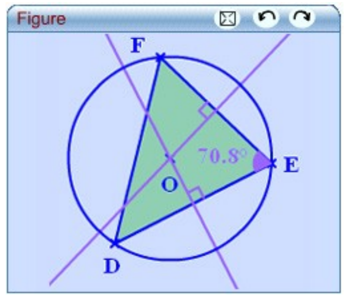
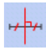
Activités de découverte

Activité 1 : Cercle circonscrit d'un triangle rectangle

1. Conjecture avec TracenPoche

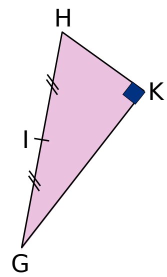


a. Construis un triangle DEF. Construis ensuite son cercle circonscrit en utilisant les boutons  et .
À l'aide du bouton , fais apparaître la mesure de l'angle $\widehat{DEF}$.

b. En déplaçant un sommet du triangle, fais varier la mesure des angles. Observe la position du centre du cercle circonscrit quand les angles de ce triangle sont aigus ; puis quand l'angle $\widehat{DEF}$ est obtus et ensuite quand il est droit. Que constates-tu ?

2. Démonstration

a. Trace un triangle GHK, rectangle en K. Soit I le milieu de l'hypoténuse [GH]. <u>On veut montrer que I est le centre du cercle circonscrit à GHK</u>.



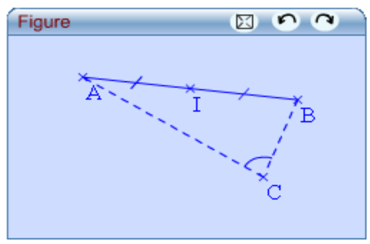
b. Soit L le symétrique de K par rapport à I.
Quelle est la nature du quadrilatère GKHL ? Explique pourquoi.

c. Que peut-on en déduire sur les longueurs IG, IH et IK ?
Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle GHK ?

d. Écris la propriété que tu viens de démontrer.

Activité 2 : Triangle inscrit dans un cercle

1. Conjecture avec TracenPoche



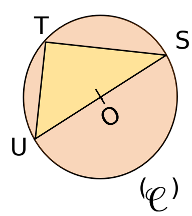
a. Construis un segment [AB] puis place son milieu I.
Place un point libre C et trace les segments [CA] et [CB] en pointillés.
Dans la fenêtre *Analyse*, fais afficher AI, BI et CI.

b. Place le point C de manière à t'approcher de l'égalité AI = BI = CI.
Avec le bouton , fais afficher alors la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$. Que constates-tu ?

c. Construis le cercle de centre I passant par A puis place un point D sur ce cercle en utilisant le bouton . Dans la fenêtre *Analyse*, fais apparaître la mesure de l'angle $\widehat{ADB}$. Déplace le point D sur le cercle et observe la mesure de l'angle.
Ce que tu as constaté au **b.** semble-t-il se confirmer ?

2. Démonstration

a. Trace un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O. Place sur le cercle ($\mathscr{C}$) trois points distincts S, T et U tels que [SU] soit un diamètre du cercle. Trace le triangle STU. <u>On veut montrer que c'est un triangle rectangle</u>.



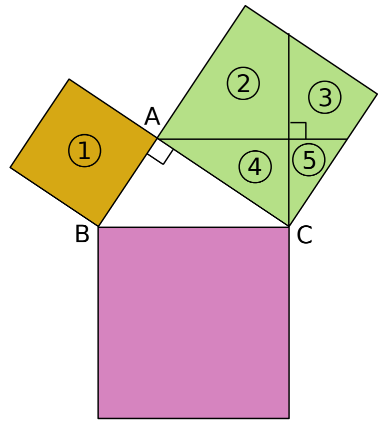
b. Place T', symétrique de T par rapport à O. Quelle est la nature du quadrilatère UTST' ? Justifie.

c. Que peut-on en déduire sur la nature du triangle STU ?

d. Écris la propriété que tu viens de démontrer.

Activité 3 : Sur la piste de Pythagore

1. Partons d'un triangle rectangle



a. Sur une feuille de dessin, construis un triangle ABC rectangle en A.
Sur chacun de ses côtés, construis avec précision un carré comme sur la figure ci-contre.

Termine la construction comme indiqué et découpe les pièces ①, ②, ③, ④ et ⑤.

b. Avec ces cinq pièces, reconstitue le grand carré rose.
Quelle relation y a-t-il entre l'aire du carré jaune, l'aire du carré vert et l'aire du carré rose ?

c. Exprime, à l'aide des lettres de la figure, les aires des carrés jaune, vert et rose.

d. En te servant de la relation trouvée au **b.**, quelle égalité peux-tu alors écrire ?

2. Avec TracenPoche

a. Construis un triangle ABC rectangle en A. Pour cela :

- Place deux points A et B puis, en utilisant le bouton , construis le segment [AB] et en utilisant le bouton , la perpendiculaire à [AB] passant par A.
  Place un point C sur cette perpendiculaire avec le bouton .
- Construis les segments [BC] et [AC] avec le bouton .

b. Fais apparaître les mesures des côtés du triangle ABC en utilisant le bouton .
Reproduis et complète le tableau suivant pour des triangles rectangles ABC différents (tu déplaceras les points A, B et C).

Calcule ensuite $AB^2 + AC^2$ et BC^2 pour chacun de ces triangles : tu donneras des valeurs arrondies au centième.

	Triangle 1	Triangle 2	Triangle 3	Triangle 4	Triangle 5	Triangle 6
AB	...	...	...	...	...	...
AC	...	...	...	...	...	...
$AB^2 + AC^2$	...	...	...	...	...	...
BC	...	...	...	...	...	...
BC^2	...	...	...	...	...	...

Que remarques-tu ?

c. Dans la fenêtre *Analyse*, saisis les expressions ci-contre puis appuie sur la touche F9.

Analyse
calc (AB*AB+AC*AC) =
calc (BC*BC) =

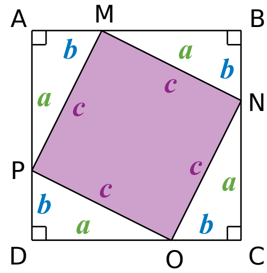
À quoi correspondent ces calculs ?
Déplace maintenant les points A, B et C et observe les résultats affichés dans la fenêtre *Analyse*.
Ce que tu as remarqué au **b.** semble-t-il se confirmer ?

d. Quelle conjecture peux-tu faire ?
Rédige cette conjecture sous la forme : « Si... alors... . ».

Activités de découverte

Activité 4 : Démonstration du théorème de Pythagore

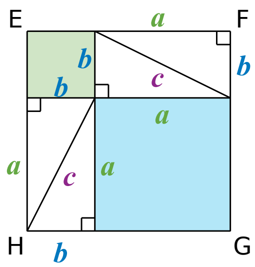
1. À partir de quatre triangles rectangles identiques, on obtient la figure ci-contre, sur laquelle A, M, B ; B, N, C ; C, O, D et D, P, A sont alignés.
a, b et c désignent les longueurs des côtés des triangles rectangles.
Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifie.



2. Démontre que l'angle $\widehat{PMN}$ est un angle droit. Déduis-en la nature du quadrilatère MNOP ?

3. Exprime l'aire de MNOP en fonction de c.

4. On dispose, à présent, les quatre triangles rectangles comme sur la figure ci-contre afin que EFGH soit un carré. Explique pourquoi les carrés ABCD et EFGH ont la même aire.



5. Que dire alors des aires des carrés bleu et vert par rapport à l'aire du carré rose ?

6. Déduis-en une relation entre a, b et c.

7. Écris la propriété que tu viens de démontrer. C'est le **théorème de Pythagore**.

Activité 5 : Racine carrée

1. Recopie et complète le tableau suivant :

AB = 8 m	SD = 1,3 dm	ZE = ...	FG = ...	UT = ...
AB² = ...	SD² = ...	ZE² = 36 cm²	FG² = 81 m²	UT² = 1,69 m²

2. Valeur exacte, valeur approchée

a. Le nombre positif dont le carré est 841 se note $\sqrt{841}$ et se lit « racine carrée de 841 ».
Trouve, sur ta calculatrice, la touche $\boxed{\sqrt{}}$ et le moyen de saisir la séquence $\sqrt{841}$.

Quel résultat obtiens-tu avec la calculatrice ? Quel calcul te permet de vérifier que ce résultat est la valeur exacte de $\sqrt{841}$?

b. x est un nombre positif tel que $x^2 = 50$. Comment notes-tu la valeur de x ?
Fais le calcul à la calculatrice puis recopie la valeur affichée.

Si tu calcules le carré de cette valeur en posant l'opération, quel est le premier chiffre à droite que tu écriras dans le résultat ?

Déduis-en que la valeur donnée par la calculatrice n'est pas la valeur exacte de x.

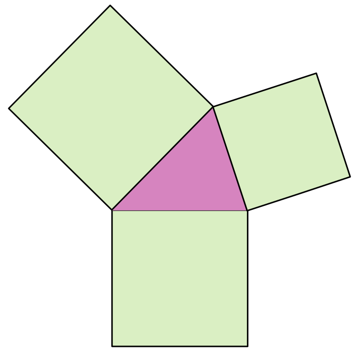
Donne un encadrement de x à 0,01 près puis, en utilisant le symbole ≈, sa valeur arrondie au centième.

c. Donne la valeur exacte (en utilisant le signe =) quand c'est possible ou la valeur arrondie au dixième (en utilisant le signe ≈) de chacune des longueurs dont les carrés sont donnés ci-dessous :

FR² = 156,25	NL² = 85,87	EU² = 2,5	GB² = (2,365)²	XY² = – 9	CZ² = 1,52399025

Activité 6 : Et si $c^2 = a^2 + b^2$ ...

1. Avec des ciseaux



Sur une feuille de dessin, construis et découpe dix carrés dont les mesures des côtés sont entières et valent de 1 cm à 10 cm.
À l'intérieur de chacun d'eux, indique son aire en cm².
Choisis-en trois et assemble-les de façon à former un triangle dont les mesures des côtés sont les mesures des côtés des carrés utilisés, comme le montre l'exemple ci-contre.

a. Lorsque tu choisis trois carrés au hasard, peux-tu toujours construire un triangle ?

b. Exprime les aires des trois carrés en fonction des longueurs des côtés du triangle construit.

c. Parmi tes dix carrés, choisis-en trois tels que la somme des aires des deux plus petits soit égale à l'aire du plus grand.
Quelle relation y-a-t-il alors entre les longueurs des côtés du triangle obtenu ?
Quelle semble être alors la nature de ce triangle ?

d. Reprends la question **c.** avec trois autres carrés que tu as découpés.

2. Recherche de nombres entiers positifs a, b et c tels que $c^2 = a^2 + b^2$

a. Avec un tableur, construis un tableau comme ci-contre, avec des valeurs allant jusqu'à 16 sur la ligne 1 et dans la colonne A.
On veut maintenant remplir chaque cellule avec la somme des carrés du nombre correspondant à sa ligne et du nombre correspondant à sa colonne comme le montre l'exemple ci-contre.
Pour cela, saisis dans la cellule B2 la formule : « = $A2*$A2+B$1*B$1 ». Trouve l'utilité du signe « $ » dans cette formule.
Copie cette formule dans toutes les cellules de ton tableau et vérifie, dans quelques cellules, les résultats obtenus.

	A	B	C	D	E	F
1		1	2	3	4	5
2	1					
3	2					
4	3					
5	4					
6	5					

cellule C4 : résultat de 3² + 2²

b. Sur la même feuille de tableur, construis un autre tableau permettant d'avoir les valeurs des carrés des nombres entiers de 1 à 23.

19	c	1	2	3	4	5	6
20	c^2						

c. En utilisant les résultats obtenus dans les deux tableaux, trouve plusieurs triplets de nombres a, b et c tels que $c^2 = a^2 + b^2$ (il y a 6 solutions possibles).
Construis maintenant les triangles dont les mesures sont les triplets trouvés.
Quelle relation vérifient les mesures des côtés de ces triangles ?
Quelle semble être la nature de chacun de ces triangles ?

Bilan : Quelle conjecture peux-tu faire alors ?
On admet que cette conjecture est vraie. C'est la **réciproque du théorème de Pythagore**.
Énonce-la sous la forme : « Si... alors... . ».

3. Rectangle ou non ?

a. Trace un triangle RST tel que RS = 4,8 cm, ST = 6,4 cm et RT = 8,1 cm. Quelle semble être sa nature ?

b. Calcule la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit mesurent 4,8 cm et 6,4 cm.

c. Le triangle RST est-il rectangle ?

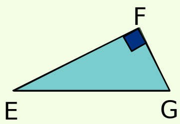
Méthodes et notions essentielles

Méthode 1 : Démontrer qu'un point est sur un cercle

À connaître

Si un **triangle est rectangle**
alors **son cercle circonscrit** a pour diamètre son hypoténuse.

Exemple : Soit EFG un triangle rectangle en F.
Démontre que le point F appartient au cercle de diamètre [EG].

Figure	Données	Propriété	Conclusion
	Le triangle EFG est rectangle en F.	Si un triangle est rectangle alors son cercle circonscrit a pour diamètre son hypoténuse.	Le point F appartient au cercle de diamètre [EG].

À toi de jouer

1 Construis un triangle EFG rectangle en F tel que EG = 8 cm et EF = 5 cm puis trace son cercle circonscrit. Justifie ta construction.

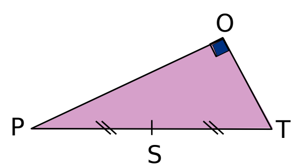
2 Soient ABC et BCD deux triangles rectangles respectivement en A et en D. Démontre que les points A et D appartiennent au cercle de diamètre [BC].

Méthode 2 : Calculer la longueur d'une médiane

À connaître

Si un **triangle est rectangle**
alors **la médiane issue du sommet de l'angle droit** a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

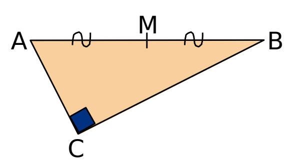
Exemple : Le triangle POT est un triangle rectangle en O tel que TP = 8 cm. Le point S est le milieu du segment [TP]. Quelle est la longueur du segment [SO] ?



Étape préliminaire : Dans le triangle POT rectangle en O, [OS] joint le sommet O et le milieu S de [TP] donc [OS] est la médiane issue du sommet de l'angle droit O.

Données	Propriété	Conclusion
Le triangle POT est rectangle en O, [OS] est la médiane issue du sommet de l'angle droit O, TP = 8 cm.	Si un triangle est rectangle alors la médiane issue du sommet de l'angle droit a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse.	$OS = \frac{1}{2}\ TP$ $OS = \frac{1}{2} \times 8$ cm OS = 4 cm

À toi de jouer



3 Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en C, M est le milieu du segment [AB] et CM = 2 cm. Quelle est la longueur du segment [AB] ? Justifie ta réponse.

Méthode 3 : Démontrer qu'un triangle est rectangle

À connaître

> Si **un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés**
> alors **ce triangle est rectangle** et admet ce diamètre pour hypoténuse.

Remarque : Voici une autre formulation possible de cette propriété :

> Si on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre de ce cercle
> alors le triangle ainsi formé est **rectangle en ce point**.

Exemple : Trace le cercle de diamètre [SR] tel que SR = 7 cm puis place sur ce cercle un point H tel que RH = 4 cm.

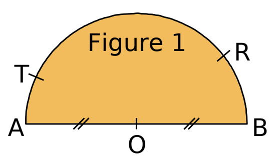
Démontre que le triangle RHS est rectangle en H.

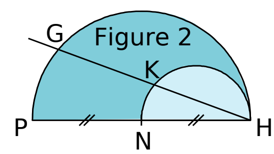
Données	Propriété	Conclusion
Le point H appartient au cercle de diamètre [SR].	Si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés alors ce triangle est rectangle et admet ce diamètre pour hypoténuse.	Le triangle SHR est rectangle en H.

À toi de jouer

4 Trace un cercle de diamètre [AB] puis place sur ce cercle un point C tel que $\widehat{BAC} = 50°$. Calcule les mesures des angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ABC}$ en justifiant tes réponses.

5 Dans chacune des figures ci-contre, nomme tous les triangles rectangles non tracés en utilisant les points donnés.
Justifie tes réponses.



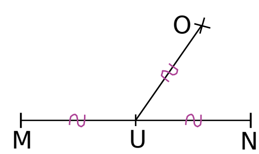


À connaître

> Si, **dans un triangle, la longueur de la médiane relative à un côté est égale à la moitié de la longueur de ce côté**
> alors **ce triangle est rectangle** et admet ce côté pour hypoténuse.

Exemple : MON est un triangle, U est le milieu de [MN] et on a :
MN = 8 cm ; OU = 4 cm.

Démontre que le triangle MON est rectangle en O.



Étape préliminaire : Dans le triangle MNO, [OU] joint le sommet O et le milieu U de [MN] donc [OU] est la médiane relative au côté [MN].

Données	Propriété	Conclusion
Dans le triangle MNO, [OU] est la médiane relative au côté [MN], MN = 8 cm et OU = 4 cm.	Si, dans un triangle, la longueur de la médiane relative à un côté est égale à la moitié de ce côté alors ce triangle est rectangle et admet ce côté pour hypoténuse.	Le triangle MNO est rectangle en O.

À toi de jouer

6 Soit RST un triangle isocèle en T et soit U le symétrique du point R par rapport au point T. Démontre que le triangle RSU est rectangle en S.

Méthode 4 : Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle

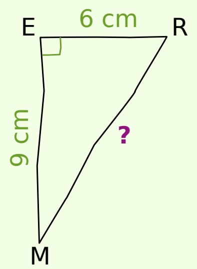
À connaître : Théorème de Pythagore

> Si **un triangle est rectangle**
> alors **le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés**.

Exemple 1 : Calcul de la longueur de l'hypoténuse

Soit MER un triangle rectangle en E tel que ME = 9 cm et ER = 6 cm.
Calcule la valeur exacte de MR puis donne la valeur arrondie au millimètre.

Figure à main levée :



Le triangle MER est rectangle en E, son hypoténuse est le côté [MR]. Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$MR^2 = ME^2 + ER^2$

$MR^2 = 9^2 + 6^2$

$MR^2 = 81 + 36$

$MR^2 = 117$

La longueur MR est positive donc MR = $\sqrt{117}$ cm (valeur exacte).

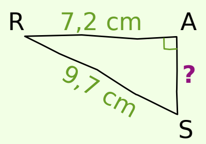
(On utilise ensuite la calculatrice et la touche $\boxed{\sqrt{\ }}$ pour obtenir une valeur de $\sqrt{117}$.
La calculatrice affiche alors : 10,81665383.
On a donc : $10,8 < \sqrt{117} < 10,9$.
Ainsi 10,8 et 10,9 sont deux valeurs approchées de $\sqrt{117}$ à un dixième près. 10,8 est la valeur la plus "proche" de la valeur affichée par la calculatrice)

Donc MR ≈ 10,8 cm (**valeur arrondie au millimètre**).

Exemple 2 : Calcul de la longueur d'un côté de l'angle droit

Soit RAS un triangle rectangle en A tel que RS = 9,7 cm et RA = 7,2 cm. Calcule AS.

Figure à main levée :



Le triangle RAS est rectangle en A, son hypoténuse est le côté [RS]. Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$RS^2 = RA^2 + AS^2$

$9,7^2 = 7,2^2 + AS^2$

$AS^2 = 9,7^2 - 7,2^2$

$AS^2 = 94,09 - 51,84$

$AS^2 = 42,25$

La longueur AS est positive donc AS = $\sqrt{42,25}$ cm.

(La valeur obtenue avec la calculatrice pour $\sqrt{42,25}$ est 6,5. C'est une valeur exacte car $6,5^2 = 42,25$)

Donc AS = 6,5 cm (**valeur exacte**).

À toi de jouer

7 TER est un triangle rectangle en T tel que TE = 6 m et TR = 4 m. Calcule la valeur exacte de ER puis donne la valeur arrondie au centimètre.

8 ARC est un triangle rectangle en A tel que RC = 13 m et AR = 5 m. Calcule la longueur AC.

Méthode 5 : Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle

Exemple : NUL est un triangle tel que NU = 42 cm ; LU = 46 cm et LN = 62 cm.
Démontre que NUL n'est pas un triangle rectangle.

Remarque préliminaire : si ce triangle est rectangle, seul le côté [LN] peut être son hypoténuse car c'est le côté le plus long.

Dans le triangle NUL, le plus long côté est [LN] donc on **calcule séparément** LN^2 et $LU^2 + NU^2$:

D'une part,	D'autre part,
$LN^2 = 62^2$	$LU^2 + NU^2 = 46^2 + 42^2$
$LN^2 = 3\ 844$	$LU^2 + NU^2 = 2\ 116 + 1\ 764$
	$LU^2 + NU^2 = 3\ 880$

On constate que $LN^2 \neq LU^2 + NU^2$.
Or si le triangle était rectangle, d'après le théorème de Pythagore, il y aurait égalité.
Comme ce n'est pas le cas, le triangle NUL n'est pas rectangle.

À toi de jouer

9 Soit DEF un triangle tel que DE = 11 cm ; EF = 13 cm et DF = 15 cm.
Construis le triangle DEF puis démontre que ce n'est pas un triangle rectangle.

Méthode 6 : Démontrer qu'un triangle est rectangle à l'aide de la réciproque du théorème de Pythagore

À connaître : Réciproque du théorème de Pythagore

Si, **dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés**
alors **ce triangle est rectangle** et admet ce plus grand côté pour hypoténuse.

Exemple : NEZ est un triangle tel que NE = 75 cm ; EZ = 45 cm et NZ = 60 cm. Démontre que ce triangle est rectangle.

Dans le triangle NEZ, le plus long côté est [NE] donc on **calcule séparément** NE^2 et $EZ^2 + NZ^2$:

D'une part,	D'autre part,
$NE^2 = 75^2$	$EZ^2 + NZ^2 = 45^2 + 60^2$
$NE^2 = 5\ 625$	$EZ^2 + NZ^2 = 2\ 025 + 3\ 600$
	$EZ^2 + NZ^2 = 5\ 625$

On constate que $NE^2 = EZ^2 + NZ^2$.
Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle NEZ est rectangle en Z.

À toi de jouer

10 Soit XYZ un triangle tel que XY = 32 cm ; YZ = 40 cm et XZ = 24 cm.
Démontre que le triangle XYZ est rectangle. Tu préciseras en quel point.

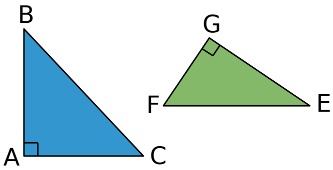
11 Soit UVW un triangle tel que UV = 20 dm ; UW = 2,1 m et VW = 290 cm.
Démontre que le triangle UVW est rectangle. Tu préciseras en quel point.

Exercices d'entraînement

Triangle rectangle et cercle

1 *Vocabulaire*

On considère les triangles rectangles suivants :



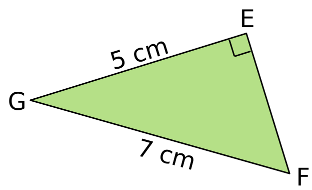
IJK est un triangle rectangle tel que :
IJ = 12 cm ;
IK = 13 cm et
JK = 5 cm.

a. Écris trois phrases avec l'expression « ... est rectangle en .... . ».

b. Écris trois phrases avec l'expression « ... est l'hypoténuse de ... . ».

c. Pour chaque triangle, précise où se situe le centre de son cercle circonscrit et calcule son rayon.

2 *Médiane*



a. Construis ce triangle puis la médiane issue du sommet E et celle issue du sommet F.

b. Construis son cercle circonscrit et calcule son rayon.

3 *À partir d'un rectangle*

BIEN est un rectangle de centre M.

a. Que représente le point M pour le segment [EB] ? Justifie.

b. Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle BIE ? Pourquoi ?

c. Pourquoi N appartient-il aussi à ce cercle ?

4 *À partir d'un triangle isocèle*

a. Trace un triangle ART isocèle en A. On appelle S le milieu de [RT].

b. Montre que le triangle TAS est rectangle en S.

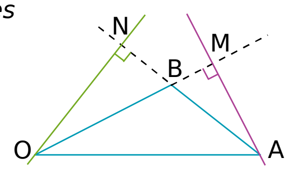
c. Montre que les cercles ($\mathscr{C}$) de diamètre [AR] et ($\mathscr{C}$') de diamètre [AT] se coupent en S.

5 Construis un cercle ($\mathscr{C}$) de centre I et de rayon 5 cm. Place un point P sur ($\mathscr{C}$) et trace un diamètre [MN] de ($\mathscr{C}$).

Quelle est la nature du triangle MNP ? Pourquoi ?

6 *Points cocycliques*

BO = 4 cm ;
OA = 6 cm ;
BA = 3 cm.



a. Fais une figure en vraie grandeur.

b. Démontre que le point M appartient au cercle de diamètre [OA].

c. Démontre que les points M, O, N et A sont sur un même cercle dont tu préciseras le centre et le rayon.

7 ($\mathscr{C}$) est un cercle de centre O. A et M sont deux points de ($\mathscr{C}$) non diamétralement opposés. La perpendiculaire en M à (AM) recoupe ($\mathscr{C}$) en B.

a. Fais une figure.

b. Démontre que O est le milieu de [AB].

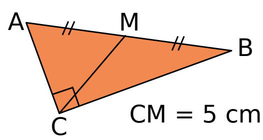
c. N est un autre point du cercle. Démontre que ANB est un triangle rectangle.

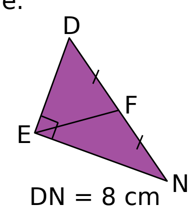
8 R, I et O sont trois points alignés dans cet ordre. ($\mathscr{C}$) est le cercle de diamètre [RI] et ($\mathscr{C}$') est le cercle de diamètre [IO]. Soit A un point de ($\mathscr{C}$) différent de I et R. La droite (AI) coupe ($\mathscr{C}$') en B.

a. Fais une figure.

b. Démontre que les droites (RA) et (BO) sont parallèles.

9 Calcule AB et EF. Justifie.





10 *A partir d'un triangle rectangle*

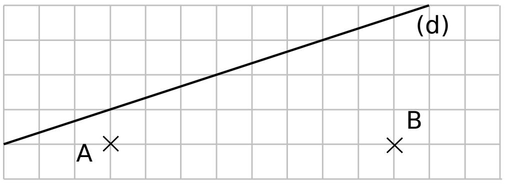
Soit IBC un triangle rectangle en C. Soit M le milieu de [IB].

Quelle est la nature du triangle MIC ? Justifie ta réponse.

11 *A partir d'un losange*

ABCD est un losange de centre O et de périmètre 20 cm. I est le milieu du côté [AB]. Calcule OI. Justifie.

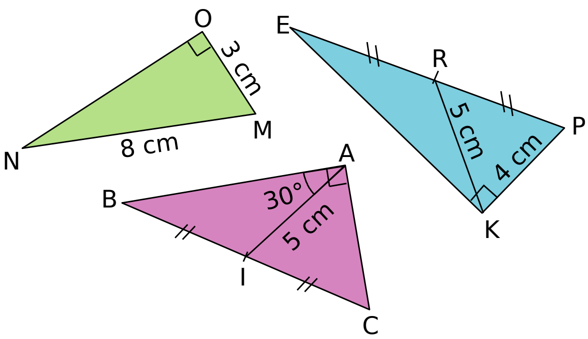
12 *Avec un quadrillage*



a. Reproduis la figure ci-dessus sur du papier quadrillé.

b. Place sur la droite (d) les points M et N tels que les triangles AMB et ANB soient rectangles respectivement en M et N. Justifie.

13 *Triangles rectangles à gogo*



a. Construis ces triangles sans utiliser l'équerre.

b. Décris et justifie ta construction dans chacun des cas.

14 *Triangles encerclés*

Pour chaque question, trace un cercle de rayon 3 cm puis inscris dans celui-ci un triangle :

a. isocèle ;

b. équilatéral ;

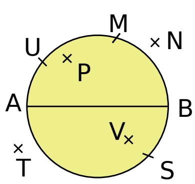
c. rectangle ;

d. rectangle isocèle.

Explique chacune de tes constructions.

15 [AB] est un diamètre du cercle.

a. Indique les triangles rectangles d'hypoténuse [AB].
Cite la propriété du cours que tu utilises.



b. Explique pourquoi le triangle APB ne peut pas être dans ta liste précédente.

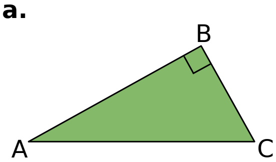
Théorème de Pythagore

16 *Écrire la relation*

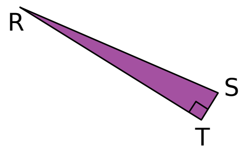
Pour chacun des triangles suivants, recopie et complète la phrase : « Le triangle ..... est rectangle en ..., son hypoténuse est .... donc d'après le théorème de Pythagore :

...² = ...² + ...² ».

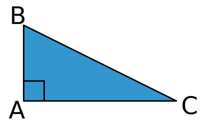
a.



b.



c.



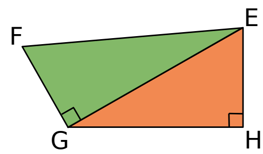
d. XYZ tel que :

(XY) ⊥ (YZ).

e. MNP avec :

$\widehat{MNP} = 90°$.

17 *Relations*



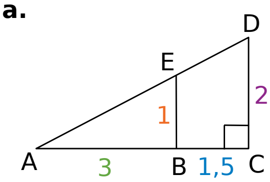
En utilisant les données de la figure ci-dessus, recopie et complète les égalités suivantes :

EF² = ...² + ...²	FG² = ...² – ...²	EG² = ...² – ...²
EG² = ...² + ...²	GH² = ...	EH² = ...

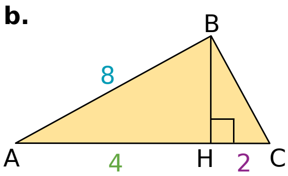
18 *Le théorème, dans quel triangle ?*

Pour chacune des figures suivantes, indique en expliquant ta réponse, les triangles dans lesquels le théorème de Pythagore peut s'appliquer et quelle(s) longueur(s) tu peux alors calculer (les mesures données sont en cm).

a.

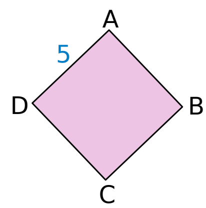


b.



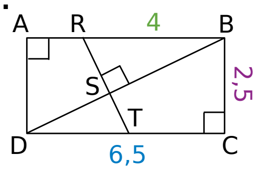
A, H et C sont alignés.

c.



ABCD est un carré.

d.



Exercices d'entraînement

19 *Carré, racine carrée*

ABC est un triangle rectangle en A tel que : AB = 3 cm et AC = 1 cm.

a. Joseph a écrit : « *$BC^2 = 6 + 2$; $BC^2 = 8$ donc $BC = 4$ cm* ».

Indique et analyse ses erreurs.

b. Calcule BC^2 puis en utilisant la touche racine carrée $\boxed{\sqrt{\ }}$ de ta calculatrice, donne la valeur de BC approchée par défaut au millimètre près.

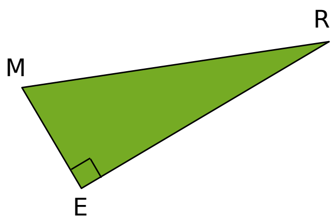
20 Soit un triangle EDF rectangle en D.

a. Écris l'égalité de Pythagore pour ce triangle.

b. On donne : EF = 450 mm et DF = 360 mm. Calcule ED^2 puis, en utilisant la touche racine carrée de ta calculatrice, la longueur ED.

c. Calcule DF avec EF = 4,5 dm et ED = 2,7 dm.

21 MER est un triangle rectangle en E.



a. Écris l'égalité de Pythagore pour ce triangle.

b. Le tableau suivant présente plusieurs cas de dimensions du triangle MER.

Recopie et complète-le en écrivant le détail de tes calculs (tu arrondiras au dixième si nécessaire) :

	n°1	n°2	n°3	n°4	n°5
MR	...	...	5,3 cm	9,1 cm	7 m
RE	15 cm	36 cm	...	9 cm	... m
ME	8 cm	7,7 dm	2,8 cm	...	53 cm

22 ABC est un triangle rectangle en A tel que : AB = 48 mm et AC = 64 mm.

a. Construis ce triangle en vraie grandeur.

b. Quelle longueur peux-tu calculer avec le théorème de Pythagore ?

Calcule cette longueur en rédigeant. Vérifie la cohérence de ton calcul sur ta figure.

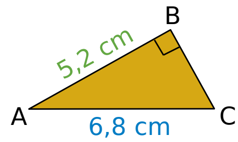
c. Reprends les questions précédentes avec le triangle MOT rectangle en M tel que TO = 7,4 cm et MT = 2,4 cm.

23 *Je rédige et je calcule*

a. Le triangle MNP est rectangle en M avec MN = 5,2 m et MP = 4,8 m.
Calcule la valeur de NP arrondie au dixième.

b. Calcule RT dans le triangle RST, rectangle en T tel que : ST = 60 mm et RS = 10,9 cm.

c. Calcule BC. Donne la valeur approchée par excès au centième près.



24 Calcule la valeur arrondie au millimètre de :

a. la longueur de la diagonale d'un carré de côté 5 cm ;

b. la longueur de la diagonale d'un rectangle dont les dimensions sont 8,6 cm et 5,3 cm ;

c. la longueur du côté d'un carré de diagonale 100 m.

25 *Saut d'obstacle*

Théo veut franchir, avec une échelle, un mur de 3,50 m de haut devant lequel se trouve un fossé rempli d'eau, d'une largeur de 1,15 m.

a. Fais un schéma de la situation.

b. Il doit poser l'échelle sur le sommet du mur. Quelle doit être la longueur minimum de cette échelle ? Arrondis au cm.

26 *Jardinage*

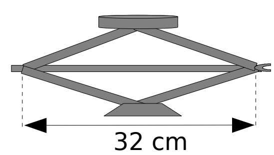
Un massif de fleurs a la forme d'un triangle rectangle et le jardinier veut l'entourer d'une clôture. Au moment de l'acheter, il s'aperçoit qu'il a oublié de mesurer un des côtés de l'angle droit.
Les deux seules mesures dont il dispose sont, en mètres : 6,75 et 10,59.

a. A-t-il besoin d'aller mesurer le côté manquant ?

b. Aide-le à calculer la longueur de la clôture qu'il doit acheter.

27 *Le cric*

Le cric d'une voiture a la forme d'un losange de 21 cm de côté.
À quelle hauteur soulève-t-il la voiture lorsque la diagonale horizontale mesure 32 cm ? Arrondis au mm.

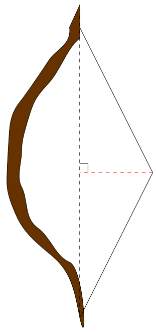


28 *L'arc pour enfant*

La corde élastique a une longueur de 60 cm au repos.

a. Quelle est la nouvelle longueur de la corde si on l'écarte de 11 cm en la tirant par son milieu ? Arrondis au cm.

b. Il est conseillé de ne pas tirer la corde de plus de 8 cm. Quel est, en cm, l'écartement maximal conseillé ?

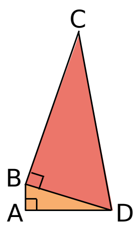


29 Sur la figure ci-contre :

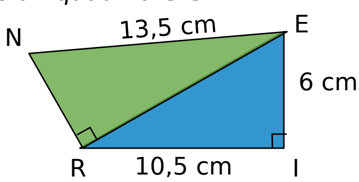
AB = 1,5 cm ; AD = 6 cm et BC = 12 cm.

a. Calcule la valeur arrondie au mm de BD.

b. Calcule, en justifiant, la valeur exacte de DC.



30 *Dans un quadrilatère*



Démontre que NR = EI. Justifie toutes les étapes.

31 TSF est un triangle isocèle en S tel que ST = 4,5 cm et TF = 5,4 cm.

a. Calcule la longueur de la hauteur relative à la base [TF].

b. Déduis-en l'aire de ce triangle.

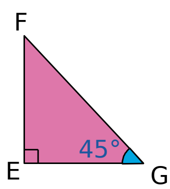
32 Calcule la mesure, approchée par excès au dixième près, de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 7 cm. Déduis-en son aire.

33 *Avec des angles*

Le triangle EFG est rectangle en E :

EG = 7 cm et $\widehat{FGE} = 45°$.

a. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{EFG}$.



b. Calcule, en justifiant, EF et FG (tu arrondiras au mm).

34 *Rectangle ou non ?*

a. Le triangle XYZ est tel que XY = 29,8 cm ; YZ = 28,1 cm ; XZ = 10,2 cm.

Explique pourquoi il n'est pas rectangle.

b. Soit le triangle ALE tel que : AL = 13,1 cm ; LE = 11,2 cm ; EA = 6,6 cm.

Construis ce triangle en vraie grandeur.

Est-il rectangle ? Justifie ta réponse.

Réciproque du théorème de Pythagore

35 Soit le triangle MNP tel que MN = 3 cm ; NP = 5 cm et PM = 4 cm.

a. Construis ce triangle en vraie grandeur.

b. En utilisant ton équerre, peux-tu affirmer que ce triangle est rectangle ?

c. Fais les calculs nécessaires pour pouvoir conclure. Écris le théorème utilisé.

36 Donne tous les triangles rectangles dont les mesures des côtés sont parmi les valeurs suivantes :

6 cm ; 8,2 cm ; 10 cm ; 1,8 cm ; 5 cm ; 8 cm.

37 Dans chacun des cas ci-dessous :

- Identifie le plus long côté du triangle EFG ;
- Calcule, d'une part, le carré de la longueur de ce côté ;
- Calcule, d'autre part, la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés ;
- Compare les résultats obtenus et conclus.

a. EF = 4,5 cm ; FG = 6 cm ; EG = 7,5 cm.

b. EF = 3,6 cm ; FG = 6 cm ; EG = 7 cm.

c. FG =64 mm ; EF = 72 mm ; EG = 65 mm.

d. EF = 3,2 dam ; FG = 25,6 m ; EG = 19,2 m.

38 *Apprendre à rédiger*

Dans chacun des cas suivants, démontre que le triangle ABC est un triangle rectangle. Précise à chaque fois en quel point.

a. AB = 52 cm ; AC = 39 cm et BC = 65 cm.

b. AB = 3,25 m ; AC = 3,97 m et BC = 2,28 m.

c. AC = 8,9 dm ; AB = 3,9 dm et CB = 80 cm.

d. CB = 33 mm ; AC = 65 mm et AB = 56 mm.

39 *Jouer au professeur !*

Voici l'énoncé d'un problème :

> ABC est un triangle tel que BC = 25 cm ; AB = 24 cm et AC = 7 cm. Démontre que le triangle ABC est un triangle rectangle.

Quentin a rédigé sur sa copie le texte :

Je sais que dans le triangle ABC, [BC] est le plus long côté donc :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$25^2 = 24^2 + 7^2$

$625 = 576 + 49$

$625 = 625$

Comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, le triangle ABC est bien rectangle en A.

a. Explique pourquoi le raisonnement de Quentin est faux.

b. Recopie la démonstration de Quentin en la corrigeant.

40 *Comparaison*

Voici ce que l'on peut voir sur une copie :

« $AB^2 = 3{,}64^2$ | $AC^2 + BC^2 = 0{,}27^2 + 3{,}65^2$

$AB^2 = 13{,}2496$ | $AC^2 + BC^2 = 0{,}0729 + 13{,}3225$

| $AC^2 + BC^2 = 13{,}3954$

Donc $AB^2 \neq AC^2 + BC^2$. D'après le théorème de Pythagore, ABC n'est pas rectangle. »

Est-ce juste ? Justifie ta réponse et corrige cette copie le cas échéant.

41 Le triangle OUI est tel que : UI = 5 cm ; UO = 1,4 cm et OI = 4,8 cm.

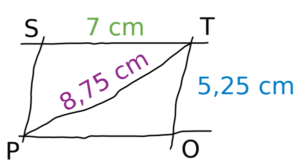
a. Construis ce triangle en vraie grandeur.

b. Par la symétrie de centre O, construis les points T et N symétriques respectifs des points U et I.

c. Quelle semble être la nature de NUIT ? Démontre ta conjecture.

42 *Du parallélogramme au rectangle*

On considère le parallélogramme STOP ci-contre dessiné à main levée.

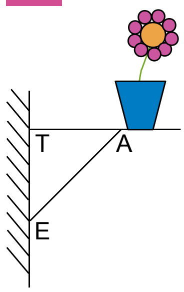


Démontre que le parallélogramme STOP est un rectangle.

43 *Du parallélogramme au losange*

LOSA est un parallélogramme tel que : LO = 58 mm ; LS = 80 mm et OA = 84 mm. Démontre que LOSA est un losange.

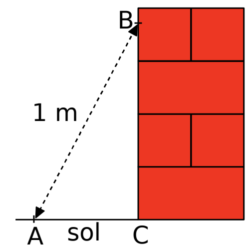
44 *Fleurs sur une étagère*



Sur un mur vertical, Arnaud a installé une étagère pour y poser des pots de fleurs. Les mesures qu'il a utilisées sont les suivantes : AT = 42 cm ; AE = 58 cm et TE = 40 cm.

L'étagère d'Arnaud est-elle horizontale ? Justifie.

45 *Construction d'un mur*



Pour apprendre son métier, un apprenti maçon a monté un mur en briques de 0,90 m de hauteur. Son patron arrive pour vérifier son travail : il marque un point B sur le mur à 80 cm du sol et un point A à 60 cm du pied du mur. Il mesure alors la distance entre les points A et B et il obtient 1 m.

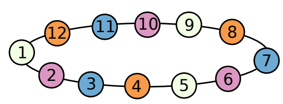
L'apprenti a-t-il bien construit son mur perpendiculaire au sol ? Justifie.

46 *Droites perpendiculaires*

Deux droites (d_1) et (d_2) sont sécantes en O ; M est un point de (d_1) tel que : OM = 11,9 cm et N est un point de (d_2) tel que : ON = 12 cm. On sait d'autre part que : MN = 16,9 cm.

Démontre que les droites (d_1) et (d_2) sont perpendiculaires.

47 *Le collier de Clémence*

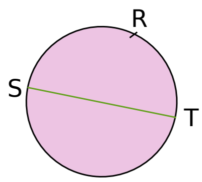


Clémence possède un collier qui contient 12 perles espacées régulièrement. Elle affirme pouvoir vérifier à l'aide de son collier qu'un triangle est rectangle. Pour cela, elle a besoin de former un triangle et de tendre son collier. Elle numérote ses perles de 1 à 12.

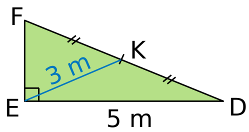
a. Dessine le collier de Clémence dans une position qui lui permet d'obtenir un angle droit.

b. Explique et justifie ton choix.

48 [ST] est un diamètre du cercle ; RS = 5,4 cm et ST = 7,2 cm.
Calcule RT en justifiant (tu arrondiras au mm).



49 Calcule, en justifiant, la valeur approchée par défaut de EF au centième près.



50 *Points cocycliques ?*

Le triangle ROD est tel que RD = 8,5 cm ; RO = 1,3 cm et DO = 8,4 cm.

a. Fais une figure en vraie grandeur. Ce triangle est-il rectangle ? Justifie ta réponse.

b. Place un point N tel que RN = 7,7 cm et DN = 3,6 cm.
Les points R, O, N et D sont-ils sur un même cercle ? Justifie ta réponse.

51 ABC est un triangle rectangle en B tel que : AB = 5 cm et AC = 8 cm.

a. Calcule BC (arrondis au mm).

b. D est un point tel que : CD = 20 cm et BD = 19 cm. D est-il unique ?

c. Montre que le triangle BCD est rectangle. Précise en quel point.

d. Déduis-en que les points A, B et D sont alignés.

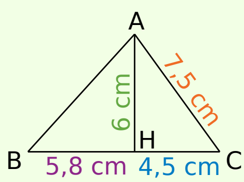
52 *Extrait du Brevet*

ABC est un triangle tel que : AC = 7,5 cm ; BH = 5,8 cm ; CH = 4,5 cm et AH = 6 cm, avec H ∈ [BC].

a. Faire une figure en vraie grandeur.

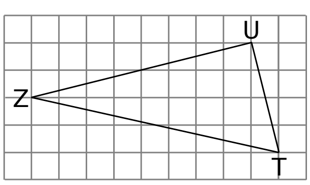
b. Démontrer que ACH est rectangle en H.

c. Calculer le périmètre et l'aire du triangle ABC.



53 *Quadrillage*

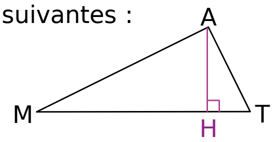
Le triangle ZUT est-il rectangle ?
Si oui, précise en quel point et justifie ta réponse.



54 *Attention aux valeurs utilisées !*

La figure ci-dessous n'est pas en vraie grandeur, les points M, H et T sont alignés et on dispose des longueurs suivantes :

AH = 46 mm ;
HT = 23 mm ;
MH = 92 mm.



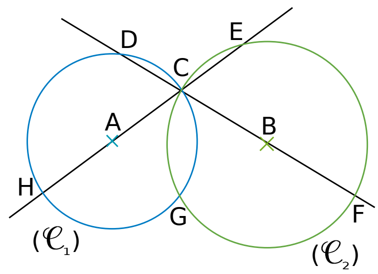
a. Calcule la longueur AT puis la longueur AM.

b. Démontre que le triangle MAT est rectangle en A.

c. Calcule l'aire du triangle MAT de deux façons différentes.

55 *Avec l'intersection de deux cercles*

On considère deux cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ de centres respectifs A et B. Les points C et G sont leurs deux points d'intersection.
La droite (AC) recoupe le cercle $(\mathscr{C}_1)$ en H et le cercle $(\mathscr{C}_2)$ en E.
La droite (BC) recoupe $(\mathscr{C}_1)$ en D et $(\mathscr{C}_2)$ en F.



a. Démontre que les droites (HG) et (GC) sont perpendiculaires. De même, que peux-tu dire des droites (GF) et (GC) ?

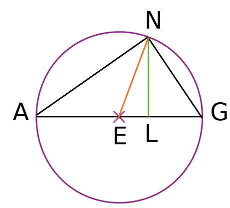
b. Démontre que les points H, G et F sont alignés.

c. Quelle est la nature de HDF ? Justifie.

d. Démontre que les points D, E, F et H sont cocycliques, c'est-à-dire situés sur un même cercle (tu préciseras un diamètre de ce cercle).

56 *Avec des angles*

[AG] est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ANG, [NE] est une médiane et [NL] une hauteur de ce triangle.

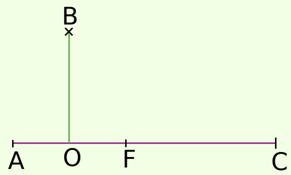


On sait d'autre part que : $\widehat{AGN} = 55°$.

Donne, en justifiant, la mesure de chacun des angles suivants :
$\widehat{LNG}$; $\widehat{GAN}$; $\widehat{ANE}$; $\widehat{AEN}$; $\widehat{NEL}$.

57 *Extrait du Brevet*

Les points A, O, F et C sont alignés.
AC = 15 cm ; AO = OF = 3 cm ; BO = 6 cm.
Les droites (AC) et (BO) sont perpendiculaires.



a. Construire la figure en vraie grandeur.

b. Montrer que AB² = 45 et que BC² = 180.

c. Montrer que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

d. Tracer le cercle de diamètre [FC], il coupe (BC) en H.

e. Montrer que le triangle FHC est rectangle.

f. Montrer que les droites (AB) et (FH) sont parallèles.

58 *Histoire de cercles*

[AB] est un segment de 6 cm de longueur et O est son milieu. M et N sont deux points tels que OBM soit un triangle équilatéral et B est le milieu de [ON].

a. Fais la figure en vraie grandeur.

b. Montre que OMN est un triangle rectangle.

c. Calcule la valeur arrondie de MN au centième de cm.

d. Construis le cercle circonscrit à chacun des triangles AMB et OMN.
On note L le deuxième point d'intersection de ces cercles.

e. Montre que OMBL est un losange.

59 *Extrait du Brevet*

ABC est un triangle tel que AB = 4,2 cm ; AC = 5,6 cm et BC = 7 cm.

a. Démontrer que ABC est un triangle rectangle.

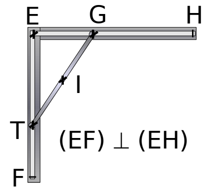
b. Calculer son aire.

c. On sait que si R est le rayon du cercle circonscrit à un triangle dont les côtés ont pour longueurs a, b, c données en cm, l'aire de ce triangle est égale à $\frac{abc}{4R}$.
En utilisant cette formule, calculer le rayon du cercle circonscrit à ABC.

d. Pouvait-on prévoir ce résultat ? Justifier.

60 *La tige*

La tige [TG] mesure 10 cm. Elle se déplace lorsque T glisse le long de [EF] et G le long de [EH].



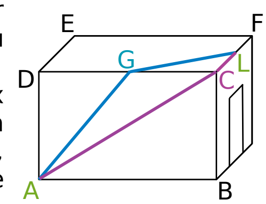
a. Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle GET ?

b. Quelle figure décrit le point I, milieu de [TG], lorsque la tige [TG] se déplace ?

61 *Longueur de câble*

Une pièce d'une maison a la forme d'un pavé droit dont les dimensions sont : AB = 5 m ; BC = 2,5 m et DE = 4 m.

Un bricoleur doit amener un câble du point A au point L, milieu de [CF].
Il hésite entre les deux possibilités marquées en couleur sur la figure, sachant que G est le milieu de [DC] :



en bleu, de A vers G puis de G vers L ;
en violet, de A vers C puis de C vers L.

a. Dans lequel des deux cas utilisera-t-il le moins de câble ? Justifie.

b. Construis sur une même figure, à l'échelle 1/100, les faces ABCD et CDEF.
Représente les deux possibilités pour le passage du câble.

c. Le bricoleur veut utiliser le moins de câble possible. Sur la figure précédente, représente le passage du câble de longueur minimum. Justifie ton tracé et calcule cette longueur.

62 *Agrandissement, réduction*

a. Démontre que le triangle AMI tel que : AM = 6 cm ; MI = 10 cm et AI = 8 cm est rectangle.

b. On multiplie les trois mesures du triangle par 0,8 pour avoir le triangle A'M'I'. Le triangle obtenu est-il rectangle ? Même question si les mesures de AMI sont multipliées par 3.

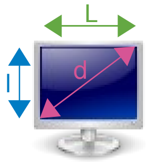
c. Soit un triangle rectangle dont les mesures, dans une même unité, sont notées a, b et c. On suppose que : $a > b > c$.
Quelle relation a-t-on entre a, b et c ?

d. Démontre que, si on multiplie a, b et c par un même nombre positif non nul k, le triangle obtenu est encore rectangle.

Exercices d'approfondissement

63 *Le bon format*

Pour répertorier ses moniteurs, un brocanteur relève leurs caractéristiques, notamment leurs longueurs et leurs largeurs :
L_1 = 30,6 cm et l_1 = 23 cm ;
L_2 = 34,6 cm et l_2 = 26 cm.



Or, dans son logiciel, la taille des moniteurs est répertoriée selon la diagonale des écrans en pouces.

a. Sachant qu'un pouce (noté 1") vaut 2,54 cm, retrouve les tailles d_1 et d_2 des moniteurs, en pouces, arrondies à l'unité.

b. Le brocanteur va recevoir un nouveau moniteur de 21". Il veut retrouver ses dimensions l et L. Son employé lui dit : « C'est simple car il n'existe qu'un seul rectangle de diagonale donnée. ». Prouve qu'il a tort.
On sait d'autre part que :
$L = \frac{4}{3}l$ (tu pourras utiliser $\frac{4}{3} \approx 1{,}33$).
Trouve alors les valeurs l et L.

c. Aide le brocanteur à créer un fichier "Calculateur de dimensions" avec un tableur pour renseigner :
1) la largeur l et la longueur L en cm et on obtiendrait la diagonale d en cm puis en pouces ;
2) la diagonale d en pouces et on obtiendrait les dimensions l et L en cm d'un moniteur 4/3.

d. Trouve les dimensions en cm de l'écran 13,3'' d'un ordinateur ultraportable puis la taille en pouces d'un écran de 29 cm par 38,6 cm.

64 *Lieu de points*

Avec un logiciel de géométrie de ton choix, construis deux points A et O puis le cercle ($\mathscr{C}$) de centre O qui passe par A. Place un point B sur le cercle ($\mathscr{C}$) et construis le segment [AB]. Place le point M milieu du segment [AB].
Fais apparaître la figure que décrit le point M lorsque le point B parcourt le cercle ($\mathscr{C}$).
Démontre le résultat obtenu.

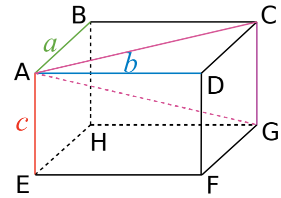
65 Soit un segment [AB] de longueur 8 cm.

a. M est un point vérifiant MA² + MB² = 64. Démontre que AMB est rectangle en M puis que M appartient au cercle de diamètre [AB].

b. Soit N un point du cercle de diamètre [AB]. Démontre qu'alors NA² + NB² = 64.

c. Construis le segment [AB] et tous les points P vérifiant PA² + PB² = 64. Justifie ta construction.

66 ABCDEFGH est un pavé droit tel que AB = a, AD = b et AE = c, en cm. On admet que le triangle ACG est rectangle en C.



a. Montre que :
AC² = $a^2 + b^2$ et
AG² = $a^2 + b^2 + c^2$.

b. Calcule AG pour :
a = 6 cm, b = 3 cm
et c = 4 cm.

c. Cette fois, ABCDEFGH est un cube d'arête d. Déduis de **a.** que AC² = $2d^2$ et que AG² = $3d^2$. Calcule AG pour d = 5 m.

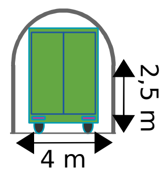
67 ABC est un triangle quelconque. A' est le milieu de [BC], B' celui de [AC] et C' celui de [AB]. O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

a. Démontre que A, B', O et C' sont cocycliques.

b. Prouve que les cercles circonscrits aux triangles AB'C', BA'C' et CA'B' ont un point commun que tu préciseras.

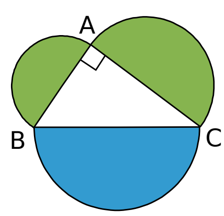
68 *Tunnel*

Un tunnel, à sens unique, d'une largeur de 4 m est constitué de deux parois verticales de 2,5 m de haut, surmontées d'une voûte semi-circulaire de 4 m de diamètre.
Un camion de 2,6 m de large doit le traverser.
Quelle peut être la hauteur maximale de ce camion ?



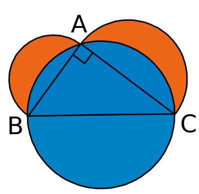
69 *Les lunules d'Hippocrate*

ABC est un triangle rectangle en A. On a construit les demi-cercles de diamètres [AB], [AC] et [BC] comme le montre la figure ci-contre.



a. Exprime l'aire totale de la figure en fonction de AB, AC et BC.

b. Montre que l'aire du demi-disque bleu est égale à la somme des aires des demi-disques verts. Déduis-en que l'aire totale de la figure est égale à la somme des aires du triangle ABC et du disque de diamètre [BC].



c. Montre que l'aire des lunules (les parties en orange ci-contre) est égale à l'aire du triangle ABC.

1 Quizz pythagoricien

1re partie : Trois questions

Par groupe, en vous documentant, répondez aux questions suivantes :

- Où et à quelle époque Pythagore a-t-il vécu ?
- Quels sont les domaines dans lesquels Pythagore et les pythagoriciens ont travaillé ?
- Est-ce Pythagore qui a démontré le premier le théorème qui porte son nom ?
- Comparez les réponses de chaque groupe.

2e partie : Trouvez les questions

En groupe, choisissez un thème parmi les quatre suivants :

- La vie de Pythagore ;
- Pythagore et l'astronomie ;
- Pythagore et la musique ;
- Pythagore et les mathématiques.

Documentez-vous en consultant Internet, le CDI de votre collège, etc...

Construisez alors un questionnaire et préparez, sur une autre feuille, les réponses à celui-ci.

3e partie : Recherche

Chaque élève choisit le questionnaire d'un autre groupe pour ensuite y répondre en travail à la maison.

4e partie : Mise en commun

En classe entière, on étudie les questions posées sur chaque thème ainsi que les réponses apportées par chacun.

Pythagore. Détail de L'école d'Athènes de Raphaël, 1509. Source Wikipedia Commons.

2 Le jeu du triplet

1re partie : Qu'est-ce qu'un triplet pythagoricien ?

Un triplet pythagoricien est un triplet d'entiers naturels non nuls (x, y, z) vérifiant la relation de Pythagore : $x^2 + y^2 = z^2$.

Vérifiez que (3, 4, 5) est un triplet pythagoricien.

Le triplet (4, 5, 6) est-il pythagoricien ?

2e partie : Réalisation des cartes

Découpez douze cartes dans une feuille puis écrivez chacun des nombres ci-dessous sur une face :

3	4	5	5	6	8	8	10	12	13	15	17

3e partie : Action !

Maintenant que le jeu est construit, vous allez pouvoir jouer par groupes de trois.

Mélangez puis distribuez toutes les cartes faces cachées. Appliquez alors les règles suivantes :

- Si un (ou plusieurs) joueur a un triplet pythagoricien : il dit « triplet », marque un point et pose le triplet en dehors du jeu. On mélange à nouveau et on redistribue les cartes ;
- Si aucun joueur n'a de triplet, chaque joueur passe la carte de son choix à son voisin de gauche et regarde à nouveau s'il a un triplet ;
- Si un joueur dit « triplet » et qu'il s'est trompé, il perd un point ;
- Le gagnant est celui qui atteint 3 points.

4e partie : Action avec des décimaux !

Refaites 12 cartes en mettant à présent les nombres suivants :

0,5	1	1,2	1,2	1,3	1,6
1,6	2	2,4	2,6	3	3,4

Faites alors une nouvelle partie avec ce jeu !

5e partie : À vous de faire le jeu !

Lorsqu'on connaît un triplet pythagoricien, on peut en obtenir d'autres en multipliant les trois nombres par un même coefficient.

Par exemple, à partir du triplet (3, 4, 5), on obtient en multipliant chaque nombre par 15 le triplet (45, 60, 75).

Trouvez ainsi d'autres triplets pythagoriciens puis construisez un nouveau jeu de 12 cartes. Testez votre nouveau jeu en faisant une partie.

Se tester avec le QCM !

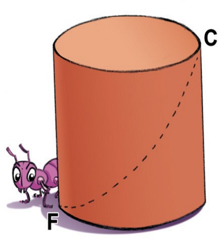
		R1	R2	R3	R4
1	Si I est le centre du cercle circonscrit au triangle quelconque ABC alors...	I est à égale distance de A, B et C	I est le point d'intersection des médiatrices des côtés de ABC	I est le milieu du plus grand côté de ABC	A et B appartiennent au cercle de centre I passant par C
2	Si EDF est rectangle en D et O est le milieu de [EF] alors...	O est à égale distance de E, D et F	$OE = \frac{EF}{2}$	$OD = \frac{EF}{2}$	O est le centre du cercle circonscrit à EDF
3	Si MNP est rectangle en M alors...	M appartient au cercle de diamètre [NP]	N appartient au cercle de diamètre [MP]	MNP est inscrit dans le cercle de diamètre [NP]	son cercle circonscrit a pour diamètre [MP]
4	Si F appartient au cercle de diamètre [GH] alors...	FG = GH	$\widehat{GFH} = 90°$	$\widehat{FGH} + \widehat{FHG} = 90°$	H appartient au cercle de diamètre [FG]
5	Si RKE est rectangle en K alors...	$RK^2 = RE^2 + EK^2$	$EK^2 = ER^2 + RK^2$	$RE^2 = RK^2 + KE^2$	$KE^2 = RE^2 - RK^2$
6	Si $(OI) \perp (EI)$ avec OI = 2,03 cm et EI = 3,96 cm alors...	OE ≈ 4,45 cm	OE = 19,8025 cm	OE = 5,99 cm	OE = 4,45 cm
7	ABC est rectangle en A ; AB = 5 et BC = 7 (en cm). L'arrondi au dixième de AC est...	8,6 cm	4,8 cm	4,89 cm	4,9 cm
8	XY = 8,4 ; YZ = 1,3 et XZ = 8,5 (en cm). On a alors...	$(XY) \perp (ZY)$	$(XZ) \perp (ZY)$	$\widehat{YXZ} = 90°$	$\widehat{YXZ}$ et $\widehat{YZX}$ sont complémentaires
9	Si V n'appartient pas au cercle de diamètre [RT] alors...	VRT n'est pas rectangle	VRT peut être rectangle	VRT n'est pas rectangle en V	VRT est rectangle en R ou en T
10	Si le triangle ALF est rectangle en L alors...	$AL^2 \neq AF^2 + LF^2$	$LF^2 - LA^2 = AF^2$	$LF^2 = LA^2 - AF^2$	$AL^2 = LF^2 + AF^2$
11	Si $ST^2 = SU^2 + UT^2$ alors...	$(SU) \perp (ST)$	$SU^2 \neq ST^2 + UT^2$	$\widehat{SUT} = 90°$	SU = UT
12	Si $KG^2 \neq KC^2 + CG^2$ alors...	KCG n'est pas rectangle	KCG peut être rectangle	KCG n'est pas rectangle en C	KCG est quelconque

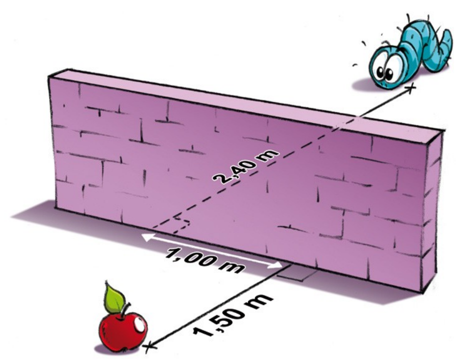
Récréation mathématique

La fourmi

Une fourmi se trouvant en F sur un pot cylindrique veut manger de la confiture se trouvant en C.
Le pot mesure 15 cm de haut et a pour diamètre 10 cm.

Trouve pour la fourmi pressée la trajectoire la plus courte ainsi que sa longueur (un patron peut être utile...).

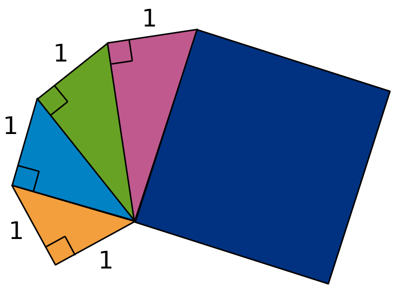




La chenille

Le mur a une hauteur de 1,40 m et une épaisseur de 20 cm. La chenille étant obligée de passer « par-dessus le mur », trouve la longueur du plus court trajet pour aller déguster la pomme.

Avec l'escargot de Pythagore



Les mesures de la figure sont en cm (la figure n'est pas en vraie grandeur).

a. Quelle est l'aire du carré bleu ?

b. Procède de la même façon pour construire un carré d'aire 10 cm².

Le carré

Calcule $5^2 + 6^2$.

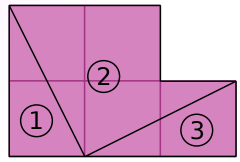
Construis un carré d'aire 61 cm² sans connaître la longueur de son côté.

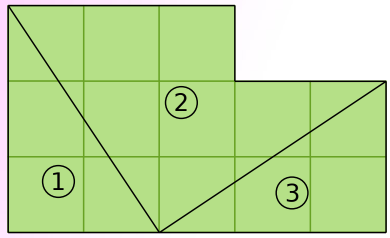
Même question avec une aire de 50 cm² (trouve deux façons différentes).

Avec des carrés d'aire 1 cm²

a. Reproduis, découpe et assemble les trois pièces de chaque figure pour construire un carré. Donne l'aire de chacun d'eux.

Chaque carré fait 1 cm de côté.





b. Procède de la même façon pour construire un carré d'aire 10 cm² puis un autre carré d'aire 17 cm².

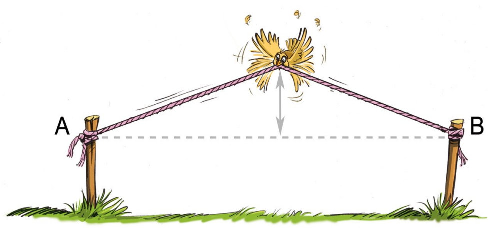
c. Peux-tu utiliser cette méthode pour construire un carré d'aire 11 cm² ?

d. Pour quels autres nombres cette méthode fonctionne-t-elle ?

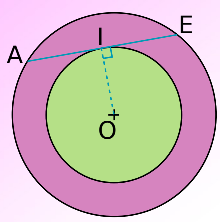
Pour aller plus loin

Une très longue corde

Une corde de longueur L (en mètres) est tendue horizontalement entre deux points A et B.
On ajoute 1 mètre à cette corde : elle n'est donc plus tendue entre les points A et B. On la retend en la tirant par son milieu vers le haut.
On s'intéresse à la hauteur qu'atteint le milieu de la corde allongée quand elle est retendue.
Montre sur plusieurs exemples (valeurs de L) que plus la proportion de corde ajoutée (1 mètre) par rapport à la longueur de corde initiale (L) diminue, plus cette hauteur augmente.
(Tu exprimeras cette proportion sous forme de pourcentage.)



La couronne



Les deux cercles ont le même centre. A, I et E appartiennent aux cercles.
(AE) est perpendiculaire à (OI).

a. Calcule la valeur exacte de l'aire de la couronne rose sachant que AE = 40 mm.

b. Calcule $29^2 - 21^2$ et $25^2 - 15^2$. Déduis-en la construction de deux couronnes ayant la même aire que celle du **a.**.

c. Quelle est la condition sur les rayons des cercles pour qu'une couronne ait la même aire que les précédentes ?

d. À quelle condition deux couronnes ont-elles la même aire ?