T.

a. Construis la figure.

b. Calcule NT.

c. Déduis-en IT.

18 Construis un triangle ABC rectangle en B tel que AB = 4 cm ; BC = 3 cm et AC = 5 cm. Sur la demi-droite [BA), place le point E tel que BE = 8,8 cm.
Trace la droite parallèle à (AC) passant par E, elle recoupe la droite (BC) en F.

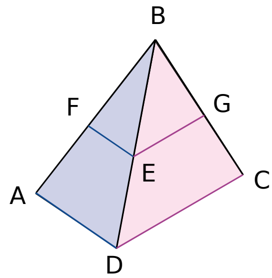
a. Calcule EF.

b. Calcule BF.

19 Sur la figure ci-dessous : EF = 3 cm ; BG = 4 cm et GC = 2 cm.
Les droites (FE) et (AD) sont parallèles et les droites (EG) et (DC) sont parallèles.

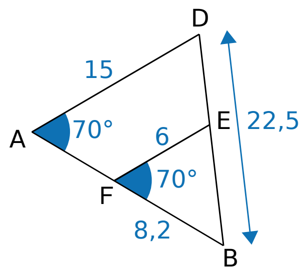
a. Calcule $\frac{BE}{BD}$.

b. Déduis-en AD.



20 On considère la figure suivante :

Calcule BE et AB.

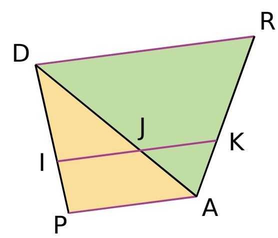


21 Construis un parallélogramme ABCD tel que AB = 6 cm ; AD = 4 cm et BD = 5 cm.
Place un point O sur [BD] tel que BO = 2 cm.
Construis la parallèle à (AB) passant par O, elle coupe la droite (BC) en P.

a. Calcule BP.

b. Calcule OP.

22 On considère le trapèze DRAP tel que : (AP) soit parallèle à (DR) et à (IJ), AP = 32 mm ; DR = 48 mm ; DA = 45 mm ; DI = 15 mm et IP = 5 mm. Les points I, J et K sont alignés.



a. Calcule IJ.

b. Calcule DJ.

c. Calcule la valeur exacte de $\frac{AJ}{AD}$.

d. Déduis-en JK.

23 Construis le triangle FOT tel que FO = 6 cm ; OT = 8 cm et FT = 5,6 cm.

Place le point R sur [FO) tel que FR = $\frac{5}{4}$ FO.

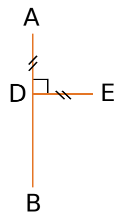
La parallèle à la droite (OT) passant par R coupe (FT) en E.

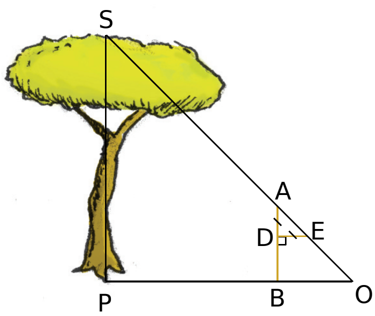
a. Calcule RE.

b. Calcule TE.

24 *Mesurer des hauteurs inaccessibles*

L'instrument de Gerbert est constitué de deux bâtons [AB] et [ED] perpendiculaires tels que AD = ED.
Soit S le sommet de l'arbre. Pour mesurer sa hauteur, il faut se placer de telle sorte que les points S, A et E soient alignés.





On veut mesurer la hauteur SP de l'arbre (on considérera qu'il est perpendiculaire au sol).

L'instrument est planté verticalement, c'est-à-dire que (AB) est perpendiculaire à (OB). On sait que AD = 0,40 m ; AB = 1,50 m et BP = 8 m.
Le triangle ADE est rectangle et isocèle en D.

a. Calcule la distance OB. Déduis-en la nature du triangle ABO.

b. Démontre que (AB) et (SP) sont parallèles.

c. Démontre que le triangle SPO est rectangle isocèle en P.

d. Déduis-en la hauteur SP de l'arbre.

e. Quelles sont les seules mesures utiles pour utiliser l'instrument de Gerbert, une fois bien positionné comme sur le dessin ?

f. Quel calcul doit-on faire pour trouver la hauteur de l'objet ?

Agrandissements et réductions

25 *Reconnaître une situation de réduction ou d'agrandissement*

Parmi les images ci-dessous, quelles sont celles qui sont des réductions, des agrandissements de l'arbre ci-contre et celles qui ne sont ni l'une ni l'autre ?

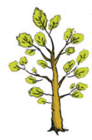


Fig 1


Fig 2

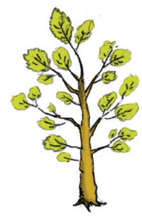


Fig 3

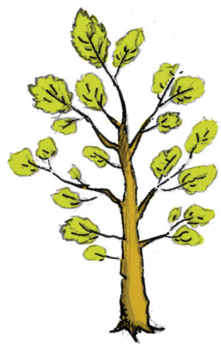


Fig 4

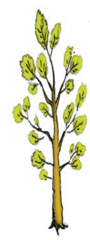
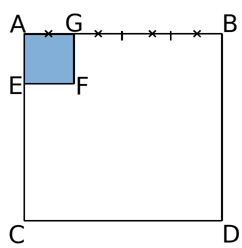


Fig 5

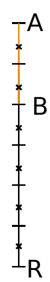
26 *Agrandissement ou réduction de figures*

Rédige dans chaque cas, deux phrases : une avec les mots « ... est un agrandissement de rapport ... de ... .» et l'autre avec « ... est une réduction de rapport ... de ... .».

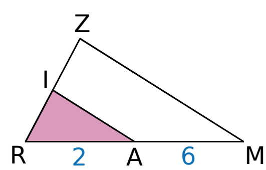
a. AGFE et ABDC sont des carrés.



b.



c. Les droites (AI) et (MZ) sont parallèles.

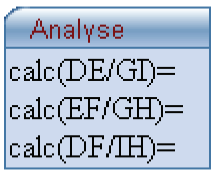


27 *Agrandissement ou réduction ?*

a. Sur ton cahier, construis un triangle DEF tel que EF = 4 cm ; $\widehat{FED}$ = 80° et $\widehat{EFD}$ = 60°.

b. Sur ton cahier, construis un triangle GHI tel que GH = 10 cm ; $\widehat{IGH}$ = 80° et $\widehat{GIH}$ = 40°.

c. Réalise les dessins des questions **a.** et **b.** avec le logiciel Tracenpoche.
Dans la fenêtre *Analyse*, saisis le texte ci-dessous puis appuie sur la touche F9.



Le triangle DEF semble-t-il être un agrandissement ou une réduction du triangle GHI ? Si c'est le cas, que représentent les nombres calculés dans la fenêtre *Analyse* ?

28 *Agrandissement ou non*

a. Construis un parallélogramme ABCD tel que AB = 3 cm ; BC = 5 cm et $\widehat{ABC}$ = 55°.

b. Construis un parallélogramme EFGH tel que EF = 2AB ; FG = 2BC et qui soit un agrandissement du parallélogramme ABCD de rapport 2. Écris la propriété utilisée.

c. Construis un parallélogramme IJKL tel que IJ = 2AB ; JK = 2BC et qui ne soit pas un agrandissement de ABCD. Explique pourquoi ce n'est pas un agrandissement.

29 *Agrandissement ou non (bis)*

a. Construis deux quadrilatères ayant leurs angles respectifs de même mesure et qui pourtant ne sont pas un agrandissement (ou une réduction) l'un de l'autre.

b. Peux-tu répondre à la même question avec des triangles à la place des quadrilatères ?

30 *Agrandissement et parallélisme*

a. Construis un triangle ABC tel que
AB = 3,4 cm ; AC = 4,5 cm et BC = 7 cm.

b. Construis un triangle CDE qui soit un agrandissement de rapport 2 du triangle ABC et tel que D appartient à la demi-droite [CA) et E appartienne à la demi-droite [CB).

c. Démontre que (DE) et (AB) sont parallèles.

31 *Réduction et trapèze*

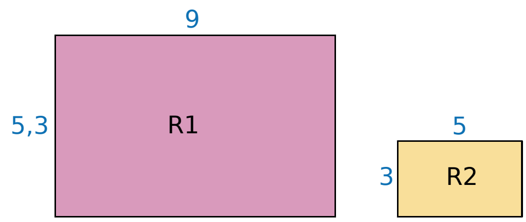
a. Construis un trapèze ABCD rectangle en D tel que (AB) soit parallèle à (CD), AB = 3,9 cm ; CD = 6,6 cm et AD = 4,5 cm.

b. Construis une figure qui soit une réduction de rapport $\frac{2}{3}$ du trapèze ABCD.

c. Quelle est la nature du quadrilatère obtenu ? Justifie ta réponse.

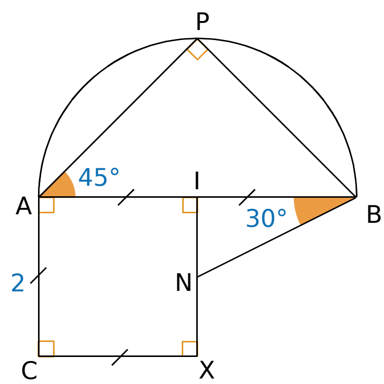
32 *Réduction ?*

Soit deux rectangles R1 et R2. Le rectangle R2 est-il une réduction du rectangle R1 ? Justifie ta réponse.



33 *Construction et agrandissement*

Construis un agrandissement de rapport $\frac{11}{5}$ du dessin ci-dessous. Explique ta démarche. L'unité de longueur est le centimètre.



34 *Constructions et démonstration*

a. Construis un triangle ABC quelconque. Place un point O extérieur à ABC.
Sur la demi-droite [OA), place le point A' tel que OA' = 3OA. Trace la parallèle à (AB) passant par A', elle coupe (OB) en B'.
Construis la parallèle à (AC) passant par A', elle coupe (OC) en C'.

b. Que peux-tu dire du triangle A'B'C' par rapport au triangle ABC ? Démontre-le.

Exercices d'approfondissement

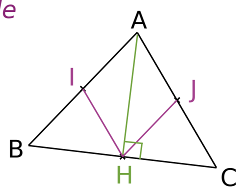
35 *Dans un triangle rectangle*

a. GAZ est un triangle rectangle en A. Les points F, E et R sont les milieux respectifs de [AZ], [GZ] et [GA]. Fais une figure.

b. Quelle est la nature du quadrilatère FERA ? Prouve-le.

36 *Dans un triangle isocèle*

ABC est un triangle isocèle en A. [AH] est la hauteur issue de A. Les points I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC].



Quelle est la nature de AIHJ ?

37 *Avec une médiatrice*

SEL est un triangle quelconque. Les points I, M et A sont les milieux respectifs de [LS], [SE] et [EL]. La médiatrice de [LE] coupe la droite (IM) en O.

a. Fais une figure.

b. Que représente (AO) pour le triangle IMA ? Prouve-le.

38 *Avec une médiane*

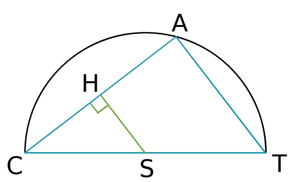
a. Construis un triangle EAU quelconque.

b. Construis la médiane [EL].
Place N milieu de [AE] et M milieu de [EU].
O est le point d'intersection de (EL) et de (MN).

c. Est-il vrai que (OL) est une médiane du triangle LMN ? Justifie ta réponse.

39 *Dans un demi-cercle*

Sur la figure ci-contre, le point A appartient au cercle de diamètre [CT] et de centre S.
Les droites (HS) et (CA) sont perpendiculaires.



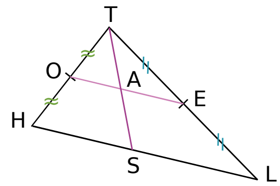
Montre que H est le milieu du segment [CA].

40 ABC est un triangle quelconque. R est un point de [BC]. On appelle S, T, M et N les milieux respectifs de [BR], [RC], [AB] et [AC].

a. Montre que (NT) est parallèle à (MS).

b. Montre que MNTS est un parallélogramme.

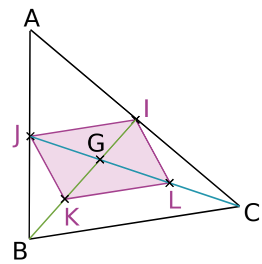
41 Sur la figure suivante, THL est un triangle quelconque, O est le milieu du segment [TH], E celui de [TL] et S est un point de [HL].



a. Montre que les angles $\widehat{SAE}$ et $\widehat{TSH}$ ont la même mesure.

b. Montre que A est le milieu de [TS].

42 ABC est un triangle quelconque. [BI] et [CJ] sont deux médianes, elles se coupent en G. On désigne par K le milieu de [BG] et L celui de [CG].



a. Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ? Prouve-le.

b. Que peut-on dire de la position du point G sur chacune des médianes [BI] et [CJ] ?

43 *Dans un parallélogramme*

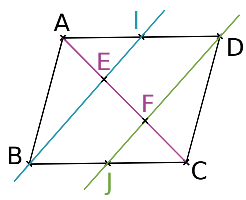
ABCD est un parallélogramme tel que DC = 6,3 cm et BC = 3 cm.
D' est le point tel que A soit le milieu de [DD'].
E est le point du segment [AB] tel que AE = 2,1 cm.
La droite (ED') coupe la droite (CD) en F.

a. Construis une figure en vraie grandeur.

b. Montre que E est le milieu de [FD'].

c. Déduis-en DF et montre que FC = $\frac{1}{3}$ DC.

44 ABCD est un parallélogramme. I est le milieu de [AD] et J le milieu de [BC].



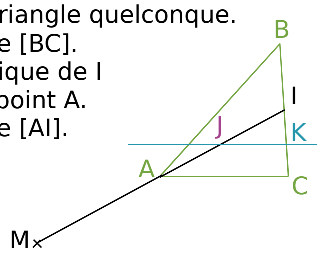
a. Démontre que BJDI est un parallélogramme.

b. Est-il vrai que les droites (BI) et (DJ) divisent la diagonale [AC] en trois parties égales ? Justifie ta réponse (ce problème est posé par Euclide dans le Livre III de ses « Éléments »).

Exercices d'approfondissement

45 ABC est un triangle quelconque.

- I est le milieu de [BC].
- M est le symétrique de I par rapport au point A.
- J est le milieu de [AI].



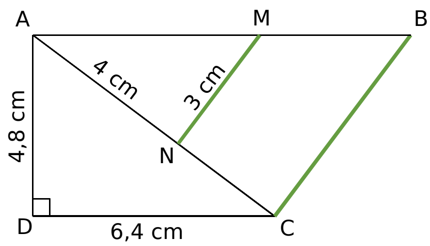
La parallèle à (AC) passant par J coupe (BC) en K.

a. Démontre que K est le milieu de [IC].

b. Démontre que les droites (AK) et (MC) sont parallèles.

c. Que représente le point d'intersection des droites (CA) et (MK) pour le triangle MIC ?

46 Sur la figure ci-dessous, les droites (MN) et (BC) sont parallèles et AB = 10 cm.



a. Calcule BC.

b. Démontre que le triangle ABC est rectangle.

47 Sur une droite (d), on considère trois points A, B et C tels que B soit le milieu de [AC].
Sur une droite (d'), on considère un point A'.
B' est le point d'intersection de (d') et de la parallèle à (AA') passant par B.
C' est le point d'intersection de (d') et de la parallèle à (AA') passant par C.

a. Construis cette figure.

b. Que dire de B' ? Prouve-le.

48 *Construction*

a. Construis un triangle BAO rectangle en A avec AB = 4 cm et AO = 5 cm.

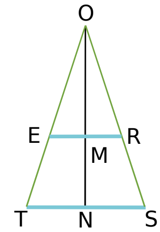
b. Place le point C, symétrique de A par rapport au point O.

c. Sur la demi-droite [BO), place le point D tel que BD = 8 cm.

d. Place les points I, J, K et L milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA].

e. IJKL est-il un losange ? Justifie ta réponse.

49 Sur la figure ci-dessous, qui n'est pas à l'échelle, RE = 8 cm ; OM = 5 cm et ON = 25 cm. Les droites (RE) et (ST) sont parallèles. On souhaite calculer ST.



a. Montre que $\frac{OE}{OT} = \frac{OM}{ON}$.

b. Montre que $\frac{OE}{OT} = \frac{ER}{TS}$.

c. Que peux-tu en déduire pour $\frac{OM}{ON}$ et $\frac{ER}{TS}$?

d. Calcule ST.

50 *Extrait du Brevet*

Dans cet exercice, l'unité de longueur est le centimètre.

a. Tracer un rectangle ABCD tel que AB = 8 et BC = 4.
Placer le point I sur le segment [AB] tel que AI = 6 puis le point J, milieu du segment [BC].
Tracer la parallèle à la droite (IJ) passant par A : cette parallèle coupe le segment [DC] en K et la droite (BC) en H.

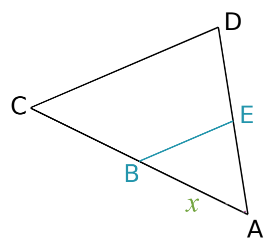
b. Calculer BH, en citant le théorème utilisé.

c. Quelle est la nature du triangle ABH ?

d. Préciser la position du point K sur le segment [DC]. Que peut-on en déduire pour les droites (KJ) et (DB) ? Justifier la réponse.

51 *Avec x*

Sur la figure ci-contre :
(CD) est parallèle à (BE) ;
BC = 5 cm ; CD = 19 cm ;
BE = 7 cm et on désigne par x la longueur de [AB] en cm.



a. Calcule x.

b. Le triangle ABE est-il une réduction du triangle ACD ? Si oui, quel en est le coefficient ?

52 *Trapèze*

ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD].
AB = 6 cm ; CD = 10 cm ; BC = 5 cm et AD = 4 cm.
Les droites (AD) et (BC) se coupent en E.

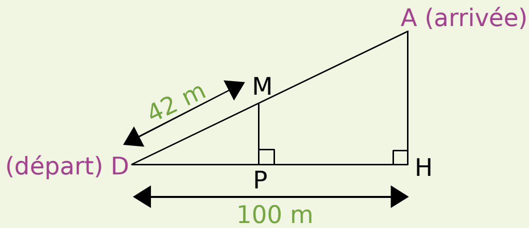
a. Fais un schéma à main levée.

b. Prouve que le triangle DCE est isocèle.

c. Construis ABCD en vraie grandeur.

53 *Extrait du Brevet*

Funiculaire : chemin de fer à traction par câble pour la desserte des voies à très forte pente.



La longueur AD de la voie du funiculaire est de 125 m.

a. De quelle hauteur AH s'est-on élevé à l'arrivée ?

Lorsque le funiculaire a parcouru 42 m, il s'est élevé d'une hauteur MP.

b. Faire un dessin à l'échelle 1/1 000.

c. Que peut-on dire des droites (MP) et (AH) ? Justifier la réponse.

d. Calculer MP.

54 *Réduire sans mesurer*

a. Construis un triangle ABC tel que AB = 6 cm ; BC = 10 cm et CA = 8 cm.
Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifie ta réponse.

b. Place un point O à l'extérieur de ABC tel que OA = 4 cm puis le point A' appartenant à la demi-droite [OA) tel que OA' = 1 cm.

Le but des questions suivantes est de construire une réduction de rapport 1/4 du triangle ABC sans utiliser la règle graduée.

c. Construis la droite parallèle à (AB) passant par le point A'. Elle coupe la droite (OB) en B'.

d. Le triangle A'B'C' étant une réduction du triangle ABC, quelle doit être la mesure de l'angle $\widehat{C'A'B'}$?

e. Déduis-en la position du point C' et construis-le sans utiliser la règle graduée.

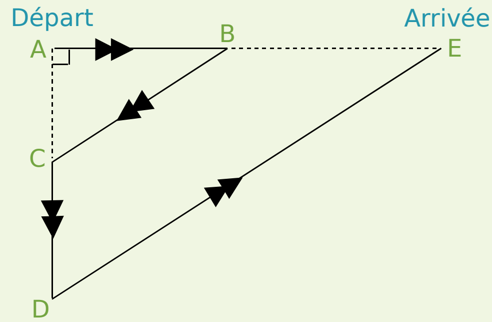
55 RST est un triangle tel que : RS = 4 cm ; ST = 6 cm et TR = 7 cm.
M est un point du segment [RS] et la parallèle à (ST) passant par M coupe [RT] en N.
On désigne par x la longueur de [MS].

a. Calcule x pour que le triangle SMN soit isocèle en M.

b. Dans ce cas, que représente la droite (SN) dans le triangle RST ? Justifie ta réponse.

56 *Extrait du Brevet*

Des élèves participent à un cross. Avant l'épreuve, un plan leur a été remis. Il est représenté ci-après :



On peut y lire les indications suivantes :

AB = 400 m ; AC = 300 m ; l'angle $\widehat{CAB}$ est droit ; BE = 2AB et les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

a. Calculer BC.

b. Calculer AD puis CD.

c. Calculer DE.

d. Vérifier que la longueur du parcours ABCDE est 3 000 m.

57 *Avec des aires*

a. Le triangle T_1 dont les mesures sont, en mètres : 8,5 ; 8,4 et 1,3 est-il un agrandissement du triangle T_2 dont les mesures sont, en cm : 680 ; 672 et 104 ? Si oui, quel est le coefficient d'agrandissement ?

b. Démontre que ces triangles sont rectangles et calcule le rapport $\dfrac{\text{aire du triangle } T_1}{\text{aire du triangle } T_2}$.

c. Calcule la racine carrée de ce rapport. Que remarques-tu ?

58 *Agrandir, réduire*

a. Si tu réduis deux fois une figure puis que tu réduis à nouveau la figure obtenue trois fois, de combien auras-tu réduit la figure initiale ?

b. Un microscope grossit vingt fois. Si tu places sous ce microscope une loupe qui grossit deux fois, quel grossissement obtiens-tu ?

c. Le triangle ABC dont les mesures sont AB = 8 cm ; BC = 10 cm et AC = 6 cm est rectangle (vérifie-le !).
On augmente chacun de ses côtés de 5 cm.
Démontre de deux façons différentes que le triangle obtenu n'est pas un agrandissement du triangle ABC.

1 Le quadrilatère de Varignon

1re partie : Recherche en groupe

Chaque membre du groupe se choisit un rôle parmi les suivants : les historiens, les traceurs et les démonstrateurs.
Plusieurs élèves peuvent avoir le même rôle mais chaque rôle doit avoir un représentant dans chaque groupe.

Les historiens

Vous allez vous documenter (Internet, le CDI...) pour trouver des informations sur M. Varignon et sur son quadrilatère.

En particulier, vous chercherez à quelle époque M. Varignon a vécu, dans quel domaine il a travaillé. Vous pourrez également expliquer ce qu'était l'Académie royale des sciences.

Les démonstrateurs

Vous allez étudier le quadrilatère de Varignon.

Sur une feuille de papier, chacun trace un quadrilatère quelconque nommé ABCD, puis le « quadrilatère des milieux », c'est-à-dire le quadrilatère dont les sommets sont les milieux des côtés de ABCD. Ce quadrilatère des milieux sera nommé IJKL. Montrez que le périmètre du quadrilatère IJKL est égal à AC + BD.

Les traceurs

a. Avec TracenPoche, faites la même construction que les démonstrateurs. Quelle semble être la nature du quadrilatère IJKL ?

b. Démontrez cette conjecture.

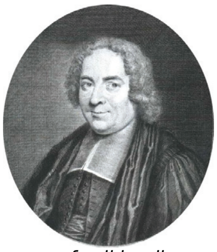
c. Faites calculer à TracenPoche l'aire du quadrilatère ABCD et celle du quadrilatère IJKL. Quelle nouvelle conjecture pouvez-vous faire ?

2e partie : Mise en commun

Dans chaque équipe, tous les groupes mettent leur travail en commun pour réaliser un panneau sur lequel seront collés les résultats de leurs recherches.

3e partie : Exposé

Chaque équipe présente son exposé.



Source : fr.wikipedia.org

2 J'veux du soleil !

On veut calculer la hauteur d'un bâtiment ou d'un arbre que l'on ne peut pas mesurer sans instruments professionnels. Cet exercice nécessite de travailler un jour de beau temps et si possible en soleil rasant. Tu dois connaître ta taille pour faire cet exercice.

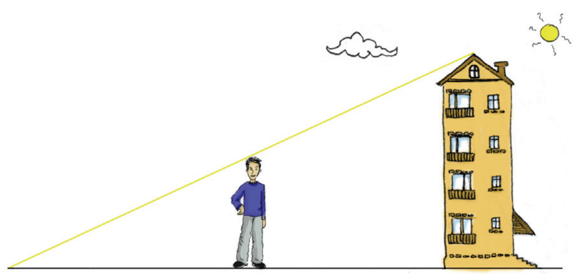
a. Constituez des groupes. Munissez-vous d'une feuille de papier, d'un décamètre ou à défaut d'une corde de longueur connue, et d'une calculatrice.

b. Dans la cour du collège ou dans la rue, repérez un bâtiment (mairie, église, beffroi, tour, etc...), ou un arbre assez haut puis repérez la position du soleil et placez-vous dans l'alignement du bâtiment et de son ombre.

c. Faites coïncider le sommet de votre ombre avec le sommet de l'ombre du bâtiment. Mesurez alors la longueur de votre ombre et la distance entre vous et le bâtiment.

d. Calculez la hauteur du bâtiment en appliquant la propriété de proportionnalité des longueurs dans un triangle et en vous inspirant du dessin ci-dessous.

e. Recommencez l'opération pour d'autres bâtiments puis, de retour en classe, comparez vos résultats avec les autres groupes.



3 Agrandir et réduire des solides

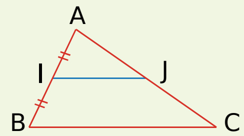
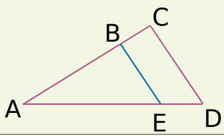
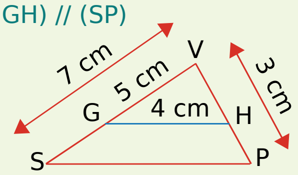
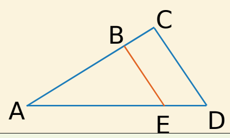
a. En groupe, chacun d'entre vous construit un prisme droit à base polygonale non régulière.

b. Donnez tous vos prismes à un autre groupe.

c. Dans chaque groupe, choisissez ensemble un coefficient d'agrandissement ou de réduction. Construisez l'agrandissement ou la réduction du prisme que vous avez reçu puis rendez le couple de prismes à l'équipe initiale.

d. Chaque groupe doit retrouver le coefficient d'agrandissement ou de réduction choisi par l'autre groupe.

Se tester avec le QCM !

		R1	R2	R3	R4
1		(IJ) // (BC) donc $IJ = \dfrac{BC}{2}$	(IJ) // (BC) donc AJ = JC	J est le milieu de [AC] donc (IJ) // (BC) et $BC = 2 \times IJ$	IJ = 5 cm donc BC = 10 cm
2	Avec la même figure :	$AJ \neq JC$ donc (IJ) n'est pas parallèle à (BC)	Il est possible que (IJ) // (BC) et $AJ \neq JC$	$\widehat{AJI} = \widehat{ACB}$ donc J est le milieu de [AC]	(IJ) // (BC) donc l'aire du triangle AIJ vaut la moitié de celle de ABC
3		$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AD}$	(BE) // (CD) donc $\dfrac{CA}{BA} = \dfrac{DA}{EA}$	(BE) // (CD) donc $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AD}$	(BE) // (CD) donc ABE est une réduction de ACD
4	Avec la figure précédente, (EB) // (DC), AB = 3 cm et BC = 1 cm donc...	$\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{1}{3}$	$\dfrac{CD}{BE} = \dfrac{4}{3}$	$\dfrac{AE}{AD} = 0{,}75$	$\dfrac{CD}{BE} = 1{,}3$
5	(GH) // (SP) 	$VH = \dfrac{5}{7}$ VP et SP = 1,4 GH	VH = 2,1 cm et SP = 5,6 cm	$VH = \dfrac{15}{7}$ cm et $SP = \dfrac{28}{5}$ cm	VSP est un agrandissement de coefficient $\dfrac{5}{7}$ de VGH
6		$\dfrac{AB}{AC} \neq \dfrac{AE}{AD}$ donc (BE) et (CD) ne sont pas parallèles	$\dfrac{AB}{AC} \neq \dfrac{BE}{CD}$ donc (BE) et (CD) ne sont pas parallèles	$\dfrac{BE}{CD} \neq \dfrac{AE}{AD}$ donc (BE) et (CD) ne sont pas parallèles	On peut avoir $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AD}$ et (BE) et (CD) sécantes
7	Un rectangle R_1 est une réduction de coefficient k d'un rectangle R_2 donc...	k peut être égal à 1,05	le périmètre et l'aire de R_1 sont égaux à ceux de R_2 multipliés par k	R_2 est un agrandissement de R_1 de coefficient $\dfrac{1}{k}$	le rapport longueur largeur peut être différent dans R_1 et R_2

Récréation mathématique

Hauteur d'une colline

Un jeune mathématicien veut mesurer la hauteur d'une colline. Pour cela, il place un premier bâton de 2 mètres au pied de cette colline et y monte progressivement en plantant des bâtons de différentes hauteurs et en vérifiant bien leur alignement. Le dernier bâton se trouve au sommet de la colline.
La corde reliant tous les bâtons peut alors être considérée comme un segment : elle est tendue du point O en passant par par le point B_1 au sommet du premier bâton jusqu'au point B_2 au sommet du dernier bâton.

Le dernier bâton mesure 2,5 mètres, OB_1 = 4 m et B_1B_2 = 66 m.
Avec ces données relevées par le jeune mathématicien, aide-le à calculer la hauteur de la colline.